



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 333 (2005) 513–520



<http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/>

Frottements et pertes de pression des fluides non newtoniens dans des conduites non circulaires

Mohamed Mahfoud^{a,*}, Salah Benhadid^a, Michel Lebouché^b

^a *Équipe de rhéologie, laboratoire de mécanique des fluides théorique et appliquée, faculté de physique, B.P. 32, El Alia BAB, Ezzouar 16111, Alger, Algérie*

^b *Laboratoire d'énergétique et de mécanique théorique et appliquée, URA CNRS 875, 2, avenue de la forêt de la Haye, 54504 Vandœuvre-lès-Nancy, France*

Reçu le 9 février 2005 ; accepté le 25 février 2005

Disponible sur Internet le 10 mai 2005

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

L'étude de l'écoulement d'un fluide dans une conduite nécessite l'introduction de paramètres géométriques et de nombres sans dimensions permettant la corrélation et la comparaison des résultats expérimentaux. Pour les fluides newtoniens dans des configurations simples, la définition du nombre de Reynolds ne présente aucune difficulté, par contre dans le cas d'écoulement de fluides non newtoniens dans des conduites de formes quelconques, la variation de la viscosité apparente avec la vitesse de cisaillement nécessite une généralisation de ce nombre sans dimensions. Cette note propose une méthode générale valable pour une large classe de fluides non newtoniens et pour toutes les formes de conduite. Une application est développée pour un fluide viscoélastique s'écoulant dans une conduite de forme rectangulaire. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les corrélations connues. *Pour citer cet article : M. Mahfoud et al., C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Friction and pressure drop of non-Newtonian fluids through ducts of non-circular cross section. The study of fluid flow in a duct requires characteristic parameters of the flow and dimensionless numbers to correlate and compare experimental results. For Newtonian fluids in simple configurations, the definition of the Reynolds number is quite standard, but for non-Newtonian fluid flows in ducts with arbitrary shape of cross section, the dependence of the apparent viscosity with the shear rate requires a generalization of this dimensionless number. This note proposes a general method valid for a large class of non-Newtonian fluids and for all duct shapes. An application is developed for a viscoelastic flow through a rectangular duct. Results obtained in the present investigation are in a good agreement with available correlations. *To cite this article: M. Mahfoud et al., C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : mohmahfoud@yahoo.fr (M. Mahfoud).

Nomenclature

a, b	paramètres géométriques de la conduite de section quelconque	ox, oy	axes transversaux à la direction principale de l'écoulement
c, d	cotés de la section de la conduite de forme rectangulaire	oz	axe longitudinal ou axial dans le sens principal de l'écoulement
D	diamètre de la conduite circulaire	p	pression
D_H	diamètre hydraulique de la conduite	Δp	pertes de pression sur une longueur L
e	distance entre deux plans parallèles	Re, Re'	nombres de Reynolds
f	facteur de frottements	U_m	vitesse moyenne ou débitante
$f(\tau)$	fonction contrainte/viscosité	U_{max}	vitesse maximale sur l'axe de symétrie
k, n	consistance et indice de structure d'un fluide pseudoplastique d'Ostwald–de Waele	δ	rapport U_{max}/U_m
k', n'	consistance et indice de structure d'un fluide pseudoplastique quelconque	γ	vitesse de cisaillement
L	longueur de la conduite	η	viscosité dynamique du fluide
		ρ	masse volumique
		τ	contrainte de cisaillement
		τ_p	contrainte de cisaillement à la paroi

Mots-clés : Rhéologie ; Écoulement de fluide non newtonien ; Perte de pression ; Facteur de frottement ; Conduite non circulaire

Keywords : Rheology; Non-Newtonian fluid flow; Pressure drop; Friction factor; Non-circular duct

1. Introduction

Pour les besoins de corrélation des pertes de charge dues aux frottements, on utilise le facteur de frottement f défini par :

$$f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho(U_m)^2} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho(U_m)^2} \frac{D_H}{4L} \quad (1)$$

où Δp est la perte de charge pour une conduite de longueur L et D_H est le diamètre hydraulique.

Pour les écoulements de fluides newtoniens dans des conduites de formes simples (conduites circulaires, plans parallèles, ...) on peut trouver facilement une relation entre le facteur de frottement et le nombre de Reynolds. Par contre dans le cas des fluides complexes s'écoulant dans des conduites de section quelconque, la définition du nombre de Reynolds pose des problèmes et par conséquent le lien entre le facteur de frottement et le nombre de Reynolds est difficile à exprimer.

Dans cette Note nous reprenons la généralisation des relations, proposées au départ par Kozicki et al. [1], donnant les vitesses moyenne et maximale dans une conduite par l'introduction de deux paramètres géométriques. Cette généralisation a été reprise par Miller [2] et par Machac et al. [3] avec l'introduction d'un seul paramètre géométrique. Ces paramètres géométriques apparaissent, par la suite, dans l'expression du nombre de Reynolds. La complexité des écoulements des fluides dans des conduites de forme quelconque rend souvent impossible la détermination de ces paramètres analytiquement. La procédure de détermination expérimentale de ces paramètres géométriques et des caractéristiques rhéologiques du fluide, exposée dans cette note, permet d'envisager son application à toutes les configurations possibles et de corréliser ensuite les frottements pariétaux.

2. Analyse théorique

On montre qu'il existe toujours, en régime laminaire établi, une relation fonctionnelle entre la contrainte à la paroi d'une part et la vitesse moyenne ou la vitesse maximale d'autre part, quelles que soient la forme de la conduite et la loi de comportement du fluide.

Pour des conduites circulaires de diamètre D , le bilan des forces donne, en projection sur l'axe principal d'écoulement, l'équation de Rabinowitsch, liant la vitesse moyenne U_m à la contrainte à la paroi τ_p [4] :

$$\frac{2U_m}{D} = \frac{1}{\tau_p^3} \int_0^{\tau_p} \tau^2 f(\tau) d\tau \quad (2)$$

On peut aussi montrer que l'équation donnant la vitesse maximale U_{\max} sur l'axe principal d'écoulement peut s'écrire :

$$\frac{2U_{\max}}{D} = \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} f(\tau) d\tau \quad (3)$$

Dans ces relations, la fonction $f(\tau)$ définit la loi comportement du fluide et elle est donnée par $f(\tau) = \gamma = \frac{\tau}{\eta}$, où η est la viscosité non newtonienne du fluide.

Dans le cas d'un fluide newtonien, la viscosité dynamique du fluide η est indépendante de la vitesse de cisaillement γ et le facteur de frottement f est relié au nombre de Reynolds Re par :

$$f = \frac{16}{Re} \quad \text{avec} \quad Re = \frac{\rho U_m D}{\eta} \quad (4)$$

La considération des écoulements entre deux plans parallèles semi-infinis permet de retrouver, par des calculs simples, des relations analogues à (2), (3) et (4).

Si on examine les expressions de Rabinowitsch dans les configurations simples connues (conduites circulaires, plans parallèles semi-infinis . . .) on peut déduire, en introduisant deux paramètres géométriques a et b , une relation générale valable pour toute forme de conduite sous la forme suivante [1] :

$$\frac{8U_m}{D_H} = \frac{1}{a} \frac{1}{\tau_p^{b/a}} \int_0^{\tau_p} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau \quad (5)$$

Dans des conduites circulaires de diamètre D , on a $D_H = D$, $a = 1/4$ et $b = 3/4$ alors que pour une conduite formée par deux plans parallèles semi-infinis distants de e , on a $D_H = 2e$, $a = 1/2$ et $b = 1$.

De la même façon, les relations donnant les vitesses maximales peuvent se réduire à :

$$\frac{8U_{\max}}{D_H} = \frac{1}{a} \frac{1}{\tau_p} \int_0^{\tau_p} f(\tau) d\tau \quad (6)$$

L'inconvénient de ces relations provient souvent de la difficulté de connaître les paramètres a et b propres à une conduite de forme complexe et de la postulation d'une forme mathématique de la loi de comportement $f(\tau)$. Or cette loi n'est utilisable que sur le domaine réellement expérimenté et toute extrapolation peut conduire à des erreurs sérieuses. Un mauvais choix de la loi de comportement peut même générer des écarts assez importants sur les valeurs du facteur de frottement f d'après une étude numérique effectuée par Park et al. [5].

La différentiation de la relation (5) par rapport à τ_p donne l'équation suivante :

$$f(\tau_p) = a\tau_p \frac{\delta(8U_m/D_H)}{\delta\tau_p} + b \left(\frac{8U_m}{D_H} \right) \quad (7)$$

La même opération sur la relation (6) nous donne l'équation suivante :

$$f(\tau_p) = a\tau_p \frac{\delta(8U_{\max}/D_H)}{\delta\tau_p} + a \left(\frac{8U_{\max}}{D_H} \right) \tag{8}$$

Les deux paramètres a et b , qui sont indépendants des caractéristiques rhéologiques du fluide, peuvent être déterminés par la résolution du système d'équations formé par les deux Éqs. (7) et (8). Pour cela, on peut d'abord utiliser un fluide newtonien connu dans la configuration considérée. Par les mesures des frottements pariétaux des vitesses moyenne et maximale on peut déduire expérimentalement les paramètres géométriques a et b . Un fois ces paramètres déterminés, on peut considérer l'écoulement du fluide non newtonien dans la même configuration et envisager le calcul des pertes de charge. Cette démarche va être illustrée plus loin.

2.1. Etude des frottements

Il est possible d'établir une expression générale du nombre de Reynolds valable pour tous les fluides dont la loi de comportement ne dépend pas du temps. On peut notamment envisager des lois de comportement qui n'ont pas une forme algébrique et s'appuyer uniquement sur des formes expérimentales.

Une analogie avec le cas des écoulements de fluides newtoniens dans les conduites circulaires exposé précédemment (relation (4)), permet de garder la même forme de relation entre le coefficient de frottement f et le nombre de Reynolds en faisant intervenir un nombre de Reynolds généralisé Re' [1,6,7]. On écrit :

$$f = \frac{\Delta p}{\rho U_m^2} \frac{D_H}{2L} = \frac{16}{Re'} \quad \text{avec } Re' = \frac{\rho U_m^{2-n'} D_H^{n'}}{8^{n'-1} k'} \tag{9}$$

où n' et k' sont deux paramètres définis par :

$$n' = \frac{\delta(\ln \tau_p)}{\delta(\ln(8U_m/D_H))} \quad \text{et} \quad \tau_p = k' \left(\frac{8U_m}{D_H} \right)^{n'} \tag{10}$$

On obtient explicitement n' et k' , en utilisant la relation de Rabinowitsch (5). On trouve que n' et k' sont donnés par :

$$n' = \frac{\int_0^{\tau_p} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau}{\tau_p^{b/a} f(\tau_p) - \frac{b}{a} \int_0^{\tau_p} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau} \quad \text{et} \quad k' = a^{n'} \tau_p^{bn'/a+1} \left[\int_0^{\tau_p} \tau^{b/a-1} f(\tau) d\tau \right]^{-n'} \tag{11}$$

L'application de ces résultats au fluide pseudoplastique caractérisé par une loi de puissance d'Ostwald–de Waele de la forme $\tau = k\gamma^n$ donne, en partant des Éqs. (11), les expressions suivantes :

$$n' = n \quad \text{et} \quad k' = k \left(\frac{a + bn}{n} \right)^n \quad \text{avec } Re' = \frac{\rho U_m^{2-n} D_H^n}{8^{n-1} k(a + bn/n)^n} \tag{12}$$

où n et k sont respectivement l'indice de structure et la consistance du fluide.

Ces relations montrent que, pour un écoulement de fluide d'Ostwald–de Waele dans une conduite de section quelconque, k' et Re' dépendent de la forme de la section par l'intermédiaire des paramètres a et b tandis que n' est égal à n quel que soit la forme de la section. Ceci permet l'utilisation d'une conduite circulaire pour la détermination de l'indice de structure n du fluide. Le résultat ($n' = n$) est important car les expressions (10) et (11) sont sensiblement plus compliquées. Si on trace $\ln(\tau_p)$ en fonction de $\ln(8U_m/D_H)$, on doit obtenir dans ce cas des droites parallèles quelle que soit la forme de la section de la conduite.

Par analogie avec les fluides newtoniens le nombre Re' peut aussi être utilisé pour définir un critère de transition laminaire-turbulent dans le cas d'un fluide non-newtonien s'écoulant dans une conduite de section quelconque.

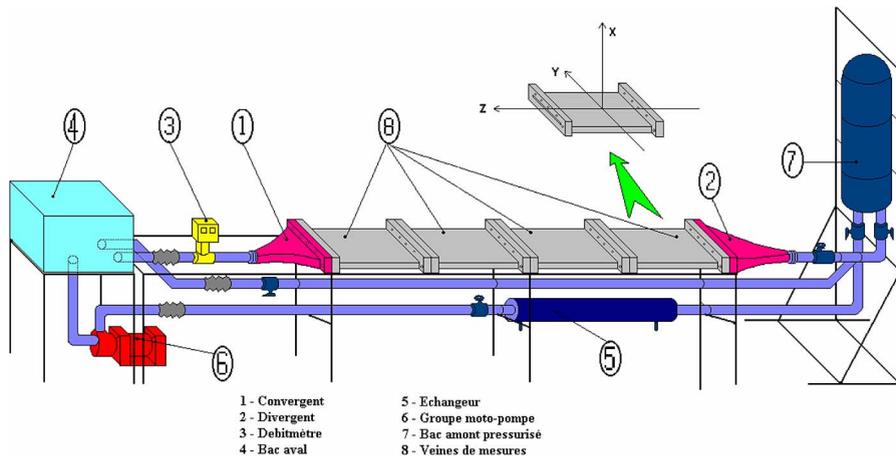


Fig. 1. Schéma général du dispositif expérimental.

Fig. 1. Diagram of the experimental device.

3. Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est constitué des éléments suivants :

- Une boucle hydraulique fermée [8,9] constituée d'un bac amont pressurisé et d'un bac aval à la pression atmosphérique (Fig. 1). L'écoulement du fluide test est assuré par un groupe motopompe à vitesse variable et la température de travail est de 24 °C. La veine de mesures représentant la conduite d'écoulement de section rectangulaire de cotés c et d , en polyméthylméthacrylate transparent (PMMA), a une longueur totale de 200 cm. Sur la veine de mesures d'axe principal oz , nous avons placé des prises de pression pour la mesure des pertes de pression Δp .
 - conduite A avec $c \times d = 20 \times 200 \text{ mm}^2$, $D_H = 36,4 \text{ mm}$ et $c/d = 0,1$,
 - conduite B avec $c \times d = 20 \times 50 \text{ mm}^2$, $D_H = 28,6 \text{ mm}$ et $c/d = 0,4$.
- Deux conduites capillaires circulaires pour la détermination des caractéristiques rhéologiques du fluide.
 - une conduite capillaire de diamètre $D = 5 \text{ mm}$,
 - une conduite capillaire de diamètre $D = 9,5 \text{ mm}$.
- Une chaîne de vélocimétrie Laser à effet Doppler pour la mesure de la vitesse maximale U_{\max} . Elle est constituée d'une source laser He/Ne de longueur d'onde 632,8 nm et de puissance 10 mW et d'un système d'acquisition des données brutes, le tout relié à un micro-ordinateur pour l'analyse et le traitement des résultats.
- Un fluide newtonien étalon connu (eau) et un autre fluide non newtonien de comportement viscoélastique [10,11]. Ce second fluide est une solution aqueuse de polyacrylamide (Séparan AP-30) à 0,2 % en masse. Nous avons opté pour ces deux fluides pour leur stabilité et leur transparence pour les besoins de mesures par vélocimétrie Laser. L'indice de réfraction de la solution utilisée est de 1,3325 et sa masse volumique ρ est voisine de celle de l'eau.

4. Résultats expérimentaux

La méthode proposée plus haut utilise le concept de deux paramètres géométriques pour caractériser la géométrie de l'écoulement et qui réduit les calculs plus conventionnels. Cette méthode est illustrée dans le cas d'un écoulement isotherme, permanent, établi et laminaire d'un fluide viscoélastique dans une conduite de section rectangulaire.

4.1. Calcul des paramètres géométriques et des caractéristiques rhéologiques

Pour le fluide newtonien la viscosité dynamique η est une constante et la fonction de contrainte $f(\tau)$ se réduit dans ce cas à $f(\tau_p) = \tau_p/\eta$.

Sa substitution dans le système d'équations précédent (relations (7) et (8)) donne un système d'équations à deux inconnues (paramètres a et b) dont la résolution conduit à :

$$a = \frac{\tau_p}{2\eta 8U_{\max}/D_H} \quad \text{et} \quad a + b = \frac{\tau_p}{\eta 8U_m/D_H} \quad (13)$$

Les mesures expérimentales des pertes de pression et du débit volumique du fluide newtonien (eau) nous permettent de déduire respectivement le frottement pariétal τ_p et la vitesse moyenne U_m . La vitesse maximale U_{\max} est relevée directement à l'aide de la vélocimétrie Laser à effet Doppler.

Les résultats obtenus avec le fluide newtonien dans les deux configurations sont présentés dans les Figs. 2 et 3. On tire les valeurs suivantes des paramètres a et b :

- conduite A $a = 0,4132$ et $b = 0,8262$,
- conduite B $a = 0,2551$ et $b = 0,5109$.

Afin d'éviter les erreurs notées par Park et al. [5], nous avons utilisé un viscosimètre capillaire (les deux conduites circulaires) car il génère un écoulement de type « Poiseuille » identique à celui existant dans une conduite de section quelconque et nous avons imposé une plage de taux de cisaillement adéquate. Les mesures des pertes de charge du fluide non newtonien dans les deux conduites capillaires donnent la Fig. 4. D'après l'analyse théorique, dans le domaine où la courbe $\ln(\tau_p)$ en fonction de $\ln(8U_m/D_H)$ est linéaire, le comportement du fluide est pseudoplastique de type « Ostwald–de Waele ». Sur cette figure, on note que sur une grande partie du domaine exploré n' est le même pour les deux conduites capillaires et la valeur de n' est donnée par la pente à la courbe, soit $n' = n = 0,653$. Cela signifie que la solution polymérique utilisée [12], de nature viscoélastique, a le comportement d'un fluide d'Ostwald–de Waele dans les conditions expérimentales régnantes dans ces conduites capillaires et qui sont semblables à celles de la conduite rectangulaire. Le calcul de la consistance de ce fluide donne $k = 0,655$.

A titre de comparaison, on a représenté sur la Fig. 4 les mesures données par un viscosimètre à cylindres coaxiaux avec un rapport de rayons intérieur/extérieur = 3 mm/3,25 mm. On note que la courbe reste linéaire sur une grande partie du domaine exploré pour ce deuxième type d'écoulement (écoulement de Couette) ; mais la pente de la courbe passe de 0,653 à 0,438. Ce fluide, de type pseudoplastique en écoulement permanent, a un

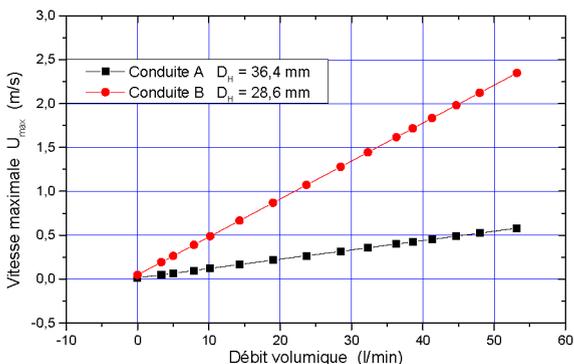


Fig. 2. Vitesse maximale U_{\max} en fonction du débit volumique dans les conduites rectangulaires.

Fig. 2. Maximum velocity U_{\max} versus volumetric flow rate through the rectangular ducts.

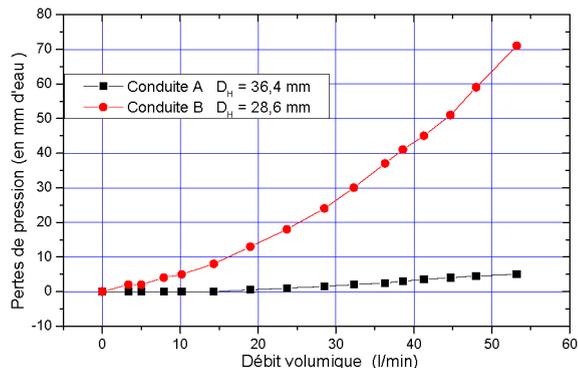


Fig. 3. Pertes de pression en fonction du débit volumique dans les deux conduites rectangulaires.

Fig. 3. Pressure drop versus volumetric flow rate through the two rectangular ducts.

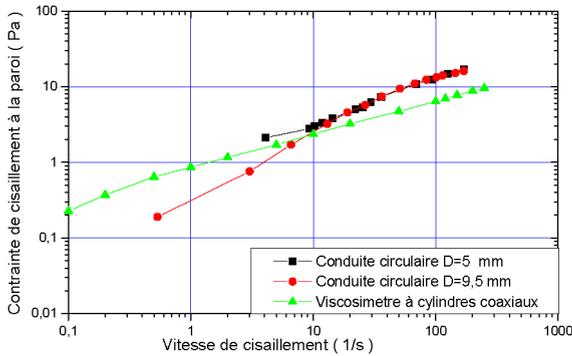


Fig. 4. Contrainte pariétale en fonction de la vitesse de cisaillement pour le fluide non newtonien.

Fig. 4. Shear stress versus shear rate through the rectangular ducts for a non-Newtonian fluid.

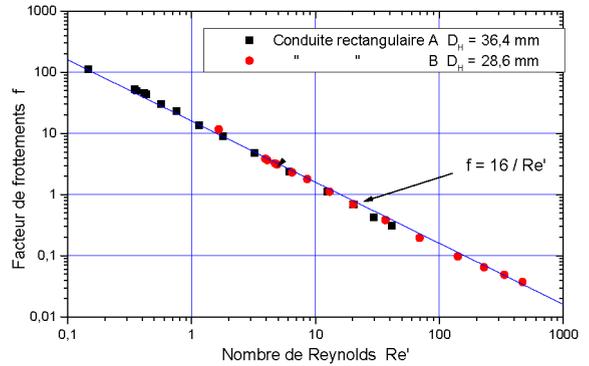


Fig. 5. Facteur de frottements f en fonction du nombre de Reynolds Re' dans les conduites rectangulaires.

Fig. 5. Friction factor versus Reynolds number Re' through the rectangular ducts.

comportement plus fluidifiant dans un écoulement de Poiseuille que dans un écoulement de Couette. Ceci nous a poussé à caractériser le fluide utilisé à l'aide d'une conduite capillaire.

4.2. Corrélation des résultats expérimentaux

Les mesures des pertes de pression Δp sur une longueur L de la conduite permettent, de déduire les frottements τ_p dus au fluide non newtonien dans les deux conduites rectangulaires et de tracer les courbes de la Fig. 5. Dans le domaine exploré, le comportement du fluide est pseudoplastique de type Ostwald-de Waele et le nombre de Reynolds Re' est calculé par la relation (12). On note, sur cette figure, que les courbes sont parfaitement linéaires sur tout le domaine exploré et les résultats expérimentaux sont bien corrélés par la relation :

$$f = \frac{16}{Re'} \tag{14}$$

L'accord entre les résultats expérimentaux et la théorie est donc réalisé. La relation (14) permet de corréler correctement les frottements dus à un fluide non newtonien s'écoulant dans une conduite rectangulaire à condition de bien préciser les paramètres géométriques de la conduite et les caractéristiques rhéologiques du fluide nécessaires au calcul du nombre de Reynolds généralisé Re' .

L'écart moyen entre les valeurs expérimentales du facteur de frottement f et les valeurs prévues par la relation (14) est de 4,2 % et la valeur maximale du nombre de Reynolds Re' obtenue dans l'écoulement du fluide non newtonien est inférieure à 1000. Par conséquent, nous sommes loin de la valeur critique de transition de l'écoulement dans la configuration utilisée et que toutes les mesures prises se situent dans le régime laminaire.

Une intégration analytique des relations (5) et (6) donne, dans le cas d'une loi puissance, les expressions suivantes :

$$\frac{8U_m}{D_H} = \frac{n}{(a + bn)} \left(\frac{\tau_p}{k} \right)^{1/n} \quad \text{et} \quad \frac{8U_{max}}{D_H} = \frac{n}{a(n + 1)} \left(\frac{\tau_p}{k} \right)^{1/n} \tag{15}$$

d'où l'on tire

$$U_{max} = \frac{a + bn}{a(n + 1)} U_m \tag{16}$$

et on définit le rapport δ par

$$\delta = \frac{U_{max}}{U_m} = \frac{a + bn}{a(n + 1)} \tag{17}$$

Tableau 1
Les valeurs analytiques du rapport δ

Table 1
Analytical values for the ratio δ

	Fluide newtonien	Fluide non newtonien (loi puissance)
Conduites circulaires	2	2,2099 \approx 2,2
Deux plans parallèles infinis	3/2	1,6050 \approx 1,6
Conduite A	1,4998 \approx 1,5	1,6047 \approx 1,6
Conduite B	1,5004 \approx 1,5	1,6054 \approx 1,6

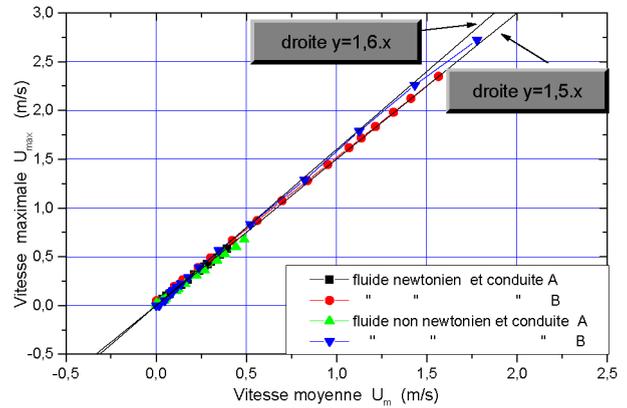


Fig. 6. Vitesse maximale en fonction de la vitesse moyenne.

Fig. 6. Maximum velocity versus mean velocity.

La relation (16) nous donne un moyen très pratique de calcul de la vitesse maximale dans une conduite de forme quelconque et traversée par un fluide non newtonien pseudoplastique. Les valeurs analytiques du rapport δ tirées de la relation (17) sont consignées dans le Tableau 1. Les valeurs expérimentales obtenues dans les deux conduites A et B et traduisant la relation (16) sont représentées par la Fig. 6. Un évaluation de l'erreur relatif sur le rapport δ ($(\delta_{\text{analytique}} - \delta_{\text{expérimental}})/\delta_{\text{analytique}}$) nous donne une valeur ne dépassant pas les 6,5 %.

5. Conclusion

La généralisation de la relation de Rabinowitsch et de celle donnant la vitesse maximale est possible et peut être appliquée à de fluides caractérisés par des lois de comportement indépendantes du temps. La corrélation généralisée entre le facteur de frottement et le nombre de Reynolds peut être appliquée à toute forme de section. Une seule relation suffit pour corrélérer, dans la zone d'écoulement laminaire, le facteur de frottement f et le nouveau nombre de Reynolds généralisé Re' . L'introduction des deux paramètres géométriques a et b élargit le champ d'application des corrélations déjà connues. Les paramètres géométriques peuvent être évalués dans chaque situation par des mesures expérimentales obtenues en utilisant tout simplement des fluides newtoniens. Une fois les paramètres géométriques évalués, le calcul des pertes de charge ou des vitesses moyenne et maximale est facilement effectué pour tout autre fluide complexe.

Références

- [1] W. Kozicki, C.H. Chou, C. Tiu, Non Newtonian flow in ducts of arbitrary cross sectional shape, *Chem. Eng. Sci.* 21 (1966) 665–679.
- [2] C. Miller, Predicting non-Newtonian flow behaviour in ducts of unusual cross section, *Ind. Eng. Chem. Fundam.* 11 (1972) 534–628.
- [3] I. Machac, P. Dolecek, L. Machacova, Poiseuille flow of purely viscous non-Newtonian fluids through ducts of non-circular cross sections, *Chem. Eng. and Process.* 38 (1999) 143–148.
- [4] N. Midoux, *Mécanique et rhéologie des fluides en génie chimique*, 2e édition, Technique et Documentation – Lavoisier, Paris, 1988, p. 159.
- [5] S. Park, D.R. Lee, Predictions of pressure drop for modified power law fluids in conduits of three different cross-sectional shapes, *Chem. Eng. Chem. Sci.* 57 (2002) 1057–1067.
- [6] R.I. Tanner, *Engineering Rheology*, 2e édition, Oxford Science Publications, 1985, p. 387.
- [7] M.P. Esculier, S. Smith, Fully developed turbulent flow of non-Newtonian liquids, in: 10th Int. Symp. on Application of Laser Techniques to Fluids Mechanics, IST – Lisbon, 2000.
- [8] M. Mahfoud, S. Benhadid, Etude de l'écoulement dans une contraction brusque, *Rhéologie* 1 (2002) 26–34.
- [9] M. Mahfoud, S. Benhadid, Etude de l'écoulement dans une contraction brusque, in: 36e colloque annuel de rhéologie, Paris, 2001.
- [10] P.J. Hamersma, J. Ellenberger, J.H.M. Fortuin, A three-parameter model describing the behaviour of a viscoelastic liquid in a tangential annular flow, *Rheol. Acta* 21 (6) (1982) 705–712.
- [11] M. Mahfoud, S. Benhadid, Comportement d'un polymère dans une singularité, in: Congrès Matériaux, Tours, 2002.
- [12] D.D. Joseph, *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*, *Appl. Math. Sci.*, vol. 84, Springer-Verlag, New York, 1990, p. 539.