



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

C. R. Mecanique 333 (2005) 439–445



<http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/>

Microstructures réalisant toute compressibilité ou conductivité encadrée par les bornes de Hashin et Shtrikman

Qi-Chang He *, Hung Le Quang

Laboratoire de mécanique, université de Marne-la-Vallée, Institut Navier, 19, rue Nobel, 77420 Champs sur Marne, France

Reçu le 18 mars 2005 ; accepté après révision le 29 mars 2005

Présenté par André Zaoui

Résumé

La compressibilité ou conductivité d'un matériau composite isotrope constitué de deux phases isotropes « bien ordonnées » est encadrée par les bornes inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman. Ce travail consiste à construire deux nouvelles microstructures pouvant réaliser toute compressibilité ou conductivité comprise entre ces dernières. Les deux microstructures obtenues, plus simples que celles présentées dans la littérature pour atteindre le même objectif, ont la propriété que la variation de la compressibilité ou conductivité correspondante est strictement monotone par rapport au paramètre géométrique qui les caractérise. *Pour citer cet article : Q.-C. He, H.L. Quang, C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Microstructures for the realization of every compressibility or conductivity between the bounds of Hashin and Shtrikman. The conductivity or bulk modulus of an isotropic composite consisting of two well-ordered isotropic phases is situated between the lower and upper bounds of Hashin and Shtrikman. This work is concerned with the construction of two new microstructures capable of realizing every conductivity or bulk modulus comprised between these bounds. The two microstructures obtained, appearing to be simpler than those presented in the literature to achieve the same purpose, have the property that the variation of the corresponding conductivity or bulk modulus is strictly monotone with respect to the geometric parameter characterizing them. *To cite this article: Q.-C. He, H.L. Quang, C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides ; Module de compressibilité ; Conductivité ; Bornes ; Microstructures

Keywords: Solid mechanics; Bulk modulus; Conductivity; Bounds; Microstructures

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : he@univ-mlv.fr (Q.-C. He).

Abridged English version

The composite under consideration is an isotropic material consisting of two isotropic phases. The bulk and shear moduli, κ_1 and μ_1 , of phase 1 with volume fraction c_1 are assumed to be larger than the respective ones, κ_2 and μ_2 , of phase 2 with volume fraction $c_2 = 1 - c_1$. Then, the effective bulk modulus κ^* of the composite is bounded by (1). In the latter, κ_-^{HS} and κ_+^{HS} are the lower and upper bounds of Hashin and Shtrikman [2], which are specified by (2). Even though the optimality of these bounds was proved almost when they were established, the problem of realizing every compressibility situated between them was investigated much later (Milgrom and Shtrikman, [4]; Gilormini, [5]; He and Benveniste, [6]). The present Note proposes two novel microstructures which result from a direct modification of the composite sphere assemblage (CSA) of Hashin [3] and Hashin and Shtrikman [1], and which can materialize all compressibility aforementioned.

The upper bound κ_+^{HS} is reached by a CSA in which the coating and core are made of phases 1 and 2, respectively (Fig. 1(a)). The lower bound κ_-^{HS} is achieved by a CSA in which the coating and core consist of phases 2 and 1, respectively (Fig. 1(b)). To realize a compressibility κ^* situated between κ_-^{HS} and κ_+^{HS} and specified by (3) with $\alpha \in [0, 1]$, we consider a doubly coated CSA (Fig. 2) in which phase 1 is both in the core and outer coating and phase 2 is only in the intermediate coating. The radii r_1 , r_2 and r_3 must comply with (4), so that the volume fractions of phases 1 and 2 are equal to c_1 and c_2 . In particular, the volume fraction of phase 1 is the sum of the one $c'_1 = \beta c_1$ of the core and the one $c''_1 = (1 - \beta)c_1$ of the outer coating. The geometrical parameter β varies between 0 and 1.

The effective bulk modulus κ of a doubly coated CSA is given by (5). This expression can be obtained via the one (2)₂ of κ_+^{HS} in which c_1 is replaced by $(1 - \beta)c_1$, c_2 by $c_2 + \beta c_1$, and k_2 by (6). For more details, the reader refers to Milton ([7], Section 7.2) or Hervé and Zaoui [8]. Starting from (5), we can show (7) which, under the assumption that $\kappa_1 > \kappa_2$ and $\mu_1 > \mu_2$, implies (8). Thus, it is proved that the compressibility κ of a doubly coated CSA is a *strictly decreasing function* of β . On the other hand, it is easy to check that $\kappa = \kappa_+^{\text{HS}}$ when $\beta = 0$ and $\kappa = \kappa_-^{\text{HS}}$ when $\beta = 1$. So, to every value of κ^* given by (1) is associated a unique value of β such that the effective compressibility κ of the corresponding doubly coated CSA is exactly equal to κ^* . More precisely, setting (9) and accounting for (3) and (5), we obtain (10). It can be shown that $d\beta/d\alpha > 0$, i.e. β is a *strictly increasing function* of α . When α or β varies from 0 to 1, all the conductivities between κ_+^{HS} and κ_-^{HS} are scanned in a continuous and monotone way.

Another microstructure is obtained by using the one of Fig. 2, in which phase 1 occupies only the intermediate coating while phase 2 occupies both the core and outer coating. In this case, the results similar to those of Section 3 can be established by the same way. In particular, if $c_1 = c_2 = 0.5$ and β is specified by (11), the two microstructures have the same bulk modulus expression (12). This implies that the two phases can be interchanged without disturbing the effective bulk modulus.

Concerning the conductivity of an isotropic composite consisting of two isotropic phases, if the phase conductivities k_i verify the condition $k_1 > k_2$, then all the foregoing results for compressibility remain valid for conductivity, provided κ^* , κ_-^{HS} , κ_+^{HS} , κ_i , μ_i , κ and κ_2^* are replaced by k^* , k_-^{HS} , k_+^{HS} , k_i , $3k_i/2$, k and k_2^* , respectively.

1. Introduction

La conductivité d'un composite isotrope formé de deux phases isotropes est encadrée par les bornes inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman [1]. La compressibilité du composite est également minorée et majorée par les bornes inférieure et supérieure correspondantes de Hashin et Shtrikman [2] quand les modules de compressibilité et de cisaillement des phases sont bien ordonnés. L'optimalité de ces bornes a été prouvée presque en même temps qu'elles ont été établies (Hashin, [3]; Hashin et Shtrikman, [1]). Mais, les premiers travaux consistant à savoir si toute compressibilité ou conductivité située entre les bornes peut être réalisée par une microstructure furent entrepris beaucoup plus tard. En considérant une microstructure constituée de sphères composites creuses

emboîtées, Milgrom et Shtrikman [4] ont démontré que toutes les conductivités comprises entre les bornes peuvent être balayées via la variation d'un paramètre géométrique de la microstructure. Dans un travail récent, Gilormini [5] a construit une microstructure simple qui est capable de réaliser toute compressibilité ou conductivité en question. He et Benveniste [6] viennent de montrer que la microstructure de Milgrom et Shtrikman permet également de concrétiser toute compressibilité.

Le présent travail propose deux nouvelles microstructures qui résultent d'une modification directe de celle de Hashin [3] et Hashin et Shtrikman [1] et peuvent matérialiser toute conductivité ou compressibilité susmentionnée. Par rapport à celles présentées dans la littérature pour atteindre le même objectif, les deux microstructures construites dans ce travail semblent plus simples. D'autre part, nous montrons qu'elles ont la conséquence que la variation de la conductivité ou compressibilité correspondante est strictement monotone par rapport au paramètre géométrique qui les caractérise.

2. Assemblages de sphères composites à double couche

Le composite en question est un matériau isotrope constitué de deux phases isotropes. La fraction volumique de la phase 1 est dénotée par c_1 alors que celle de la phase 2 est désignée par c_2 avec $c_1 + c_2 = 1$. Les modules de compressibilité et de cisaillement des deux phases, κ_i et μ_i , sont supposés tels que $\kappa_1 > \kappa_2$ et $\mu_1 > \mu_2$. D'après un résultat bien connu de Hashin et Shtrikman [2], le module de compressibilité effectif κ^* du composite est encadré par

$$\kappa_-^{\text{HS}} \leq \kappa^* \leq \kappa_+^{\text{HS}} \quad (1)$$

où les bornes inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman sont données par

$$\kappa_-^{\text{HS}} = \kappa_2 + \frac{c_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{1 + 3c_2(\kappa_1 - \kappa_2)/(3\kappa_2 + 4\mu_2)}, \quad \kappa_+^{\text{HS}} = \kappa_1 + \frac{c_2(\kappa_2 - \kappa_1)}{1 + 3c_1(\kappa_2 - \kappa_1)/(3\kappa_1 + 4\mu_1)} \quad (2)$$

Ces bornes, réalisables par deux assemblages des sphères composites de Hashin [3] et Hashin et Shtrikman [1], sont optimales.

Rappelons qu'un assemblage de sphères composites (ASC) de Hashin est une microstructure particulière et correspond à un domaine tridimensionnel quelconque, qui est, à une mesure volumique nulle près, complètement rempli de sphères composites à une couche, similaires mais de différentes tailles (Fig. 1). Par une sphère composite à une couche, nous entendons une sphère de rayon b à l'intérieur de laquelle se trouve un noyau sphérique de rayon a , couvert d'une couche sphérique d'épaisseur $b - a$. Deux sphères composites sont dites *similaires* si leurs noyaux sont constitués d'une même phase, si leurs couches extérieures sont composées d'une autre même phase et si elles sont géométriquement homothétiques. Ainsi, le rapport a/b et la fraction volumique de chaque phase sont identiques dans toutes les sphères composites similaires. La borne supérieure κ_+^{HS} est réalisée par l'ASC quand la phase 2 (moins rigide) est choisie pour les noyaux et la phase 1 (plus rigide) est utilisée pour les couches (Fig. 1(a)). En échangeant le rôle de la phase 1 et celui de la phase 2, la borne inférieure κ_-^{HS} est atteinte par l'ASC (Fig. 1(b)).

Maintenant, nous procédons à la construction d'une microstructure dans laquelle les fractions volumiques des phases 1 et 2 sont égales respectivement à c_1 et c_2 , et qui permet de réaliser une compressibilité κ^* donnée mais encadrée par (1). Sans perte de généralité, nous écrivons (1) sous la forme équivalente :

$$\kappa^* = \alpha \kappa_-^{\text{HS}} + (1 - \alpha) \kappa_+^{\text{HS}}, \quad \alpha \in [0, 1] \quad (3)$$

A notre fin, dans l'ASC de Hashin, l'élément de base, à savoir une sphère composite à une couche, est remplacée par une sphère composite à *double* couche. Plus précisément, cette dernière comporte un noyau sphérique formée de la phase 1, une première couche sphérique constituée de la phase 2 et une deuxième couche composée de la phase 1 (Fig. 2). Le rayon r_1 du noyau et les rayons r_2 et r_3 des couches doivent être fixés de manière à retrouver les fractions volumiques c_1 et c_2 des phases 1 et 2. Plus exactement, la fraction volumique c_1 de la phase 1 est la

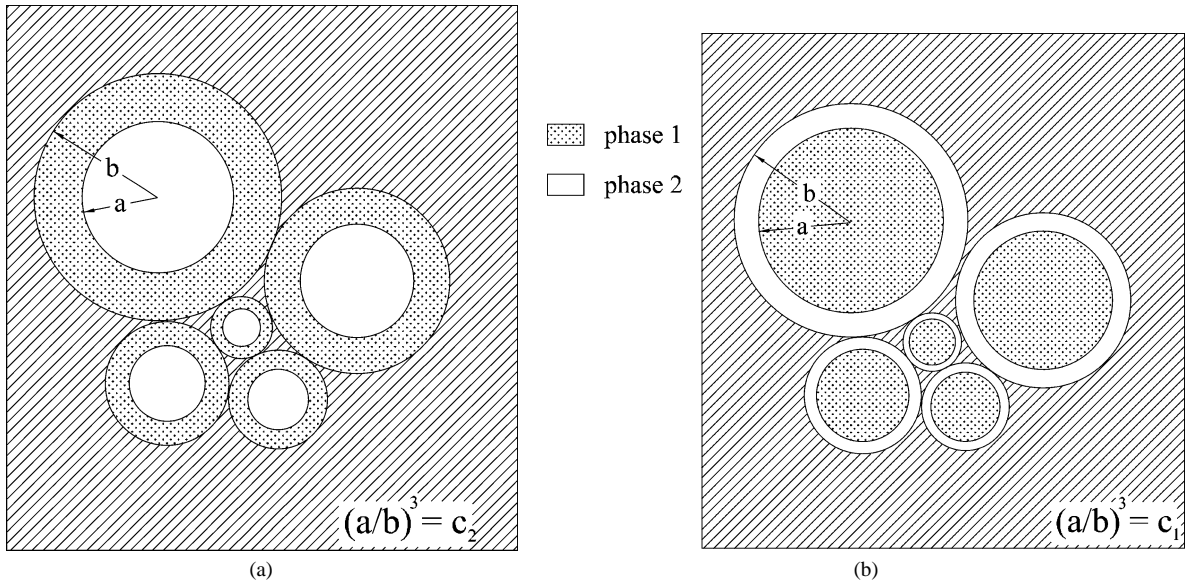


Fig. 1. Assemblages de sphères composites à une couche : réalisation des bornes supérieure et inférieure de Hashin et Shtrikman par (a) et (b)
 Fig. 1. Simply coated composite sphere assemblages: realization of the upper and lower bounds of Hashin et Shtrikman by (a) and (b).

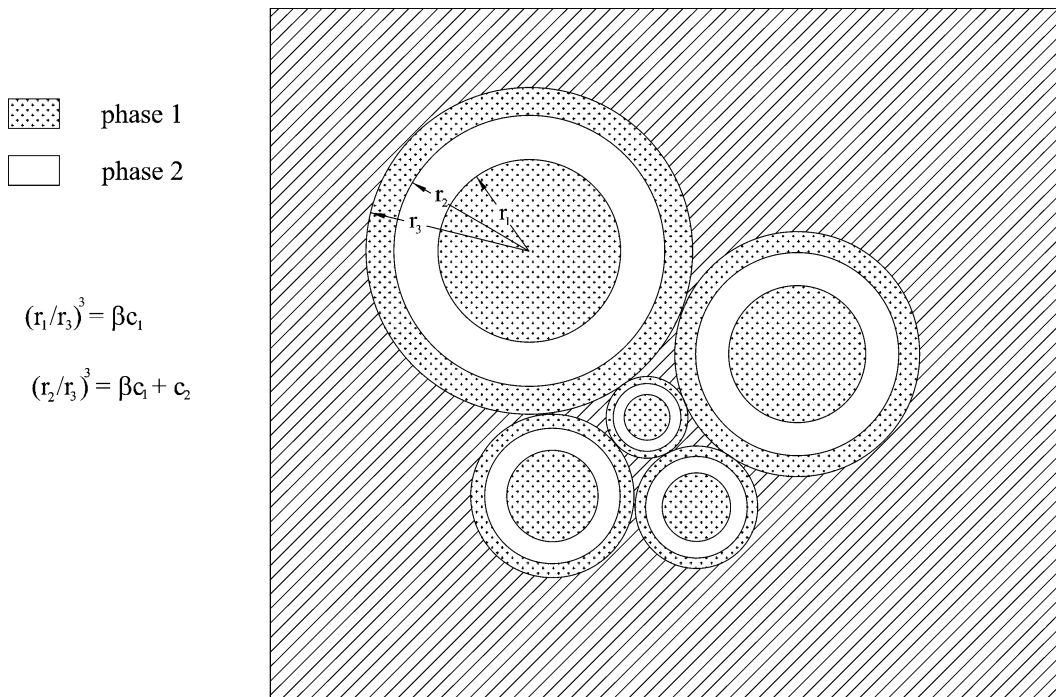


Fig. 2. Assemblage de sphères composites à double couche : réalisation de toute compressibilité ou conductivité.
 Fig. 2. Doubly coated composite sphere assemblages: realization of every compressibility or conductivity.

somme de celle $c'_1 = \beta c_1$ du noyau et de celle $c''_1 = (1 - \beta)c_1$ de la couche extérieure, la valeur de β étant comprise entre 0 et 1. Ainsi, un simple calcul montre que les rayons r_1, r_2 et r_3 doivent être ajustés de telle sorte que

$$\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^3 = \beta c_1, \quad \left(\frac{r_2}{r_3}\right)^3 = \beta c_1 + c_2 \quad (\beta \in [0, 1]) \tag{4}$$

Il est direct mais crucial de constater que l'ASC à une couche réalisant κ_+^{HS} ou κ_-^{HS} est retrouvé selon que $\beta = 0$ ou $\beta = 1$. Ce constat nous conduit naturellement à poser deux questions. Pour une valeur de α donnée, existe-il une valeur de β telle que l'ASC à double couche réalise la compressibilité κ^* précisée par (3)? Si la réponse est oui, la correspondance entre β et α est-elle univoque? La prochaine section a pour objectif de répondre à ces deux questions.

3. Résultats

La compressibilité effective κ de l'ASC à double couche décrit ci-dessus (Fig. 2) est fournie par

$$\kappa = \kappa_1 - \frac{c_2(c_2 + \beta c_1)(3\kappa_1 + 4\mu_1)(3\kappa_1 + 4\mu_2)(\kappa_1 - \kappa_2)}{g(\beta)} \tag{5a}$$

où la fonction $g(\beta)$ est donnée par

$$g(\beta) = (c_2 + \beta c_1)(3\kappa_1 + 4\mu_2)[3(c_2 + \beta c_1)(\kappa_1 - \kappa_2) + (3\kappa_2 + 4\mu_1)] + 3\beta c_1(\kappa_2 - \kappa_1)[(c_2 + \beta c_1)(3\kappa_1 + 4\mu_2) + 4(\mu_1 - \mu_2)] \tag{5b}$$

La formule précédente pour κ peut être obtenue par l'expression (2)₂ de κ_+^{HS} dans laquelle c_1 est remplacé par $(1 - \beta)c_1$, c_2 par $c_2 + \beta c_1$, et κ_2 par

$$\kappa_2^* = \kappa_2 + \frac{\beta c_1(\kappa_1 - \kappa_2)}{c_2 + \beta c_1 + 3c_2(\kappa_1 - \kappa_2)/(3\kappa_2 + 4\mu_2)} \tag{6}$$

Cette dernière n'est que la formule (2)₁ de κ_-^{HS} dans laquelle c_1 et c_2 sont respectivement remplacés par $\beta c_1/(c_2 + \beta c_1)$ et $c_2/(c_2 + \beta c_1)$. En effet, l'ASC à double couche en question est équivalent à l'ASC à une couche dont le noyau de chaque sphère est lui-même une sphère composite à une couche. Sur ce point, le lecteur peut se référer à Milton ([7], Section 7.2) pour plus de détails. Noter que la formule (5) peut s'obtenir aussi directement de la formule de récurrence (46) de Hervé et Zaoui [8].

Ensuite, la compressibilité κ déterminée par (5) est considérée comme une fonction du paramètre β . A partir de (5), nous obtenons

$$\frac{d\kappa}{d\beta} = \frac{12c_1c_2^2(3\kappa_1 + 4\mu_1)(3\kappa_1 + 4\mu_2)(\kappa_2 - \kappa_1)^2(\mu_2 - \mu_1)}{[g(\beta)]^2} \tag{7}$$

Sous notre hypothèse que $\kappa_1 > \kappa_2$ et $\mu_1 > \mu_2$, il s'ensuit que

$$\frac{d\kappa}{d\beta} < 0 \tag{8}$$

ce qui prouve que la compressibilité κ donnée par (5) est une fonction *strictement décroissante* du paramètre β . D'autre part, il est immédiat de vérifier que $\kappa = \kappa_+^{\text{HS}}$ quand $\beta = 0$ et que $\kappa = \kappa_-^{\text{HS}}$ quand $\beta = 1$. Ainsi, nous en déduisons qu'à toute conductivité κ^* donnée et encadrée par (1) est associée une valeur *unique* de β telle que la compressibilité κ de l'ASC à double couche est égale à κ^* . Plus précisément, en posant

$$\kappa^* = \kappa \tag{9}$$

et en substituant les expressions (3) et (5) de κ^* et κ dans (9), nous trouvons

$$\beta = \frac{c_2\alpha(3\kappa_1 + 4\mu_2)[3c_2(\kappa_1 - \kappa_2) + 3\kappa_2 + 4\mu_1]}{h(\alpha)} \quad (10a)$$

avec le dénominateur $h(\beta)$ précisé par

$$h(\alpha) = (1 - \alpha)(3\kappa_1 + 4\mu_1)(3\kappa_2 + 4\mu_2) + 3c_2^2\alpha(\kappa_1 - \kappa_2)(3\kappa_1 + 4\mu_2) \\ + c_2[(3\kappa_1 + 4\mu_2)(3\kappa_2 + 4\mu_1) + (1 - \alpha)(9\kappa_1^2 - 12\kappa_2\mu_2 - 18\kappa_1\kappa_2 - 12\kappa_2\mu_1 - 16\mu_1\mu_2)] \quad (10b)$$

Cette expression satisfait les conditions suivantes : $\beta = 0$ pour $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ pour $\alpha = 1$. De plus, nous pouvons montrer que $d\beta/d\alpha > 0$, i.e. β est une fonction *strictement croissante* de α .

En introduisant la valeur de β déterminée par (10) dans (4), nous déterminons un assemblage illustré par la Fig. 2, dont la compressibilité est égale précisément à une valeur de κ^* fixée par l'intermédiaire de α . En faisant varier α ou β entre 0 et 1, toutes les compressibilités de κ_+^{HS} à κ_-^{HS} sont, de façon *continue et décroissante*, balayées par la microstructure.

4. Remarques

Une alternative par rapport à la microstructure illustrée par la Fig. 2 est la suivante. La phase 1, plus rigide que la phase 2, occupe uniquement la couche intermédiaire alors que la phase 2 se trouve à la fois dans le noyau et dans la couche extérieure. Pour cette microstructure, nous pouvons obtenir les résultats similaires à ceux de la Section 3, en procédant de la même façon. Il est intéressant de remarquer que, si $c_1 = c_2 = 0,5$ et si

$$\beta = \frac{\sqrt{(3\kappa_1 + 4\mu_2)(3\kappa_2 + 4\mu_1)}}{\sqrt{(3\kappa_1 + 4\mu_2)(3\kappa_2 + 4\mu_1)} + 2\sqrt{(3\kappa_1 + 4\mu_1)(3\kappa_2 + 4\mu_2)}} \quad (11)$$

alors les deux microstructures correspondantes ont le même module de compressibilité :

$$\kappa = \left(\frac{4\kappa_1\mu_2 + 4\kappa_2\mu_2 + 6\kappa_1\kappa_2}{\sqrt{(3\kappa_1 + 4\mu_2)(3\kappa_2 + 4\mu_2)}} + \frac{4\kappa_2\mu_1 + 4\kappa_1\mu_1 + 6\kappa_1\kappa_2}{\sqrt{(3\kappa_2 + 4\mu_1)(3\kappa_1 + 4\mu_1)}} \right) \\ \times \left(\frac{3\kappa_1 + 3\kappa_2 + 8\mu_2}{\sqrt{(3\kappa_1 + 4\mu_2)(3\kappa_2 + 4\mu_2)}} + \frac{3\kappa_1 + 3\kappa_2 + 8\mu_1}{\sqrt{(3\kappa_2 + 4\mu_1)(3\kappa_1 + 4\mu_1)}} \right)^{-1} \quad (12)$$

Autrement dit, dans chacune des deux microstructures particulières définies par $c_1 = c_2 = 0,5$ et (11), les phases 1 et 2 peuvent s'échanger sans perturber le module de compressibilité. La symétrie de l'expression (12) par rapport aux indices 1 et 2 montre clairement ce dernier point. Cette situation peut être considérée comme une généralisation tridimensionnelle du fameux problème de conduction d'un échiquier (Torquato, [9] ; Milton, [7]).

Concernant la conductivité d'un composite isotrope formé de deux phases isotropes, si les conductivités k_i des phases respectent la condition $k_1 > k_2$, alors tous les résultats présentés ci-dessus pour la compressibilité restent valables pour la conductivité à condition de remplacer κ^* , κ_-^{HS} , κ_+^{HS} , κ_i , μ_i , κ et κ_2^* respectivement par k^* , k_-^{HS} , k_+^{HS} , k_i , $3k_i/2$, k et k_2^* . Le fait que les résultats pour la compressibilité soient directement utilisables pour la conductivité par un changement approprié de paramètres a également été employé dans le travail de Gilormini [5].

Avant de clore cette Note, il convient de rappeler que l'idée de base de notre travail provient du simple constat que l'assemblage de la Fig. 2 est une configuration intermédiaire des assemblages de la Fig. 1. Un bon nombre de chercheurs dans le domaine de la micromécanique devraient être au courant de ce constat. Mais, à notre connaissance, il n'a jamais été explicitement exploité dans la littérature pour réaliser toute conductivité ou compressibilité encadrée par les bornes de Hashin et Shtrikman.

Remerciements

Les auteurs sont reconnaissants à Y. Benveniste (Tel-Aviv University, Israel) pour les discussions étant à l'origine de ce travail.

Références

- [1] Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the effective magnetic permeability of multiphase materials, *J. Appl. Phys.* 33 (1962) 3125–3131.
- [2] Z. Hashin, S. Shtrikman, A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids* 11 (1963) 127–140.
- [3] Z. Hashin, The elastic moduli of heterogeneous materials, *J. Appl. Mech.* 29 (1962) 143–150.
- [4] M. Milgrom, S. Shtrikman, A layered-shell model of isotropic composites and exact expressions for effective properties, *J. Appl. Phys.* 66 (1989) 3429–3436.
- [5] P. Gilormini, Realizable compressibility and conductivity in isotropic two-phase composites, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. Iib* 329 (2001) 851–855.
- [6] Q.-C. He, Y. Benveniste, Exactly solvable spherically anisotropic thermoelastic microstructures, *J. Mech. Phys. Solids* 52 (2004) 2661–2682.
- [7] G.W. Milton, *The Theory of Composites*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [8] E. Hervé, A. Zaoui, n -Layer inclusion-based micromechanical modelling, *Int. J. Engrg. Sci.* 31 (1993) 1–10.
- [9] S. Torquato, *Random Heterogeneous Materials*, Springer, New York, 2001.