



Quelques aspects de l'écoulement potentiel autour d'un corps en rotation

Yves-Marie Scolan

École généraliste d'ingénieurs de Marseille, 13451 Marseille cedex 20, France

Reçu le 1^{er} février 2005 ; accepté après révision le 12 mai 2005

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

Grâce à des transformations conformes simples, on propose un moyen de décrire un écoulement potentiel bidimensionnel autour d'un obstacle de forme quelconque en rotation. Dans la continuité on établit une expression simplifiée des coefficients de la matrice masse/moment d'inertie ajouté. On souligne aussi l'intérêt de connaître partout dans le domaine fluide le potentiel de perturbation en vue d'une formulation intégrale des efforts en écoulement de fluide visqueux et incompressible. **Pour citer cet article : Y.-M. Scolan, C. R. Mecanique 333 (2005).**

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Some aspects of the potential flow around rotating bodies. On the basis of simple conformal mappings, we present a method to describe a two-dimensional potential flow around a rotating obstacle of arbitrary section. As a result, a simplified expression of the matrix of added mass and added moment of inertia is obtained. We also underline the need to determine this perturbation potential all over the fluid domain. Indeed, this is of practical interest in order to express the hydrodynamic moment in incompressible viscous flow. **To cite this article: Y.-M. Scolan, C. R. Mecanique 333 (2005).**

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Écoulement potentiel bidimensionnel ; Écoulement de fluide visqueux et incompressible

Keywords : Computational fluid mechanics; Two-dimensional potential flow; Incompressible viscous flow

Adresse e-mail : ymscolan@egim-mrs.fr (Y.-M. Scolan).

Abridged English version

Two-dimensional potential flows are calculated around simply connected bodies in rotation. The corresponding boundary value problem is usually formulated in terms of a velocity potential ϕ (see Eqs. (1)). This boundary value problem can be solved by classical numerical methods like the Boundary Integral Method for instance. However, following [1] (Art 9.40, pp. 252–253), Eqs. (1) are advantageously formulated in terms of the stream function ψ since a Dirichlet condition (non differential) is prescribed on the moving body surface. The existence of a complex potential $F = \phi + i\psi$ can hence be formally proven. Instead of calculating F in the physical plane, it is expressed in a transformed plane via a Conformal Mapping of the fluid domain. This Conformal Mapping transforms the exterior of the body surface into the exterior of a unit circle. The relationship between the complex coordinates in the physical and transformed planes – noted z and $\zeta = \rho e^{i\alpha}$ respectively – is depicted in Fig. 1.

The expression of the complex potential follows from a Laurent Series of ζ (Eq. (3)). This series has a single pole inside the body contour; it is hence analytic in the fluid domain. The coefficients of this series are determined after performing a Fourier transform (in α) of the Dirichlet condition in Eqs. (2).

By identification, the velocity potential is computed on the body surface by means of a Fourier series in α . As a consequence the calculation of the added moment of inertia is revisited (Eq. (6)). More generally the determination of the coefficients in the matrix of added masses and moment of inertia can be substantially simplified. As a matter of fact, these coefficients are simply calculated on the basis of the Fourier coefficients of ϕ (or ψ) associated each to the three possible degrees of freedom in the plane (Eq. (7)). Except in [3], the obtained formulæ do not appear in any classical textbooks in spite of their evident simplicity.

Applications are first considered for the ellipse. As described in [2] the added moment of inertia is well known analytically. For a rectangular section the computations show a rapid convergence of the Fourier series: as $1/n^4$ where n is the number of the Fourier mode. For a circle with regular fins, the convergence is much slower. However when analytical data are available, the agreement with the present calculations is fairly good.

It is worth noting that this method of solution yields both the stream function and the velocity potential all over the fluid domain by using Fast Fourier Transforms. Indeed this is another result of this note to emphasize the interest to know the solution of the boundary value problem (1) when the force and moment are to be calculated on a body in an incompressible viscous flow. As a matter of fact, the velocity potentials associated to the three planar degrees of freedom appear in the force formulation originally developed by [9]. This formulation is an alternative method to the direct integration of the Cauchy Stress Tensor. In that case an explicit calculation of the pressure is not required. This technique is also well adapted to the Lagrangian tracking method of the vorticity (discrete vortex or blob vortex). Applications of this formulation are found in [10] and some extensions are achieved in [11] by using Conformal Mapping. The present formulation significantly contributes to simplify the force and moment computation.

1. Introduction

On se place dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels bidimensionnels. On souhaite résoudre le problème aux limites vérifié par le potentiel de perturbation rendant compte d'un écoulement autour d'un obstacle simplement connexe en rotation. On désigne par ϕ ce potentiel, il est calculé dans le repère attaché au corps en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'origine O du repère. Le potentiel ϕ vérifie les équations suivantes

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0, & \text{dans le domaine fluide } \Omega \\ \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n} = -\omega\vec{n} \cdot (\vec{z} \wedge \vec{r}), & \text{sur la surface } B \text{ du corps} \\ \vec{\nabla}\phi \rightarrow 0, & \text{à l'infini,} \end{cases} \quad (1)$$

où \vec{n} désigne la normale extérieure au corps en tout point, \vec{z} est un vecteur unitaire perpendiculaire au plan de l'écoulement et \vec{r} est le vecteur qui relie l'origine du repère à un point du contour B . Les méthodes de résolution du problème aux limites (1) sont légion, mais il semble qu'il y en ait une plus simple que les autres. C'est l'objet de cette Note d'en exposer le principe.

2. Eléments théoriques

Dans [1] (Art 9.40 pp. 252–253) est établi le problème aux limites vérifié par la fonction de courant relative au même problème physique, il se formule

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0, & \text{dans le domaine fluide } \Omega \\ \psi = \frac{1}{2}\omega|z|^2, & \text{sur la surface } B \text{ du corps} \\ \vec{\nabla} \psi \rightarrow 0, & \text{à l'infini} \end{cases} \quad (2)$$

où $z = x + iy$ désigne l'affixe d'un point dans Ω et $|z|$ est son module. On montre facilement que l'écoulement en question peut être décrit par un potentiel complexe F tel que

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\zeta^n} \quad (3)$$

où l'affixe $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\alpha}$ désigne le point image de $z = f(\zeta)$ par la transformation conforme inverse f^{-1} . Comme préconisé par [2] (pp. 328–329), cette fonction transforme le domaine Ω extérieur à B en l'extérieur d'un cercle unité. Le corps est donc décrit par l'équation $|\zeta| = 1$ comme illustré par la Fig. 1. La fonction F n'a de pôles qu'à l'intérieur du corps, elle est donc analytique partout dans Ω . L'existence de la fonction f est assurée par le théorème de Riemann pour un corps simplement connexe.

Les coefficients complexes a_n sont déterminés par identification de la partie imaginaire de F d'une part au second membre de la condition de Dirichlet pour ψ d'autre part. On évalue donc la transformée de Fourier de $\frac{1}{2}\omega|z|^2$

$$\frac{1}{2}\omega|z|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\alpha + B_n \sin n\alpha \quad (4)$$

où la sommation peut être tronquée à $N/2$ modes de Fourier. Par conséquent on détermine le potentiel des vitesses de la partie réelle de F

$$\phi = \sum_{n=0}^{N/2-1} \frac{1}{\rho^n} [B_n \cos n\alpha - A_n \sin n\alpha] \quad (5)$$

En pratique de simples Transformées de Fourier (FFT) sont nécessaires. On en déduit ensuite le moment d'inertie ajoutée M_z selon

$$M_z = \frac{\rho_f}{\omega^2} \int_B \phi \phi_{,n} d\ell = \frac{\rho_f}{\omega^2} \int_0^{2\pi} \Re(F) \Re\left[\frac{dF}{d\zeta} e^{i\alpha}\right] d\alpha = \pi \rho_f \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 \quad (6)$$

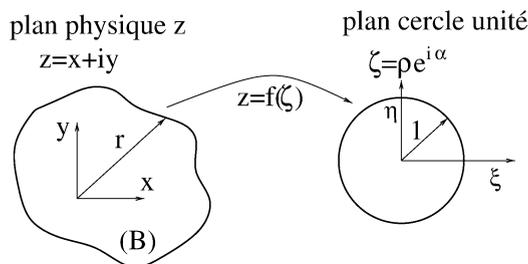


Fig. 1. Transformation géométrique du domaine physique extérieur au contour (B) en l'extérieur d'un cercle unité.

où ρ_f est la masse volumique du fluide. Cette identité confirme que M_z est calculé sur la base d'une simple FFT à condition de pouvoir déterminer la transformation conforme f . On trouve une formulation similaire dans [3] mais curieusement, en dépit de sa réelle simplicité, elle n'apparaît dans aucun livre de base en Hydrodynamique. De surcroît cette formulation appelle une généralisation. On peut en effet calculer tous les coefficients λ_{ij} de la matrice masse/moment d'inertie ajoutés à partir de l'équation

$$\lambda_{ij} = \pi \rho_f \sum_{n=0}^{\infty} n (A_n^{(i)} A_n^{(j)} + B_n^{(i)} B_n^{(j)}) \quad (7)$$

où $(A_n^{(i)}, B_n^{(i)})_{i=1,2,3}$ sont les coefficients de Fourier de $(-y(\alpha), x(\alpha), \frac{1}{2}r^2(\alpha))$ respectivement. C'est là le principal résultat de cette Note.

3. Applications

Pour un corps B de forme elliptique, les développements analytiques sont détaillés dans [2]. La transformation conforme f est donnée par

$$z = f(\zeta) = \frac{1}{2} \left[(a+b)\zeta + \frac{a-b}{\zeta} \right] \quad (8)$$

où (a, b) désignent les demi-axes. Par conséquent le moment d'inertie ajoutée M_z se déduit exactement du mode 2 de la série de Fourier (4), soit

$$M_z = \frac{1}{8} \pi \rho_f (a^2 - b^2)^2 \quad (9)$$

Pour une section rectangulaire on utilise successivement la transformation de Karman–Trefftz (voir [4] par exemple) puis la transformation de Theodorsen–Garrick (voir [5]). La première transformation s'appuie sur de simples formules analytiques. La deuxième met en œuvre une succession de Transformées de Fourier directes et inverses dans un algorithme de point fixe. La précision est donc liée à la convergence de cet algorithme. L'alternative est une classique transformation de Schwartz–Christoffel mais avec des limitations notamment pour calculer le potentiel ϕ du problème aux limites (1) partout dans le domaine fluide. Avec quelques astuces (voir [6] et [7]), il est néanmoins possible d'exprimer M_z sous forme d'intégrales et de séries calculables analytiquement et/ou numériquement.

Pour le cas particulier du carré, on confronte la formulation présente à celle déjà disponible dans la littérature. La formule (6) fournit la valeur numérique $M_z = 0.72456 \rho_f a^4$ avec $N = 2^9$ modes de Fourier, à comparer à la valeur $M_z = 0.724576 \rho_f a^4$ fournie par [7] (Eq. (74), p. 7). La Fig. 2 montre la variation de $|a_n|$ avec n pour les seuls indices $n = 4p$ avec p entier non nul. Une régression linéaire montre que les termes de la série (6) décroissent approximativement comme $1/n^4$.

On considère ensuite une section circulaire munie d'ergots droits comme illustré sur la Fig. 3. La transformation conforme est décrite dans [8]. Le moment d'inertie ajoutée est calculé de manière analytique par [7]. Sa méthode s'appuie sur une transformée de Hilbert du potentiel et conduit au calcul d'une intégrale par valeur principale relativement compliquée. Pour un cercle de rayon a muni de 2 ergots de longueur $b - a$, [7] obtient

$$M_z = \rho_f a^4 \left(\frac{2\beta^2 - \beta \sin 4\beta + 1/2 \sin^2 2\beta}{\pi \sin^4 \beta} - \frac{\pi}{2} \right), \quad \sin \beta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \beta \in \left[\frac{\pi}{2} : \pi \right] \quad (10)$$

La Fig. 4 compare le résultat des Éqs. (6) et (10). Du fait de la forte irrégularité du contour, la décroissance des termes $n|a_n|^2$ de la série (6) est lente comme le montre la Fig. 5.

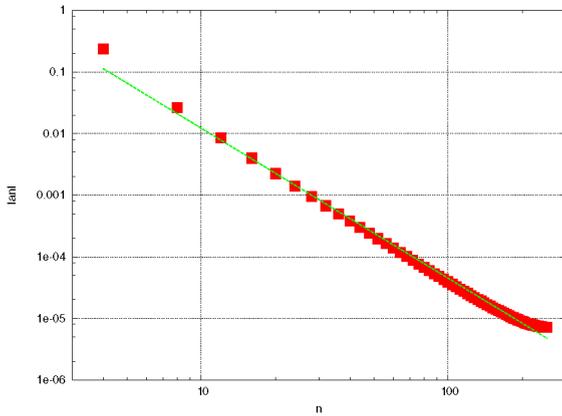


Fig. 2. Section carrée : variation de $|a_n|$ avec n pour $n = 4p$ et p entier non nul ; une régression linéaire (ligne) est superposée aux résultats numériques (symboles).

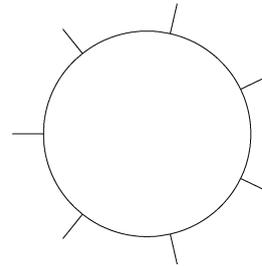


Fig. 3. Exemple de section circulaire de rayon a munie d'ergots droits (ici 7) de longueur $b - a$ répartis uniformément le long du contour.

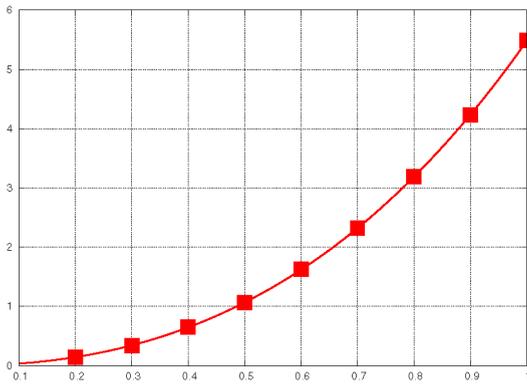


Fig. 4. Section circulaire munie de 2 ergots : variation de $M_z / (\rho_f a^4)$ avec la longueur $(b - a)/a$ des ergots ; comparaison des résultats numériques (symboles) et analytiques (trait plein).

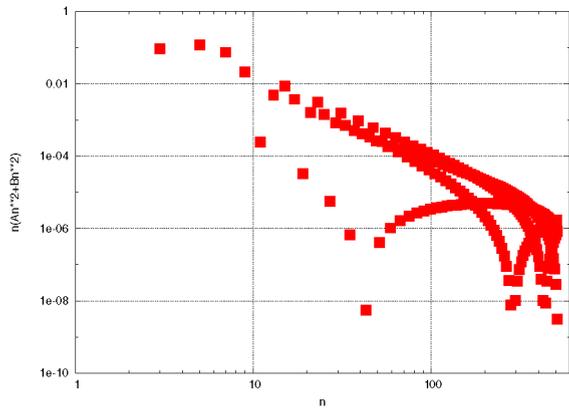


Fig. 5. Section circulaire munie de 2 ergots droits de longueur $(b - a)/a = 0.5$; variation de $n|a_n|^2$ avec n pour les modes paires seulement, par symétrie les modes impaires sont identiquement nuls.

4. Connexion avec les écoulements de fluide visqueux

On ne peut justifier l'utilisation du moment d'inertie ajoutée en rotation autour d'un corps que lorsque les hypothèses à la base de la théorie potentielle, sont vérifiées. Cela signifie que pour un obstacle non circulaire, les aspérités ou corrugations doivent être de faible amplitude de telle sorte que l'écoulement résultant soit peu détaché. On ne peut donc considérer que des écoulements à faibles nombres de Keulegan–Carpenter entre autres.

Il y a néanmoins des circonstances où le calcul du potentiel de perturbation ϕ introduit plus haut est fort appréciable alors que pourtant on s'intéresse aux écoulements bidimensionnels de fluide visqueux et incompressible. En effet sur la base des travaux entrepris par [9], il est proposé une formulation alternative à l'intégration directe du tenseur de Cauchy qui évite de calculer explicitement la pression. Le principe est de projeter les équations de conservation de quantité de mouvement sur des fonctions solutions de problèmes aux limites du type (1). Cette

technique est appliquée dans [10] via une méthode de *blob-vortex* particulièrement bien adaptée à cette formulation. Plus récemment on étend dans [11] le champ d'application de cette méthode grâce à l'emploi de transformation conforme. Les présents résultats contribuent significativement à la simplification des formules pour le calcul du moment.

Références

- [1] L.M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, fourth ed., McMillan, 1960, 660 pp.
- [2] N.E. Kochin, I.A. Kibel, N.V. Roze, *Theoretical Hydromechanics*, Interscience, 1964.
- [3] K. Wendel, *Hydrodynamische Massen und Hydrodynamische Massenträgheitsmomente*, Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft, Bd. 44, 1950, pp. 207–255 (traduction anglaise de 1956).
- [4] N. Halsey, Potential flow analysis of multielement airfoils using conformal mapping, *AIAA J.* 17 (1979) 1281–1288.
- [5] T. Theodorsen, I.E. Garrick, General potential theory of arbitrary wing sections, *NACA Rept.* 452, 1933.
- [6] B. Molin, On the frictional damping in roll of ship sections, *Int. Shipbuilding Progr.* 51 (1) (2004) 59–85.
- [7] J.N. Newman, Added moment of inertia of two-dimensional cylinders, *J. Ship Res.* 23 (1979) 1–8.
- [8] M. Lavrentyev, B. Chabat, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe*, Mir, Moscow, 1977.
- [9] L. Quartapelle, M. Napolitano, Force and moment in incompressible flows, *AIAA J.* 21 (1983) 911–913.
- [10] B. Protas, A. Styczek, A. Nowakowski, An effective approach to computation of forces in viscous incompressible flows, *J. Comput. Phys.* 159 (2) (2000) 231–245.
- [11] Y.-M. Scolan, Quelques aspects de l'écoulement bidimensionnel de fluide visqueux autour de sections munies de protubérances régulières, in : Actes des 10^{èmes} Journées de l'Hydrodynamique, Nantes, 2005.