



Mouvements propres d'un système à 1 D.D.L. avec amortissement viscoélastique

Patrick Muller

Laboratoire de modélisation, matériaux et structures, UMR CNRS. N° 7143, université Pierre et Marie Curie,
boîte 161, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 23 septembre 2004 ; accepté le 7 décembre 2004

Disponible sur Internet le 8 janvier 2005

Présenté par Pierre Suquet

Résumé

Dans cette Note, on considère les mouvements propres d'un oscillateur à un degré de liberté constitué d'une masse et d'un ressort viscoélastique correspondant à un modèle rhéologique de Biot à $2n + 1$ paramètres. On montre qu'il y a $n + 2$ mouvements propres indépendants : aux deux mouvements propres amortis avec ou sans oscillations, bien connus dans le cas d'un amortissement visqueux classique, viennent s'ajouter n mouvements propres *amortis sans oscillations* induits par la rhéologie viscoélastique. **Pour citer cet article : P. Muller, C. R. Mecanique 333 (2005).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Eigenmotions of a 1-D.O.F. viscoelastically damped system. In this note, one considers a 1-*d.o.f.* oscillator consisting of a mass and a viscoelastic spring, the rheology of which is represented by a generalized so-called Biot's model with $2n + 1$ parameters. It is proved that its $n + 2$ independent eigenmotions are of the following nature: two eigenmotions damped with or without oscillations (as in the case of classical viscous damping) and n eigenmotions *damped without oscillations* which are induced by the viscoelastic rheology. **To cite this article: P. Muller, C. R. Mecanique 333 (2005).**

© 2004 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Rhéologie ; Vibrations ; Amortissement ; Modèles rhéologiques ; Mouvements propres ; Viscoélasticité

Keywords : Rheology ; Vibrations ; Damping ; Rheological models ; Eigenmotions ; Viscoelasticity

Adresse e-mail : muller@ccr.jussieu.fr (P. Muller).

1. Introduction

Dans une série d’articles (voir par exemple [1,2]), Adhikari et al. ont établi que, pour un système à N degrés de liberté avec amortissement *viscoélastique* gouverné par le système d’équations :

$$\underline{M}\ddot{\underline{x}}(t) + \int_{-\infty}^t \underline{a}(t-u)\dot{\underline{x}}(u) du + \underline{K}\underline{x}(t) = \underline{0} \tag{1}$$

la recherche de solutions propres de la forme $\underline{x}(t) \equiv \underline{x}_0 e^{st}$ conduit à $m = 2N + p$ valeurs de s qui engendrent m solutions indépendantes. Celles-ci sont soit amorties sans oscillations, soit oscillantes amorties, la répartition exacte entre les deux types de solution n’a pas été précisée.

Dans le cas d’un système à N degrés de liberté avec amortissement *visqueux classique*, Bulatovic [3] a donné des conditions pour que les $2N$ mouvements propres soient tous amortis sans oscillation.

Enfin, le cas d’un système à $N = 1$ degré de liberté avec amortissement *viscoélastique*, le cas $n = 1$ (ressort viscoélastique à 3 paramètres de type solide [4]) a été étudié par Muller [5].

2. Les systèmes viscoélastiques à 1 D.D.L. et leurs solutions propres

On étend ici l’investigation précédente au cas d’un système à $N = 1$ degré de liberté $x(t)$ constitué d’une masse m et d’un ressort viscoélastique à n paramètres (modèle de Biot [6]). Voir Fig. 1.

Les mouvements libres d’un tel système (où la force excitatrice $f(t)$ est donc nulle) sont gouvernés par une équation qui s’écrit, si l’on introduit le *module de relaxation* $k(t)$ du ressort viscoélastique :

$$m\ddot{x}(t) + \int_{-\infty}^t k(t-u)\dot{x}(u) du = 0 \tag{2}$$

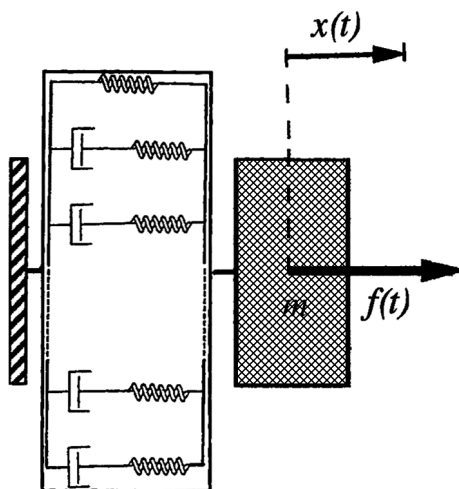


Fig. 1. Les systèmes étudiés.

Fig. 1. Systems considered.

La recherche de solutions propres de la forme $x(t) \propto e^{st}$ conduit à l'équation en s suivante :

$$ms^2 e^{st} + \int_{-\infty}^t k(t-u)s e^{su} du = 0 \tag{3}$$

En effectuant le changement de variable $t - u = v$, il vient sans difficulté :

$$\int_{-\infty}^t k(t-u)s e^{su} du = s \int_{-\infty}^t k(t-u) e^{su} du = s \int_{v=\infty}^{v=0} k(v) e^{s(t-v)} d(-v) = e^{st} s \int_0^{\infty} k(v) e^{-sv} dv = e^{st} k^*(s) \tag{4}$$

où apparaît la transformée de Laplace–Carson $k^*(s) = s \int_0^{\infty} k(v) e^{-sv} dv$ du module de relaxation $k(t)$.

Après simplification par e^{st} , l'équation déterminant les valeurs de s s'écrit donc :

$$ms^2 + k^*(s) = 0 \tag{5}$$

3. Cas des modèles viscoélastiques à n paramètres

En appliquant les lois d'assemblage série-parallèle des éléments des modèles rhéologiques, on établit immédiatement que le module de relaxation $k(t)$ du modèle à $2n + 1$ paramètres représenté Fig. 2 dans sa version « relaxation » (n branches-séries à 2 paramètres de type « Maxwell » en parallèle sur un ressort élastique de raideur k_{∞}), se présente sous la forme de la série de Prony suivante :

$$k(t) = k_{\infty} + \sum_{i=1}^n k_i e^{-t/\tau_i} \tag{6}$$

avec des constantes physiques telles que :

$$k_{\infty} > 0, \quad k_i > 0, \quad \tau_i = \frac{a_i}{k_i} > 0, \quad k_0 = k_{\infty} + \sum_{i=1}^n k_i > k_{\infty} > 0 \tag{7}$$

La transformée de Laplace–Carson $k^*(s)$ du module $k(t)$ donné par (6) a l'expression suivante :

$$k^*(s) \equiv k_{\infty} + \sum_{i=1}^n k_i \frac{s}{s + 1/\tau_i} \tag{8}$$

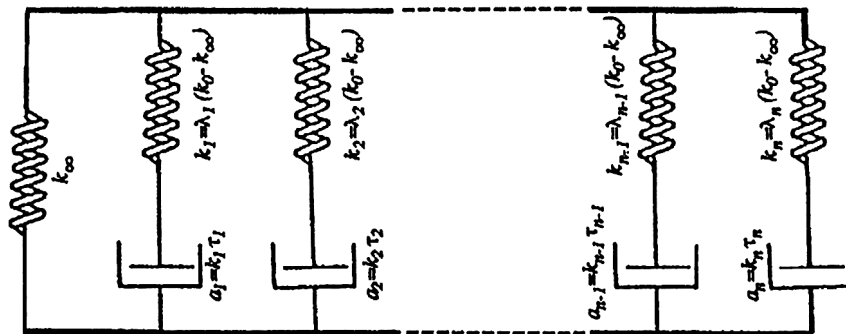


Fig. 2. Modèle rhéologique de Biot à $2n + 1$ paramètres.

Fig. 2. Biot's rheological model with $2n + 1$ parameters.

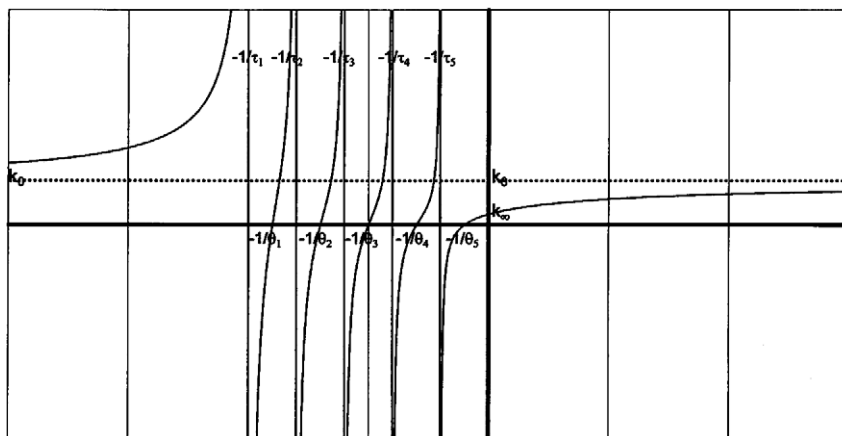


Fig. 3. Allure de $k^*(s)$ (modèle rhéologique $n = 5$ à 11 paramètres).
 Fig. 3. Aspect of $k^*(s)$ (rheological model with $n = 5$ to 11 parameters).

qui, par réduction au même dénominateur, se met tout aussi bien sous la forme équivalente :

$$k^*(s) = k_0 \frac{(s + 1/\theta_1)(s + 1/\theta_2) \dots (s + 1/\theta_n)}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2) \dots (s + 1/\tau_n)} \tag{9}$$

où l'on a mis en évidence les *temps de relaxation* τ_i et de *retard* θ_i « rhéologiques » du modèle. Ces temps seront supposés numérotés du plus petit ($i = 1$) au plus grand ($i = n$).

Lorsque s est réel, $k^*(s)$, en tant que somme (8) de fonctions strictement croissantes de s , est elle-même strictement croissante en s : ses pôles et ses zéros sont disposés en alternance, c'est-à-dire vérifient :

$$-\frac{1}{\tau_1} < -\frac{1}{\theta_1} < -\frac{1}{\tau_2} < -\frac{1}{\theta_2} < \dots < -\frac{1}{\tau_n} < -\frac{1}{\theta_n} \tag{10}$$

(voir Fig. 3). Les temps de relaxation et de retard sont donc intercalés de la manière suivante :

$$\tau_1 < \theta_1 < \tau_2 < \theta_2 < \dots < \tau_n < \theta_n \tag{11}$$

4. Mouvements propres

Les solutions propres (vibrations libres) d'un tel système sont donc de la forme $x(t) \cong e^{st}$, s étant, d'après (5) et (9), solution s_i de l'équation caractéristique suivante :

$$ms^2 + k_0 \frac{(s + 1/\theta_1)(s + 1/\theta_2) \dots (s + 1/\theta_n)}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2) \dots (s + 1/\tau_n)} = 0 \tag{12}$$

(où, rappelons-le, toutes les constantes introduites – m, k_0, τ_i, θ_i – sont strictement positives). L'équation précédente est équivalente ($s_i \neq -1/\tau_i$) au polynôme caractéristique de degré $n + 2$ suivant :

$$ms^2 \left(s + \frac{1}{\tau_1}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_2}\right) \dots \left(s + \frac{1}{\tau_n}\right) + k_0 \left(s + \frac{1}{\theta_1}\right) \left(s + \frac{1}{\theta_2}\right) \dots \left(s + \frac{1}{\theta_n}\right) = 0 \tag{13}$$

dont n racines réelles négatives sont données, pour s réel, par les intersections des deux courbes :

$$k^*(s) = k_0 \frac{(s + 1/\theta_1)(s + 1/\theta_2) \dots (s + 1/\theta_n)}{(s + 1/\tau_1)(s + 1/\tau_2) \dots (s + 1/\tau_n)} \cap y(s) = -ms^2 \tag{14}$$

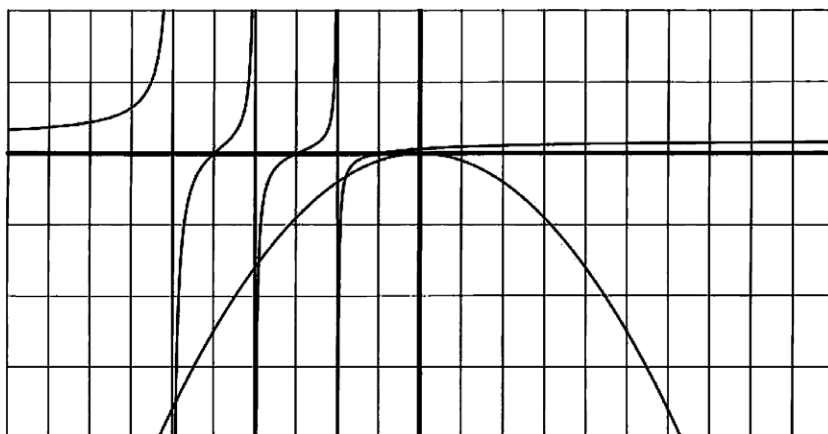


Fig. 4. Exemple 1. Modèle rhéologique à 7 paramètres : 3 racines réelles négatives (et donc 2 racines complexes conjuguées).

Fig. 4. Example 1. Rheological model with 7 parameters: 3 real negative roots (and, thus, 2 complex conjugate roots).

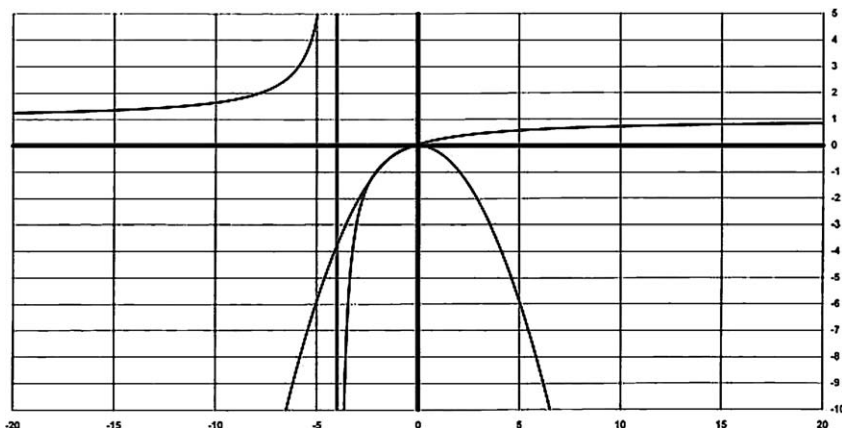


Fig. 5. Exemple 2. Modèle rhéologique à 3 paramètres : 3 racines réelles négatives (voir zoom au voisinage de 0 sur la Fig. 6).

Fig. 5. Example 2. Rheological model with 3 parameters: 3 real negative roots (see zoom in the neighbourhood of 0 in Fig. 6).

En effet (voir Fig. 4), dans chacun des n intervalles

$$\left[-\frac{1}{\theta_1}, -\frac{1}{\theta_2}\right], \left[-\frac{1}{\theta_2}, -\frac{1}{\theta_3}\right], \dots, \left[-\frac{1}{\theta_n}, 0\right] \tag{15}$$

où s est négatif, la courbe $k^*(s)$ est continue et strictement croissante. La parabole $y(s)$, également continue et croissante, « entre » (à gauche) au-dessus de $k^*(s)$ et « sort » (à droite) en-dessous de $k^*(s)$. Il y a donc, dans chacun de ces n intervalles, au moins une intersection entre ces deux courbes, soit déjà au moins n racines réelles négatives.

Comme l'Éq. (13) a au plus $n + 2$ racines réelles, il peut en outre y avoir ou non, dans l'un au plus de ces n intervalles, 3 intersections.

Les deux exemples représentés Figs. 4 à 6 illustrent ces résultats :

- d'une part dans le cas d'un modèle rhéologique à 7 paramètres ($n = 3$) conduisant à 3 racines réelles parmi les $n + 2 = 5$ racines (auxquelles s'ajoutent donc 2 racines complexes conjuguées) ;

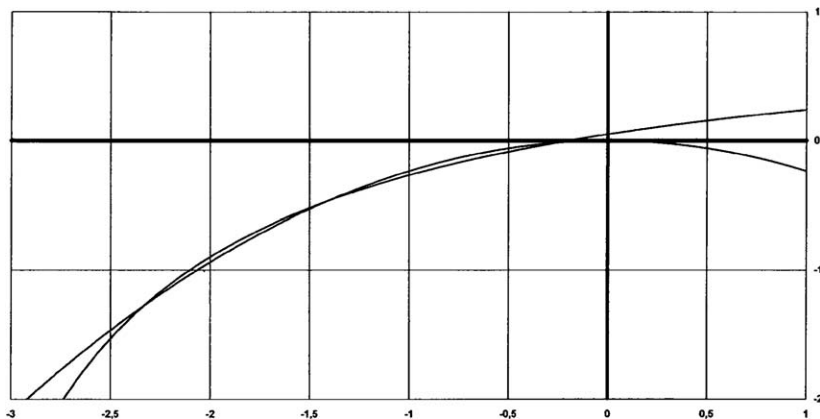


Fig. 6. Exemple 2. Modèle rhéologique à 3 paramètres, 3 racines réelles : zoom au voisinage de 0.

Fig. 6. Example 2. Rheological model with 3 parameters, 3 real negative roots: zoom in the vicinity of 0.

– d’autre part dans le cas d’un modèle rhéologique à 3 paramètres ($n = 1$) conduisant à $n + 2 = 3$ racines réelles négatives.

On notera que les n racines réelles considérées (que nous noterons $s_i = -1/\tau'_i$) sont telles (voir l’intersection des courbes sur la Fig. 4) que les n temps de décroissance *structuraux* τ'_i vérifient :

$$-\frac{1}{\tau_i} < -\frac{1}{\tau'_i} < -\frac{1}{\theta_i} \quad \Leftrightarrow \quad \tau_i < \tau'_i < \theta_i \tag{16}$$

Ayant exhibé ces n racines réelles négatives $s_i = -1/\tau'_i$, le polynôme caractéristique de degré $n + 2$ peut alors être (après division par la masse m) factorisé sous la forme :

$$(s^2 + 2\delta'\omega' + \omega'^2)\left(s + \frac{1}{\tau'_1}\right)\left(s + \frac{1}{\tau'_2}\right)\dots\left(s + \frac{1}{\tau'_n}\right) = 0 \tag{17}$$

les deux racines restantes conduisant alors soit à deux solutions oscillantes amorties (si $\delta' < 100\%$) soit à deux solutions amorties sans oscillation (si $\delta' > 100\%$), ce qui achève la démonstration de la proposition.

5. Conclusions

Les vibrations libres d’un oscillateur à $N = 1$ *d.d.l.* constitué d’une masse et d’un ressort viscoélastique correspondant à un modèle rhéologique à $2n + 1$ paramètres consistent en $n + 2$ solutions indépendantes. On a établi que, aux deux solutions libres amorties avec ou sans oscillations, bien connues dans le cas d’un amortissement visqueux classique (ressort viscoélastique de Kelvin–Voigt) viennent s’ajouter n solutions libres *amorties sans oscillations* introduites par la rhéologie viscoélastique.

Références

[1] S. Adhikari, Eigenrelations for nonviscously damped systems, *AIAA J.* 39 (8) (2001) 1624–1630.
 [2] S. Adhikari, Dynamics of nonviscously damped linear systems, *J. Engrg. Mech.* (2002) 328–339.
 [3] R.M. Bulatovic, On the heavily damped response in viscously damped dynamic systems, *J. Appl. Mech.* 71 (2004) 131–134.
 [4] W. Flügge, *Viscoelasticity*, Blaisdell, Waltham, MA, 1967.
 [5] P. Muller, Are the eigensolutions of a 1-d.o.f. system with viscoelastic damping oscillatory or not?, *J. Sound Vib.* (2004), à paraître.
 [6] M.A. Biot, Theory of stress strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena, *J. Appl. Phys.* 25 (1954) 1385–1391.