



Représentation à l'échelle microscopique d'un mécanisme de rupture dans un milieu à joints

Samir Maghous *, Patrick de Buhan, Arnaud Bekaert

ENPC-LMSGC, 6-8, avenue Blaise-Pascal, cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée, France

Reçu le 3 novembre 2004 ; accepté après révision le 7 décembre 2004

Disponible sur Internet le 18 janvier 2005

Présenté par Jean Salençon

Résumé

On propose de mettre en évidence, pour le milieu à joints, des mécanismes de rupture permettant de transcrire à l'échelle des joints, certains mécanismes de rupture par blocs en translation du milieu homogénéisé, mis en œuvre dans le cadre de l'approche cinématique du calcul à la rupture. L'idée consiste à représenter une discontinuité de vitesse virtuelle à l'échelle macroscopique par une zone d'épaisseur finie dont la cinématique virtuelle est définie par un mouvement rigidifiant par morceaux de blocs élémentaires du milieu hétérogène. L'équivalence, au sens du calcul à la rupture, entre les deux représentations microscopique et macroscopique est assurée par l'égalité des puissances résistantes maximales mises en jeu. *Pour citer cet article : S. Maghous et al., C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Microscopic scale representation of a failure mechanism within a homogenized jointed medium. A representation of a class of failure mechanisms defined on a homogenized jointed medium by a velocity jump along a planar surface, is analyzed at the scale of the joints. The approach consists in representing a velocity jump at the macroscopic level by the kinematics of a finite band in the heterogeneous medium characterized by a piecewise rigid body motion of elementary blocs. The equivalence (in the sense of the yield design theory) between the macroscopic and macroscopic representations of such failure mechanisms is ensured by the equality of the corresponding maximum resisting rates of work. *To cite this article: S. Maghous et al., C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Rupture ; Solides et structures ; Milieu à joints ; Discontinuité de vitesse

Keywords: Rupture; Solids and structures; Jointed medium; Velocity jump

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : maghous@lmsgc.enpc.fr (S. Maghous).

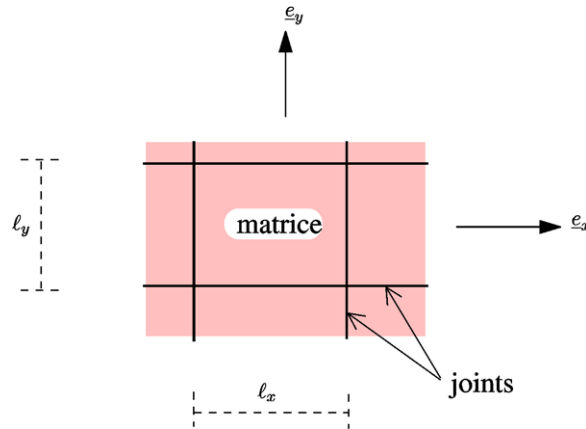


Fig. 1. Description du milieu à joints.

1. Position du problème

1.1. Résistance du milieu à joints

On considère dans toute la suite un milieu constitué d'un matériau homogène traversé par un réseau régulier de deux familles perpendiculaires de joints supposés plans et infinis. On se placera dans l'hypothèse des déformations planes parallèlement au plan $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$ qui définit les directions normales respectivement à chacune des deux familles de joints (Fig. 1). Le terme *matrice* fera référence au matériau sain et on désignera par l_i , $i \in \{x, y\}$, l'espacement inter-joints de la famille dont la normale est \underline{e}_i .

Du point de vue du calcul à la rupture [1,2], les joints constituent des plans de faiblesse du matériau. On considère la situation, fréquemment rencontrée pour les milieux rocheux fracturés, où les capacités de résistance de la matrice peuvent être considérées comme infiniment grandes comparées à celles des joints. Ces derniers sont modélisés comme des interfaces dont la résistance est régie par un critère de Mohr–Coulomb de cohésion c et d'angle de frottement ϕ .

La mise en œuvre de l'homogénéisation en calcul à la rupture des milieux périodiques [3,4] permet de construire le domaine de résistance macroscopique G^{hom} de ce milieu. On établit que [5] :

$$\underline{\underline{\Sigma}} \in G^{\text{hom}} \iff |\Sigma_{xy}| \leq c - \Sigma_{xx} \tan \phi, \quad |\Sigma_{xy}| \leq c - \Sigma_{yy} \tan \phi \quad (1)$$

où les Σ_{ij} désignent les composantes du tenseur des contraintes macroscopique dans la base $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$. Cette définition de G^{hom} met en évidence l'anisotropie de résistance du milieu homogénéisé. Une représentation commode consiste à considérer dans le milieu homogénéisé une facette de normale \underline{N} inclinée d'un angle α par rapport à la direction \underline{e}_x et à examiner le domaine $\mathcal{G}^{\text{hom}}(\underline{N}) \subset \mathbb{R}^2$ des vecteurs-contrainte $\underline{T} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{N}$ appliqués sur la facette et compatibles avec la résistance du matériau homogénéisé. L'expression explicite de ce domaine en fonction de l'inclinaison α est donnée dans [5]. Même si les développements effectués ci-après sont valables dans le cas général, on se limitera ici, pour des raisons de simplicité, à la situation où l'angle α est compris entre ϕ et $\frac{\pi}{2} - \phi$, pour laquelle on a

$$\underline{T} \in \mathcal{G}^{\text{hom}}(\underline{N}) \iff \left(\underline{T} - \frac{c}{\tan \phi} \underline{N} \right) \cdot \underline{e}_x \leq 0, \quad \left(\underline{T} - \frac{c}{\tan \phi} \underline{N} \right) \cdot \underline{e}_y \leq 0 \quad (2)$$

Fig. 2 donne une représentation de ce domaine dans le plan (T_x, T_y) .

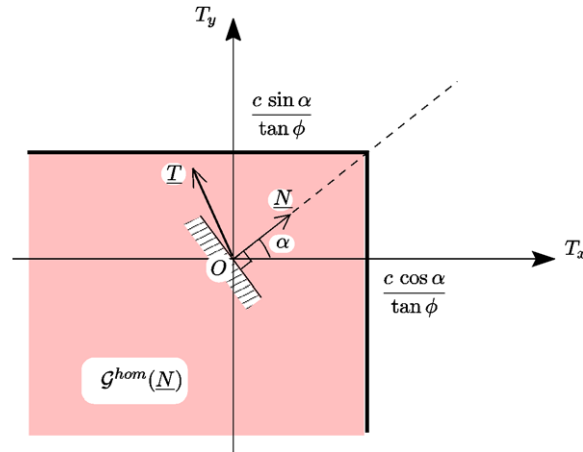


Fig. 2. Domaine de résistance attaché à une facette du milieu homogénéisé, $\phi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \phi$.

La fonction d'appui du domaine $\mathcal{G}^{\text{hom}}(\underline{N})$ défini par (2) est :

$$\Pi^{\text{hom}}(\underline{N}, \underline{V}) = \begin{cases} \frac{c}{\tan \phi} \underline{V} \cdot \underline{N} & \text{si } \underline{V} \cdot \underline{e}_x \geq 0 \text{ et } \underline{V} \cdot \underline{e}_y \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

Dans l'optique du calcul à la rupture, le vecteur \underline{V} a le statut d'une discontinuité de vitesse virtuelle au passage d'un plan du milieu homogénéisé de normale \underline{N} ; les conditions $\underline{V} \cdot \underline{e}_x \geq 0$ et $\underline{V} \cdot \underline{e}_y \geq 0$ caractérisent quant à elle les discontinuités de vitesse « pertinentes » pour $\mathcal{G}^{\text{hom}}(\underline{N})$.

1.2. Problématique abordée

La question examinée dans cette note est celle de la transcription à l'échelle de la microstructure d'une discontinuité de vitesse virtuelle le long d'une ligne de rupture au sein du milieu homogénéisé. Cette question est d'autant plus légitime que la matrice étant infiniment résistante, les mécanismes microscopiques ne mettent en jeu que des déformations le long des joints. Pour fixer les idées, on considère dans le milieu homogénéisé une discontinuité de vitesse virtuelle uniforme \underline{V} le long d'une ligne de rupture S de normale \underline{N} telle que $\alpha = (\underline{e}_x, \underline{N})$ (Fig. 3). En limitant l'analyse à $\alpha \in [\phi, \frac{\pi}{2} - \phi]$,¹ la pertinence de \underline{V} vis à vis des capacités macroscopiques impose que $\theta = (\underline{e}_x, \underline{V}) \in [0, \pi/2]$.

De manière intuitive, on associe à S une ligne de rupture microscopique s formée d'une succession de tronçons rectilignes épousant les joints, et qui, en moyenne, coïncide avec S . On désigne par Ω^+ et Ω^- les domaines situés de part et d'autre de s comme schématisé sur la Fig. 3. Géométriquement, la ligne brisée s est définie par les entiers (nombre de blocs horizontaux et verticaux) \mathcal{N}_x et \mathcal{N}_y tels que

$$\tan \alpha = \frac{\mathcal{N}_x \ell_x}{\mathcal{N}_y \ell_y} \quad (4)$$

Avant d'examiner plus en détail la question, signalons qu'une problématique similaire a été abordée dans [3] dans le cas du milieu multicouche, lorsque les constituants sont purement cohérents. Il s'agissait dans cette analyse, de transcrire à l'échelle microscopique, un mécanisme de rupture virtuel du milieu homogénéisé par bande de cisaillement.

¹ La démarche peut être reconduite de manière similaire pour les autres valeurs de l'inclinaison α , même si les mécanismes microscopiques correspondants sont plus complexes.

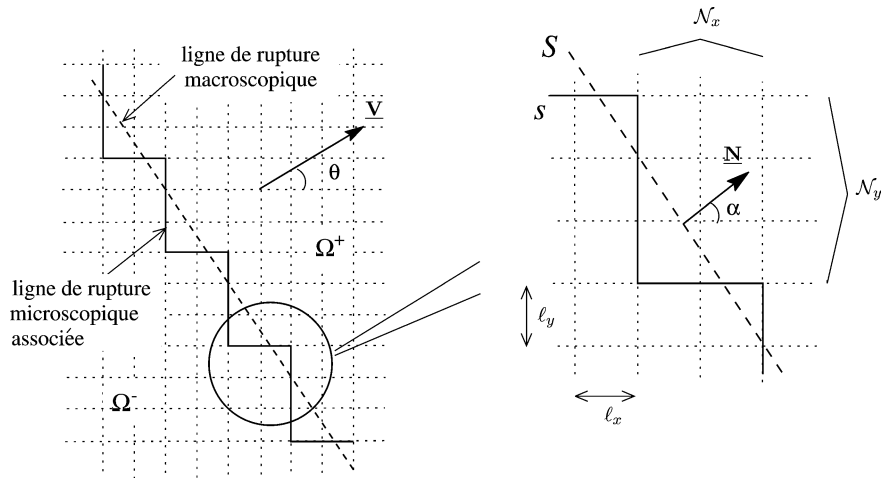


Fig. 3. Schématisation de la ligne de rupture aux deux échelles.

La présente étude se distingue de celle menée dans [3], d'une part, par la nature de la microstructure et des critères de résistance considérés, et d'autre part, par la nature du mécanisme de rupture virtuel macroscopique à transcrire à l'échelle inférieure.

2. Description du mécanisme de rupture microscopique

On procède en distinguant selon les valeurs de l'inclinaison θ du vecteur \underline{V} .

2.1. Cas $\phi \leq \theta \leq \pi/2 - \phi$

C'est la situation simple évoquée en fin de la Section 1.2. On décrit la cinématique microscopique par le champ de vitesse virtuelle suivant

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{0} & \text{si } \underline{x} \in \Omega^- \\ \underline{V} & \text{si } \underline{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (5)$$

Ce champ induit la discontinuité uniforme \underline{V} le long de s . Rappelons que sa pertinence est assurée par le domaine considéré pour θ . Pour vérifier l'équivalence du point de vue du calcul à la rupture entre les mécanismes microscopique et macroscopique, il convient de comparer les puissances résistantes maximales correspondantes. Celle engendrée dans le mécanisme microscopique vaut, pour le tronçon élémentaire défini par les longueurs $\mathcal{N}_x \ell_x$ le long d'un joint horizontal et $\mathcal{N}_y \ell_y$ le long d'un joint vertical :

$$p_{rm} = \frac{c}{\tan \phi} (\mathcal{N}_x \ell_x V_y + \mathcal{N}_y \ell_y V_x) \quad (6)$$

alors que la puissance résistante maximale développée dans le mécanisme macroscopique sur la portion de longueur $L = \sqrt{\mathcal{N}_x^2 \ell_x^2 + \mathcal{N}_y^2 \ell_y^2}$ de S est

$$P_{rm} = L \times \Pi^{\text{hom}}(\underline{N}, \underline{V}) = \frac{c}{\tan \phi} (\mathcal{N}_x \ell_x V_y + \mathcal{N}_y \ell_y V_x) \quad (7)$$

en vertu de (3) et (4). Ceci assure bien l'égalité $p_{rm} = P_{rm}$.

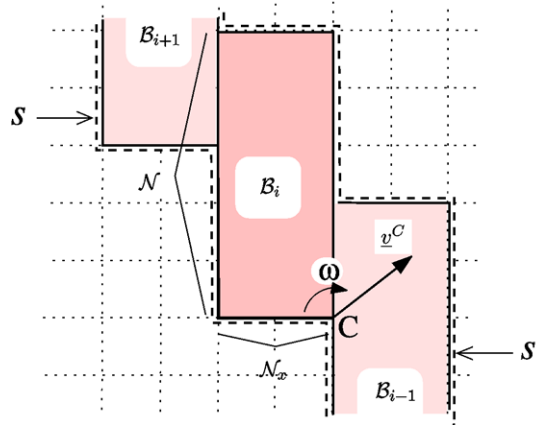


Fig. 4. Cinématique virtuelle du bloc B_i .

2.2. Cas $\theta < \phi$

C'est la situation non triviale où le mécanisme microscopique ne peut être décrit par le champ de vitesse virtuel (5), puisque non pertinent pour le critère de résistance des joints horizontaux. Pour cela on va considérer des blocs B_i constitués de N_x blocs élémentaires dans la direction e_x et N_y blocs dans la direction e_y (Fig. 3). L'ensemble des blocs $\cup_i B_i$ est délimité d'une part par la ligne s et d'autre part par s' déduite de s par la translation $N_x \ell_x e_x + N_y \ell_y e_y$. On confère à chaque B_i un mouvement virtuel rigidifiant défini par les vitesses de translation \underline{v}^C et de rotation $-\omega e_z$ ($\omega \geq 0$) autour du point C , extrémité inférieure droite de B_i . Le mouvement des blocs amont et aval est obtenue par périodicité. Le champ de vitesse virtuelle ainsi défini s'écrit

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{0} & \text{si } \underline{x} \in \Omega^- \\ \underline{v}^C - \omega e_z \wedge (\underline{x} - \underline{x}_C) & \text{si } \underline{x} \in B_i \\ \underline{V} & \text{si } \underline{x} \in \Omega^+ \setminus \cup_i B_i \end{cases} \quad (8)$$

Compte tenu de la périodicité du mouvement des blocs, il suffit d'étudier les discontinuités de vitesse $[\underline{v}]$ suivantes induites le long du contour B_i :

- sur l'interface $\Omega^-/B_i \subset s$, la pertinence de \underline{v} impose les conditions

$$v_x^C \geq 0, \quad v_y^C \geq 0, \quad v_y^C \geq v_x^C \tan \phi, \quad v_x^C \geq (v_y^C + \omega N_x \ell_x) \tan \phi \quad (9)$$

Si ces inégalités sont vérifiées, la contribution de $[\underline{v}]$ le long de cette interface à la puissance résistante maximale s'écrit

$$\Phi_1 = \frac{c}{\tan \phi} \left(N_x \ell_x v_y^C + N_y \ell_y v_x^C + \frac{\omega}{2} (N_x^2 \ell_x^2 + N_y^2 \ell_y^2) \right) \quad (10)$$

- le long de B_{i+1}/B_i , la condition de pertinence s'exprime ici par $\cot \alpha \geq \tan \phi$, qui est automatiquement vérifiée car $\phi \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} - \phi$. La contribution correspondante à la puissance résistante maximale est

$$\Phi_2 = \frac{c}{\tan \phi} N_y^2 \ell_y^2 \left(\frac{N_x}{N_y} - 1 \right) \omega \quad (11)$$

- sur $\Omega^+/\mathcal{B}_i \subset s'$, la pertinence de \underline{v} implique que

$$\begin{cases} V_x \geq v_x^C + \omega \mathcal{N} \ell_y, & V_y \geq v_y^C + \omega \mathcal{N}_x \ell_x \\ V_x - v_x^C - \omega \mathcal{N} \ell_y \geq (V_y - v_y^C) \tan \phi \\ V_y - v_y^C - \omega \mathcal{N}_x \ell_x \geq (V_x - v_x^C - \omega \mathcal{N} \ell_y) \tan \phi \end{cases} \quad (12)$$

Sous réserve que les conditions (12) soient vérifiées, la contribution à la puissance résistante maximale est

$$\Phi_3 = \frac{c}{\tan \phi} \left(\mathcal{N}_x \ell_x (V_y - v_y^C) + \mathcal{N}_y \ell_y (V_x - v_x^C) - \frac{\omega}{2} \left(\mathcal{N}_y^2 \ell_y^2 \left(\frac{2\mathcal{N}}{\mathcal{N}_y} - 1 \right) + \mathcal{N}_x^2 \ell_x^2 \right) \right) \quad (13)$$

En définitive, si (9) et (12) sont satisfaites, la puissance résistante maximale développée (par bloc \mathcal{B}_i) dans le champ de vitesse virtuelle microscopique prend l'expression

$$P_{rm} = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \frac{c}{\tan \phi} (\mathcal{N}_x \ell_x V_y + \mathcal{N}_y \ell_y V_x) \quad (14)$$

qui coïncide avec celle de P_{rm} (voir (7)) développée à l'échelle macroscopique par la discontinuité de vitesse virtuelle \underline{V} pour une longueur $L = \sqrt{\mathcal{N}_x^2 \ell_x^2 + \mathcal{N}_y^2 \ell_y^2}$ de S . L'équivalence au sens du calcul à la rupture entre les mécanismes microscopique et macroscopique sera donc acquise dès que le champ de vitesse virtuelle défini par (7) correspondra à une approche cinématique *non triviale*. Le mécanisme macroscopique étant donné, ceci équivaut à l'existence des réels v_x^C , v_y^C , ω et l'entier $\mathcal{N} \geq \mathcal{N}_y$ compatibles avec les conditions de pertinence (9) et (12), sachant que $V_x \geq 0$ et $V_y \geq 0$ (pertinence du mécanisme macroscopique).

L'analyse de ce problème auxiliaire montre qu'il est possible d'exhiber au moins une solution. Tout d'abord on choisit de satisfaire (9) en y réalisant l'égalité dans ses deux dernières inégalités. On obtient alors

$$v_x^C = \frac{\mathcal{N}_x \ell_x \tan \phi}{1 - \tan \phi^2} \omega \geq 0, \quad v_y^C = \frac{\mathcal{N}_x \ell_x \tan \phi^2}{1 - \tan \phi^2} \omega \geq 0 \quad (15)$$

Il reste donc à vérifier (12) compte tenu de (15). La compatibilité des deux dernières inégalités de (12) impose

$$\omega \leq \omega_o = \frac{V_y}{\mathcal{N}_x \ell_x} \frac{1 - \tan \phi^2}{1 + \tan \phi^2} \quad (16)$$

On adopte alors

$$\omega \leq \omega_o (1 - \chi) \quad \text{avec } 0 \leq \chi < 1 \quad (17)$$

On montre qu'il est toujours possible de trouver une valeur $\chi_0 \geq 0$ telle que si $\chi \in [\chi_0, 1[$, le choix

$$\mathcal{N} = E \left(\frac{V_x - V_y \tan \phi}{\omega \ell_y} - \frac{\ell_x \tan \phi}{\ell_y} \right) \quad (18)$$

où $E(a)$ désigne la partie entière du réel a , assure que $\mathcal{N} \geq \mathcal{N}_y$ et permet de satisfaire l'ensemble des conditions (12).

Pour récapituler, on peut affirmer que le champ de vitesse virtuelle défini par (8) et (15)–(18) constitue une transcription à l'échelle microscopique du mécanisme de rupture virtuel macroscopique.

Ce mécanisme virtuel peut être visualisé en considérant la situation $\phi = 30^\circ$, $\ell_x = \ell_y$, inclinaison de la ligne de rupture macroscopique $\alpha = 45^\circ$ (on retiendra donc $\mathcal{N}_x = \mathcal{N}_y = 1$) et inclinaison de la discontinuité de vitesse macroscopique $\theta = 20^\circ$. Cette situation correspond à $\chi_0 \simeq 0,052$. On retiendra alors $\chi = 0,1$ pour définir le mécanisme de rupture virtuel à l'échelle microscopique. L'expression (18) conduit alors à $\mathcal{N} = 4$.

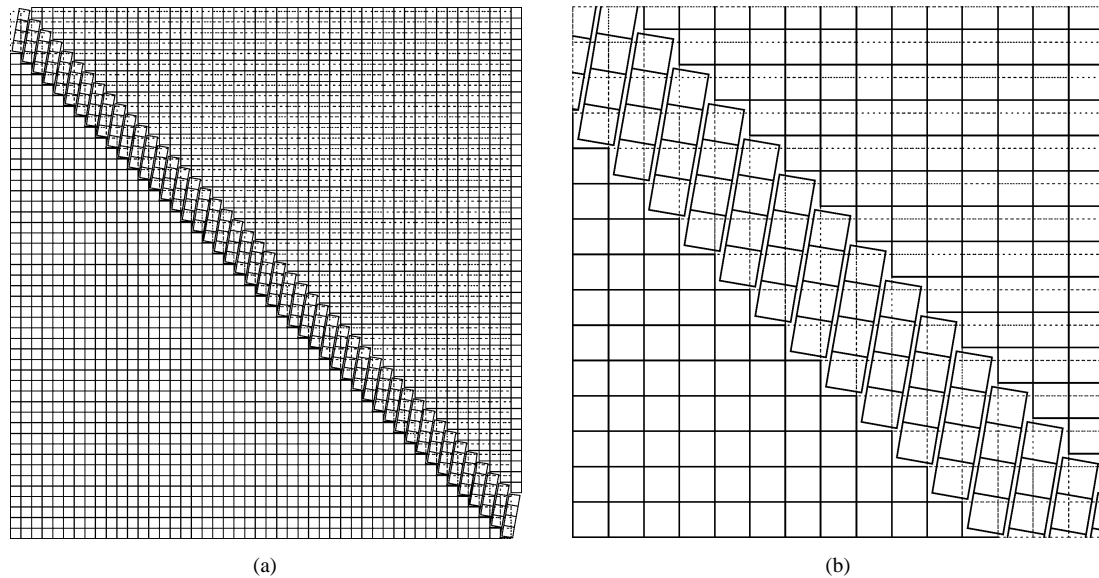


Fig. 5. Mécanisme de rupture microscopique. (a) vue de loin, (b) vue de près.

2.3. Cas $\theta > \pi/2 - \phi$

Le mécanisme de rupture virtuel à l'échelle microscopique est obtenu simplement à partir de celui construit pour $\theta < \phi$ par symétrie par rapport à $x = y$. Ainsi les blocs \mathcal{B}_i sont maintenant constitués de $\mathcal{N} \geq \mathcal{N}_x$ blocs élémentaires dans la direction \underline{e}_x et \mathcal{N}_y blocs dans la direction \underline{e}_y .

3. Commentaires

En nous restreignant à une microstructure particulière du milieu à joints, nous avons construit la transcription à l'échelle microscopique d'un mécanisme de rupture virtuel macroscopique plan défini sur le milieu homogénéisé par translation relative d'un bloc par rapport à un autre. L'équivalence est assurée par l'égalité des puissances résistantes maximales mises en jeu aux deux échelles microscopique et macroscopique. Par ailleurs, l'étude met en évidence en passant l'avantage de *recourir, lorsque c'est possible, à la démarche d'homogénéisation pour l'analyse de stabilité de tels milieux* (complexité du mécanisme de rupture micro comparativement à son homologue macro).

Gardant à l'esprit le caractère virtuel du mécanisme mis en évidence, on observe que celui-ci intéresse une bande de largeur $\mathcal{N} \ell_y \sin \alpha$, dans laquelle le matériau hétérogène se « déforme ».

Si la démarche suivie peut être reconduite directement au cas de réseau de joints non perpendiculaires, sa généralisation à la transcription d'un mécanisme de rupture virtuel tridimensionnel est plus délicate.

Références

- [1] J. Salençon, An introduction to the yield design theory and its application to soil mechanics, *Eur. J. Mech. A Solids* 9 (1992) 477–500.
- [2] J. Salençon, *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses de l'ENPC, 1983.
- [3] P. de Buhan, *Approche fondamentale du calcul à la rupture des sols renforcés*, Thèse d'Etat, Université Paris VI, 1986.
- [4] P. Suquet, *Analyse limite et homogénéisation*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. IIb* 296 (1983) 1355–1358.
- [5] A. Bekaert, S. Maghous, Three-dimensional yield strength properties of jointed rock mass as a homogenized medium, *Mechanics of Cohesive-Frictional Material 1* (1996) 1–24.