Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®

C. R. Mecanique 333 (2005) 475–480

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Décomposition des déplacements d'une poutre : simplification d'un problème d'élasticité

Georges Griso

Laboratoire Jacques-Louis Lions (analyse numérique), université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 30 mars 2005 ; accepté le 5 avril 2005

Disponible sur Internet le 23 mai 2005

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

On présente une décomposition des déplacements d'une poutre. On utilise ensuite cette décomposition pour simplifier un problème d'élasticité 3D. Le problème formel obtenu est un système différentiel dépendant de l'épaisseur de la poutre. On donne des estimations de l'erreur. ***Pour citer cet article : G. Griso, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Abstract

Decomposition of rod displacements: simplification of an elasticity problem. We present a decomposition of rod displacements. Then we use this decomposition to simplify an 3D linearized elasticity problem. The formal problem obtained is a differential system which depends on the thickness of the rod. We give error estimates. ***To cite this article: G. Griso, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Élasticité linéarisée ; Poutre de Timoshenko ; Méthode de l'éclatement

Keywords: Computational solid mechanics; Linearized elasticity; Timoshenko's beam; Unfolding method

Abridged English version

This Note presents a new decomposition of rod displacements and a simplification in the strain tensor. We apply these results to obtain error estimates in a three-dimensional linearized elasticity problem. We prove that the global error is of order $\delta^{1/2}$ and that the interior error is of order δ (the rod thickness is in $\mathrm{O}(\delta)$ and its length is equal to L).

The rod is denoted $\Omega_\delta = \omega_\delta \times]0, L[$ where $\omega_\delta = \delta\omega$ (ω is the reference cross-section).

Adresse e-mail : georges.griso@wanadoo.fr (G. Griso).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2005.04.004

In Section 2 we present the decomposition and some estimations of the displacements of the rod Ω_δ. We give the definition of the elementary displacement U_e associated with a displacement u (generalisation of the Bernoulli–Navier displacement). Using U_e, we get information about the displacement of the rod middle line and about the cross-section's rotation. The difference $u - U_e = \bar{u}$ expresses the warping of rod cross-section. In Theorem 2.2 we give estimates for U_e and $\bar{u}$ in relation to the norm of the energy deformation of u (see also [1]).

Section 3 is dedicated to the formal displacements of the virtual rod $\Omega = \omega \times]0, L[$ and to the formal strain tensor of these displacements. The unfolding operator $\mathcal{T}_\delta$ is introduced in Definition 3.1. This transformation allows us to work on the fixed domain Ω. To simplify the unfolded strain tensor we suggest eliminating the partial derivatives with respect to x_3 of the warping $\bar{u}$ (see Theorem 3.2 for a justification). Thus we obtain a formal strain tensor of the unfolded displacement and a space of formal displacements $\mathcal{D}^f$ of the virtual rod Ω.

To illustrate the previous method, we study the problem introduced by (5). In this problem the forces are orthogonal to the Bernoulli–Navier displacements. Then we set the formal elasticity problem (7) in $\mathcal{D}^f$. We write its solution $U_e^{\delta,a} + \overline{U}^{\delta,a}$. We introduce correctors to express the 'corrector' $\overline{U}^{\delta,a}$ in terms of the derivatives of the components $\mathcal{U}^{\delta,a}$ and $\mathcal{R}^{\delta,a}$ of the elementary displacement $U_e^{\delta,a}$ (Theorem 4.1). Theorem 4.2 gives the variational problems verified by the middle line displacement $\mathcal{U}^{\delta,a}$ and the rotation angles $\mathcal{R}^{\delta,a}$.

The last section of this Note is dedicated to error estimates. The techniques leading to these estimates are the same as those presented in [2,3] for the unfolding method in periodic homogenization. We give (Theorem 5.1) the distance between the unfolded warping $\mathcal{T}_\delta(\bar{u}^\delta)$ and $\delta\overline{U}^{\delta,a}$ and the distance between the unfolded stress tensor of the solution of (5) and the formal stress tensor of the solution of (7).

We do not easily obtain the asymptotic behavior of problem (5) if we use an asymptotic expansion or the asymptotic variational method (see [4] or [5–7]).

The detailed proofs will be presented in a forthcoming article.

1. Introduction

Cette Note présente une décomposition des déplacements d'une poutre et une application de cette décomposition à la simplification des équations 3D de l'élasticité linéarisée.

La poutre est notée $\Omega_\delta = \omega_\delta \times]0, L[$ où $\omega_\delta = \delta\omega$ (ω est la section droite de référence de la poutre).

Dans la première partie on définit le déplacement élémentaire U_e associé à un déplacement u de la poutre Ω_δ. Grâce à U_e nous avons des informations sur le déplacement de la ligne moyenne de la poutre et sur les rotations de ses sections droites. La différence $u - U_e = \bar{u}$ rend compte du gauchissement des sections droites. Le Théorème 2.2 donne les estimations de U_e et de $\bar{u}$ en fonction de la norme de l'énergie de déformation de u (voir également [1]).

La seconde partie est consacrée aux déplacements formels de la poutre de référence $\Omega = \omega \times]0, L[$ et au tenseur formel des déformations de ces déplacements. L'opérateur d'éclatement est introduit dans la Définition 3.1. La transformation par éclatement permet de travailler sur le domaine fixe Ω. On propose de simplifier les éclatés des déformations d'un déplacement en supprimant certaines dérivées partielles par rapport à x_3 (voir (3) et (4)). Le Théorème 3.2 rend légitime cette simplification. On obtient ainsi un espace $\mathcal{D}^f$ de déplacements formels de la poutre de référence Ω et pour ces déplacements un tenseur formel des déformations.

Le problème d'élasticité servant à illuster la méthode précédente est introduit par (5). C'est dans $\mathcal{D}^f$ que l'on écrit le problème formel d'élasticité (7). Sa solution est $U_e^{\delta,a} + \overline{U}^{\delta,a}$. L'introduction de correcteurs permet d'exprimer $\overline{U}^{\delta,a}$ en termes des dérivées des composantes $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et $\mathcal{R}^{\delta,a}$ du déplacement élémentaire $U_e^{\delta,a}$ (Théorème 4.1). Le Théorème 4.2 donne les problèmes variationnels vérifiés par $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et $\mathcal{R}^{\delta,a}$.

Dans la dernière partie nous donnons des estimations de l'erreur. Les techniques conduisant à ces estimations sont les mêmes que celles présentées dans [2,3]. On évalue (Théorème 5.1) la distance entre l'éclaté du tenseur des contraintes de de la solution de (5) et le tenseur formel des contraintes de la solution de (7).

2. Décomposition des déplacements d'une poutre

On se donne un domaine borné ω de $\mathbb{R}^2$ de frontière lipschitzienne. On suppose que l'origine de $\mathbb{R}^2$ est le centre de gravité de ω et que les axes du repère $(O;\vec{e}_1)$ et $(O;\vec{e}_2)$ sont les axes principaux d'inertie de ω. La poutre est le domaine $\Omega_\delta=\omega_\delta\times]0,L[$ où ω_δ est l'homothétique de ω dans l'homothétie de rapport δ et de centre l'origine. La section droite de la poutre est le domaine plan $\omega_\delta\times\{x_3\}$, $x_3\in[0,L]$. La ligne moyenne de la poutre est le segment de droite d'origine $(0,0,0)$ et d'extrémité $(0,0,L)$. La poutre de référence est $\Omega=\omega\times]0,L[$.

Le point courant de Ω_δ est noté $x=(x_1,x_2,x_3)$, celui de Ω est noté $(X_1,X_2,x_3)=(X,x_3)$ et celui de ω est noté $X=(X_1,X_2)$. La variable x_3 est la variable macroscopique ; les variables X_1 et X_2 sont les variables microscopiques.

Le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ est noté $\cdot$ et la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$ est noté $\|\cdot\|_2$. Les indices grecs α et β appartiennent à l'ensemble $\{1,2\}$ quant aux indices latins i, j, k et l ils appartiennent à l'ensemble $\{1,2,3\}$. Dans toute cette Note nous utilisons la convention des indices répétés.

Définition 2.1. Un *déplacement élémentaire* de la poutre Ω_δ est un déplacement de la forme

$$u(x)=\mathcal{U}(x_3)+\mathcal{R}(x_3)\wedge(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2),\quad x=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3,\ \mathcal{U},\mathcal{R}\in L^1(0,L;\mathbb{R}^3)$$

Sous l'action d'un petit déplacement élémentaire la section droite $\omega_\delta\times\{x_3\}$ est translatée de $\mathcal{U}(x_3)$ et tourne autour du vecteur $\mathcal{R}(x_3)$ d'un petit angle de mesure $\|\mathcal{R}(x_3)\|_2$; $\mathcal{U}$ est également le déplacement de la ligne moyenne de la poutre. Après déplacement, la section droite de la poutre n'est plus orthogonale à sa ligne moyenne. La torsion de la poutre (rotation de la section droite autour de sa ligne moyenne) est donnée par le déplacement $\mathcal{R}_3(x_3)\vec{e}_3\wedge(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2)$. La troisième composante de $\mathcal{R}(x_3)$ est une mesure de l'angle de torsion de la section droite $\omega_\delta\times\{x_3\}$.

Tout déplacement u appartenant à $L^1(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)$ s'écrit de façon unique

$$u(x)=U_e(x)+\bar{u}(x),\quad U_e(x)=\mathcal{U}(x_3)+\mathcal{R}(x_3)\wedge(x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2)$$

où U_e est un déplacement élémentaire et où $\bar{u}$ vérifie p.p. dans $]0,L[$

$$\int_{\omega_\delta}\bar{u}_i(x_1,x_2,\cdot)=\int_{\omega_\delta}x_\alpha\bar{u}_3(x_1,x_2,\cdot)=\int_{\omega_\delta}\bigl\{x_1\bar{u}_2(x_1,x_2,\cdot)-x_2\bar{u}_1(x_1,x_2,\cdot)\bigr\}=0 \tag{1}$$

Le déplacement $\bar{u}$ est le *gauchissement* des sections droites de la poutre.

Pour tout ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^N$ et tout déplacement u appartenant à $H^1(\mathcal{O};\mathbb{R}^N)$ on note

$$|u|_{\mathcal{D},\mathcal{O}}=\|\nabla u\|_{[L^2(\mathcal{O})]^{N^2}},\qquad |u|_{\mathcal{E},\mathcal{O}}=\bigl\|(\nabla u)_S\bigr\|_{[L^2(\mathcal{O})]^{N^2}},\qquad \gamma_{kl}(u)=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right\}$$

$(\nabla u)_S$ désigne la partie symétrique du gradient de u ou tenseur des déformations.

Théorème 2.2. *Pour tout déplacement u appartenant à $H^1(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)$ les composantes $\mathcal{U}$ et $\mathcal{R}$ du déplacement élémentaire U_e appartiennent à $H^1(0,L;\mathbb{R}^3)$, le gauchissement $\bar{u}$ appartient à $H^1(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)$ et on a de plus les estimations suivantes* :

$$|U_e|_{\mathcal{E},\Omega_\delta}\leqslant C|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta},\qquad |\bar{u}|_{\mathcal{D},\Omega_\delta}\leqslant C|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta},\qquad \|\bar{u}\|_{L^2(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)}\leqslant C\delta|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta} \tag{2}$$

Les constantes ne dépendent que de ω.

La poutre est maintenant fixée en ses deux extrémités $\omega_\delta\times\{0\}$ et $\omega_\delta\times\{L\}$

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)=\bigl\{u\in H^1(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)\mid u=0 \text{ sur } \omega_\delta\times\{0\}\cup\omega_\delta\times\{L\}\bigr\}$$

Pour tout u appartenant à $H^1_{\Gamma_0}(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)$ l'inégalité de Korn et les estimations L^2 de u_i sont les conséquences de (2)

$$|u|_{\mathcal{D},\Omega_\delta}\leqslant C\frac{L}{\delta}|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta},\qquad \|u_\alpha\|_{L^2(\Omega_\delta)}\leqslant C\frac{L^2}{\delta}|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta},\qquad \|u_3\|_{L^2(\Omega_\delta)}\leqslant CL|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta}$$

Dans la suite de cette Note tous les déplacements de la poutre Ω_δ sont décomposés en la somme d'un déplacement élémentaire et d'un gauchissement vérifiant (1).

3. Le tenseur formel des déformations des déplacements de la poutre de référence

Définition 3.1. Soit ϕ une fonction appartenant à $L^1(\Omega_\delta)$. L'*éclaté* $\mathcal{T}_\delta(\phi)$ de ϕ est défini par

$$\mathcal{T}_\delta(\phi)(X_1,X_2,x_3)=\phi(\delta X_1,\delta X_2,x_3),\quad (X_1,X_2,x_3)\in\Omega$$

Soit $u=U_e+\bar u$, $U_e(x_1,x_2,\cdot)=\mathcal{U}+\mathcal{R}\wedge(x_1\vec e_1+x_2\vec e_2)$, un déplacement appartenant à $H^1(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)$. Les composantes du tenseur des déformations sont

$$\begin{cases}\gamma_{33}(u)=\dfrac{d\mathcal{U}_3}{dx_3}-x_1\dfrac{d\mathcal{R}_2}{dx_3}+x_2\dfrac{d\mathcal{R}_1}{dx_3}+\dfrac{\partial\bar u_3}{\partial x_3}\\ \gamma_{13}(u)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\mathcal{U}_1}{dx_3}-\mathcal{R}_2-x_2\dfrac{d\mathcal{R}_3}{dx_3}+\dfrac{\partial\bar u_1}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\bar u_3}{\partial x_1}\right),\quad \gamma_{\alpha\beta}(u)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\bar u_\alpha}{\partial x_\beta}+\dfrac{\partial\bar u_\beta}{\partial x_\alpha}\right)\\ \gamma_{23}(u)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\mathcal{U}_2}{dx_3}+\mathcal{R}_1+x_1\dfrac{d\mathcal{R}_3}{dx_3}+\dfrac{\partial\bar u_2}{\partial x_3}+\dfrac{\partial\bar u_3}{\partial x_2}\right)\end{cases}\tag{3}$$

On pose $\overline{U}=\frac{1}{\delta}\mathcal{T}_\delta(\bar u)$. On associe au déplacement u le déplacement formel de la poutre de référence Ω, $U(X,x_3)=\mathcal{U}(x_3)+\delta\mathcal{R}(x_3)\wedge(X_1\vec e_1+X_2\vec e_2)+\overline{U}(X,x_3)$ pour presque tout (X,x_3) dans Ω. On définit le tenseur formel des déformations du déplacement U en supprimant les dérivées partielles de $\overline{U}_i$ par rapport à x_3

$$\begin{cases}\Gamma_{33}(U)=\dfrac{d\mathcal{U}_3}{dx_3}-X_1\delta\dfrac{d\mathcal{R}_2}{dx_3}+X_2\delta\dfrac{d\mathcal{R}_1}{dx_3}\\ \Gamma_{13}(U)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\mathcal{U}_1}{dx_3}-\mathcal{R}_2-X_2\delta\dfrac{d\mathcal{R}_3}{dx_3}+\dfrac{\partial\overline{U}_3}{\partial X_1}\right),\quad \Gamma_{\alpha\beta}(U)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial\overline{U}_\alpha}{\partial X_\beta}+\dfrac{\partial\overline{U}_\beta}{\partial X_\alpha}\right)\\ \Gamma_{23}(U)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\mathcal{U}_2}{dx_3}+\mathcal{R}_1+X_1\delta\dfrac{d\mathcal{R}_3}{dx_3}+\dfrac{\partial\overline{U}_3}{\partial X_2}\right)\end{cases}\tag{4}$$

Théorème 3.2. *Soient $u\in H^1(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)$ et $U=\mathcal{T}_\delta(u)$ son éclaté. On a*

$$\|\Gamma_{ij}(U)\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\frac{|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta}}{\delta},\qquad \|\mathcal{T}_\delta(\gamma_{i3}(u))-\Gamma_{i3}(U)\|_{L^2(\omega;(H^1(0,L))')}\leqslant C|u|_{\mathcal{E},\Omega_\delta}+\frac{C}{\sqrt{\delta}}|u|_{\mathcal{E},\Omega'_\delta}$$

où $\Omega'_\delta=\omega_\delta\times]0,\delta[\cup\omega_\delta\times]L-\delta,L[$. Les constantes sont indépendantes de L et de δ.

On introduit ci-dessous l'espace des déplacements formels de la poutre de référence Ω

$$\mathcal{D}^g=\left\{\bar\phi\in H^1(\omega;L^2(0,L;\mathbb{R}^3))\ \Big|\ \int_\omega\bar\phi_i(X,\cdot)=\int_\omega X_\alpha\bar\phi_3(X,\cdot)=\int_\omega\{X_1\bar\phi_2(X,\cdot)-X_2\bar\phi_1(X,\cdot)\}=0\right\}$$

$$\mathcal{D}^f=\left\{V\in L^2(\Omega;\mathbb{R}^3)\mid V=\mathcal{V}+\mathcal{A}\wedge(X_1\vec e_1+X_2\vec e_2)+\overline{V},\ \mathcal{V},\mathcal{A}\in H^1_0(0,L;\mathbb{R}^3),\ \overline{V}\in\mathcal{D}^g\right\}$$

On munit $\mathcal{D}^f$ de la norme associée au produit scalaire $\langle\Phi,\Psi\rangle=\int_\Omega\Gamma_{ij}(\Phi)\Gamma_{ij}(\Psi)$. Cette norme est équivalente à la norme de $H^1_0(0,L;\mathbb{R}^3)\times H^1_0(0,L;\mathbb{R}^3)\times H^1(\omega;L^2(0,L;\mathbb{R}^3))$. Le tenseur formel des déformations d'un déplacement appartenant à $\mathcal{D}^f$ se définit par les égalités (4).

4. Simplification d'un problème d'élasticité linérarisée

La poutre est constituée d'un matériau homogène et isotrope. Les composantes du tenseur des contraintes sont $\sigma_{ij}(u) = a_{ijkl}\gamma_{kl}(u)$où $a_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$. Les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé du matériau.

On cherche une solution approchée du problème d'élasticité linéarisée

$$u^\delta \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3),\quad \int_{\Omega_\delta}\sigma_{ij}(u^\delta)\gamma_{ij}(v) = \int_{\Omega_\delta} F^\delta\cdot v + \int_{\partial\Omega_\delta} G^\delta\cdot v \quad \forall v\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3) \tag{5}$$

La densité des forces de volume F^δ est colinéaire à $\vec{e}_1$ et la densité des forces de surface G^δ est colinéaire à $\vec{e}_3$. On suppose de plus que ce système de forces est orthogonal aux déplacements de Bernoulli–Navier. On fait donc l'hypothèse qu'il existe $f\in L^2(0,L)$ tel que pour tout déplacement $v\in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_\delta;\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\Omega_\delta} F^\delta\cdot v + \int_{\partial\Omega_\delta} G^\delta\cdot v = \iint_{\omega_\delta}\int_0^L \delta f\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_1}{\mathrm{d}x_3} - \mathcal{A}_2\right) + \mathrm{O}(\delta^3)|u^\delta|_{\mathcal{E},\Omega_\delta},\quad v = V_e + \bar{v} \tag{6}$$

où $V_e(x_1,x_2,\cdot) = \mathcal{V} + \mathcal{A}\wedge(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$ avec $\mathcal{V},\mathcal{A}\in H^1_0(0,L;\mathbb{R}^3)$. La solution de (5) vérifie l'estimation $|u^\delta|_{\mathcal{E},\Omega_\delta}\leqslant C\delta^2$.

Le problème formel d'élasticité s'écrit

$$\begin{cases} U^{\delta,a} = U_e^{\delta,a} + \overline{U}^{\delta,a}\in\mathcal{D}^f,\quad U_e^{\delta,a}(X,\cdot) = \mathcal{U}^{\delta,a} + \mathcal{R}^{\delta,a}\wedge(X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2),\quad \overline{U}^{\delta,a}\in\mathcal{D}^g\\ \displaystyle\int_\Omega \Sigma_{ij}(U^{\delta,a})\Gamma_{ij}(V) = \iint_\omega\int_0^L \delta f\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_1}{\mathrm{d}x_3} - \mathcal{A}_2\right)\quad \forall V\in\mathcal{D}^f\end{cases} \tag{7}$$

où $\Sigma_{ij}(U^{\delta,a}) = a_{ijkl}\Gamma_{kl}(U^{\delta,a})$ sont les composantes du tenseur formel des contraintes.

4.1. Les correcteurs et le déplacement correcteur $\overline{U}^{\delta,a}$

On note

$$\begin{cases}\chi_{11}(X) = -X_1X_2 - a_1X_2, & \chi_{12}(X) = -\dfrac{X_2^2 - X_1^2}{2} + a_1X_1 + b_1\\ \chi_{21}(X) = -\dfrac{X_1^2 - X_2^2}{2} - a_2X_2 + b_2, & \chi_{22}(X) = -X_1X_2 + a_2X_1\end{cases}$$

Les constantes a_α et b_α sont déterminées par les conditions $\int_\omega\{X_1\chi_{\alpha2} - X_2\chi_{\alpha1}\} = \int_\omega\chi_{12} = \int_\omega\chi_{21} = 0$. On introduit l'espace $\mathcal{D}^{g3} = \{\phi\in H^1(\omega)\mid \int_\omega\phi = \int_\omega X_\alpha\phi = 0\}$ et les trois correcteurs supplémentaires χ_1, χ_2 et χ_3 appartenant à $\mathcal{D}^{g3}$ $\int_\omega\nabla\chi_\alpha\nabla\phi = -\int_\omega\frac{\partial\phi}{\partial X_\alpha}$, $\int_\omega\nabla\chi_3\nabla\phi = -\int_\omega\{X_1\frac{\partial\phi}{\partial X_2} - X_2\frac{\partial\phi}{\partial X_1}\}$ $\forall\phi\in\mathcal{D}^{g3}$. Tous ces correcteurs permettent d'exprimer $\overline{U}^{\delta,a}$ en termes des dérivées de $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et de $\mathcal{R}^{\delta,a}$.

Théorème 4.1. *Le terme correcteur $\overline{U}^{\delta,a}$ est donné par*

$$\begin{cases}\overline{U}_\alpha^{\delta,a}(X,\cdot) = \nu\left(-X_\alpha\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{U}_3^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3} - \chi_{1\alpha}(X)\delta\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{R}_1^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3} + \chi_{2\alpha}(X)\delta\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{R}_2^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3}\right)\\ \overline{U}_3^{\delta,a}(X,\cdot) = \chi_1(X)\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{U}_1^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3} - \mathcal{R}_2^{\delta,a}\right) + \chi_2(X)\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{U}_2^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3} + \mathcal{R}_1^{\delta,a}\right) + \delta\chi_3(X)\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{R}_3^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3}\end{cases} \tag{8}$$

où ν est le coefficient de Poisson.

On en déduit ensuite le tenseur formel des contraintes puis les problèmes vérifiés par les composantes $\mathcal{U}^{\delta,a}$ et $\mathcal{R}^{\delta,a}$ du déplacement élémentaire approché $U_e^{\delta,a}$.

Théorème 4.2. *La traction-compression $\mathcal{U}_3^{\delta,a}$ est nulle. Les flexions $\mathcal{U}_\alpha^{\delta,a}$ et les angles de rotation $\mathcal{R}_i^{\delta,a}$ sont les solutions du problème couplé*

$$\begin{cases} \big(\mathcal{U}_1^{\delta,a},\mathcal{U}_2^{\delta,a},\mathcal{R}^{\delta,a}\big)\in H_0^1(0,L;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3) \\ EI_{3-\alpha}\delta^2\displaystyle\int_0^L \frac{\mathrm{d}\mathcal{R}_\alpha^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3}\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}_\alpha}{\mathrm{d}x_3}+\mu\int_0^L \mathrm{A}\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_1^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3}-\mathcal{R}_2^{\delta,a}\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_2^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3}+\mathcal{R}_1^{\delta,a}\\ \delta\frac{\mathrm{d}\mathcal{R}_3^{\delta,a}}{\mathrm{d}x_3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_1}{\mathrm{d}x_3}-\mathcal{A}_2\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_2}{\mathrm{d}x_3}+\mathcal{A}_1\\ \delta\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}_3}{\mathrm{d}x_3}\end{pmatrix} \\ \quad=\displaystyle\int_0^L \delta f\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{V}_1}{\mathrm{d}x_3}-\mathcal{A}_2\right)\quad \forall(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{A})\in H_0^1(0,L;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)\end{cases}\tag{9}$$

où $I_\alpha=\frac{1}{|\omega|}\int_\omega X_\alpha^2$, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1-(\chi_1,\chi_1) & -(\chi_1,\chi_2) & -(\chi_1,\chi_3)\\ -(\chi_2,\chi_1) & 1-(\chi_2,\chi_2) & -(\chi_2,\chi_3)\\ -(\chi_3,\chi_1) & -(\chi_3,\chi_2) & I_1+I_2-(\chi_3,\chi_3)\end{pmatrix}$; $(\chi_i,\chi_j)=\frac{1}{|\omega|}\int_\omega \nabla\chi_i\nabla\chi_j$.

5. Estimations de l'erreur

On pose $\rho(t)=\inf\{t,(L-t)\}$, $t\in[0,L]$. On introduit l'espace

$$L_\rho^2\big(0,L;L^2(\omega)\big)=\left\{\psi\in L_{\mathrm{loc}}^2\big(0,L;L^2(\omega)\big)\;\middle|\;\int_0^L\rho^2(x_3)\left(\int_\omega\big|\psi(X,x_3)\big|^2\,\mathrm{d}X\right)\mathrm{d}x_3<\infty\right\}$$

Théorème 5.1. *La solution de* (5) *s'écrit $u^\delta=U_e^\delta+\bar{u}^\delta$. On suppose que f appartient à $H^1(0,L)$. On a alors*

$$\big\|\mathcal{T}_\delta(\bar{u}^\delta)-\delta\overline{U}^{\delta,a}\big\|_{L_\rho^2(0,L;H^1(\omega;\mathbb{R}^3))}\leqslant C\delta^3,\qquad \big\|\mathcal{T}_\delta\big(\sigma_{ij}(u^\delta)\big)-\Sigma_{ij}(U^{\delta,a})\big\|_{L_\rho^2(0,L;L^2(\omega))}\leqslant C\delta^2$$

Les constantes sont indépendantes de δ.

Idée de la démonstration. Les estimations globales s'obtiennent en partant du problème éclaté (7) et en procédant comme dans [2]. On en déduit ensuite que $|u^\delta|_{\mathcal{E},\Omega'_\delta}\leqslant C\delta^{5/2}$. Les estimations en δ^2 ou δ^3 s'obtiennent en procédant comme dans [3]. □

Références

[1] G. Griso, Asymptotic behavior of curved rods by the unfolding method, Math. Meth. Appl. Sci. 27 (2004) 2081–2110.
[2] G. Griso, Error estimate and unfolding for periodic homogenization, Asymptotic Anal. 40 (3–4) (2004) 269–286.
[3] G. Griso, Interior error estimate for periodic homogenization, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 251–254.
[4] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation, Masson, 1992.
[5] P.G. Ciarlet, Three-Dimensional Elasticity, North-Holland, 1988.
[6] Ph. Destuynder, Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire, RMA, vol. 2, Masson, 1986.
[7] L. Trabucho, J.M. Viano, Mathematical modeling of rods, in: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.), Handbook of Numerical Analysis, North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 487–974.