Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Mecanique 333 (2005) 838–842
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Fermetures entropiques pour les systèmes bifluides à sept équations

Mikael Papin [a,b,c], Rémi Abgrall [a,d,c,*]

[a] Projet Scalapplix, INRIA futurs, parc club Orsay, université ZAC des vignes, bâtiment G, 4, rue Jacques-Monod, 91893 Orsay cedex, France
[b] CEA/CESTA, BP 2, 33114 Le Barp, France
[c] Mathématiques appliquées de Bordeaux, université Bordeaux 1, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France
[d] Institut Universitaire de France, 103, boulevard Saint-Michel, 75005 Paris, France

Reçu le 17 mars 2005 ; accepté après révision le 20 septembre 2005

Disponible sur Internet le 28 octobre 2005

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

Dans cette Note, nous proposons une technique pour rendre thermodynamiquement consistant un modèle donné d'écoulement multiphasique possédant deux vitesses et deux pressions. Pour ce faire, nous remarquons que le modèle continu associé au modèle discret d'Abgrall et Saurel (2003) vérifie le second principe de la thermodynamique. Cete remarque est ensuite utilisée pour construire les termes correctifs à apporter aux grandeurs d'interface. ***Pour citer cet article : M. Papin, R. Abgrall, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Abstract

Entropic closure laws for two-fluids seven equation models. In this Note, we propose a way to obtain two-fluid two-pressures multiphase models that satisfy an entropy inequality. We first notice that the continuous model associated to the discrete model of Abgrall and Saurel (2003) satisfies the entropy principles. Thanks to this, we show how to modify existing models in order to achieve the second law of thermodynamics. ***To cite this article: M. Papin, R. Abgrall, C. R. Mecanique 333 (2005).***

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Système bifluides

Keywords: Computational fluid mechanics; Two fluid system

Abridged English version

In general, the modeling of two-fluid flows is obtained from modifications of the classical Navier–Stokes equations. There are also lots of simplified models where the viscous effects as well as the Fourier law are neglected. We are interested here only in these models and more particularly in those known as 'seven equations models' where each phase has its own pressure and own velocity which might possibly be coupled together *via* relaxation terms that represent topological effects, see e.g. [2,14]. These models require, in addition to the equation of state of the phases, to

* Corresponding author.
Adresses e-mail : mikael.papin@math.u-bordeaux1.fr (M. Papin), remi.abgrall@math.u-bordeaux1.fr (R. Abgrall).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2005.09.006

define a velocity $\mathbf{u}_I$ and a pressure p_I said to be 'interfacial'. They are generally written as Eq. (1). Many authors have been interested in this system, in particular from a mathematical point of view. It is known that this non-conservative system is only conditionally hyperbolic, and that the product $\mathcal{F}_i \nabla_{\mathbf{x}} \alpha$ (see Eq. (1)) needs to be properly defined in discontinuities.

Another field of investigation is the search for closings that are consistent with an entropy principle. In this paper, we focus on how to define the interfacial variables that guaranty the second principle of thermodynamics given for two-fluid flows by Eqs. (3), see [1–3]. These properties are known for the Baër and Nunziato closure laws $(\mathbf{u}_I, p_I) = (\mathbf{u}^{(k)}, p^{(\bar{k})})$ [2] where k refer to one fluid and $\bar{k}$ to the other. In addition to these physical entropies, it is possible to define mathematical partial entropies (see Vol'Pert [4] and Massot [5]).

In a previous work, Abgrall and Saurel have proposed a discrete model to compute such flows [6]. This purely discrete model inherits the properties of the Riemann solvers it uses. These solvers are single-fluid Euler Riemann ones, modified to be able to approximate two-fluids problems with possibly complex physical features as phase transition or surface tension. So, if the Riemann solvers are entropic, the whole model will be so [7].

We first show that this scheme [11] leads to a continuous model that is entropy satisfying. This model is written in Eq. (5) in a formulation that takes surface tension into account. It uses a relaxation term that appears at the microscopic scale in a volumic source term, and at the macroscopic level as a factor of the norm of the volume fraction gradient α. These terms translate the propagation of acoustic waves across individual interfaces and depend strongly on the flow topology. It also imposes mechanical equilibrium at an interface where the jump of α is unity. Then the model without volumic source terms has an entropy that satisfies the physical principle (3).

The understanding of the discrete model allows us to propose a generic class of entropy satisfying models, taking the macroscopic relaxation term into account (see Eq. (6) with generalized definitions of $\mathbf{u}_I$ and p_I). Doing so, conditions can be found to ensure the respect of the second law of thermodynamics.

1. Introduction

La modélisation des problèmes bifluides nécessite l'utilisation de modèles dérivant des équations de Navier–Stokes monofluides classiques. Il existe aussi un grand nombre de modèles simplifiés où on néglige les effets diffusifs et la loi de Fourier. Nous nous intéressons ici uniquement à ces modèles et plus particulièrement à ceux dits « modèles à sept équations », faisant apparaître deux pressions et deux vitesses. Ces modèles nécessitent, en plus des fermetures thermodynamiques habituelles concernant les énergies internes et pressions phasiques, de définir une vitesse $\mathbf{u}_I$ et une pression p_I dites « interfaciales ». Ils s'écrivent de manière générale

$$\partial_t \alpha^{(k)} \mathcal{W}^{(k)} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \big(\alpha^{(k)} F(\mathcal{W}^{(k)})\big) = \mathcal{F}_I \nabla_{\mathbf{x}} \alpha^{(k)} \tag{1}$$
$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho E \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho\mathbf{u} \\ \rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u} + p\mathbb{I} \\ \rho H \mathbf{u} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{F}_I = \begin{pmatrix} -\mathbf{u}_I \\ 0 \\ p_I \mathbb{I} \\ p_I \mathbf{u}_I \end{pmatrix}$$

où l'énergie totale E, l'enthalpie totale H sont données par $E = e_i + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2}$, $H = E + \frac{p}{\rho}$, $p = p(\rho, e_i)$ étant la pression et e_i l'énergie interne. Le tenseur $\mathbb{I}$ est le tenseur identité. Les exposants $^{(k)}$ et $^{(\bar{k})}$ font référence aux deux fluides.[1] Les fermetures concernant les grandeurs interfaciales, indicées $_I$, sont usuellement de la forme $p_I = p^{(k)} + \xi^{(k)} \Delta^{\bar{k}k} p$ et $\mathbf{u}_I = \mathbf{u}^{(k)} + \theta^{(k)} \Delta^{\bar{k}k} \mathbf{u}$ avec $\theta^{(k)} \in [0,1]$, $\xi^{(k)} \in [0,1]$, $\theta^{(k)} + \theta^{(\bar{k})} = 1$, $\xi^{(k)} + \xi^{(\bar{k})} = 1$, $\Delta^{\bar{k}k} p = p^{(\bar{k})} - p^{(k)} = -\Delta^{k\bar{k}} p$ et $\Delta^{\bar{k}k} \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)} = -\Delta^{k\bar{k}} \mathbf{u}$, voir par exemple [1] et les références incluses.

Un grand nombre d'auteurs se sont intéressés à ce système, et en particulier aux problèmes mathématiques qu'il soulève. Il est connu que ce système non-conservatif est hyperbolique sous condition, et que le produit $\mathcal{F}_I \nabla_{\mathbf{x}} \alpha$ doit être mathématiquement défini car il peut être le produit de deux Dirac ce qui n'a, *a priori*, aucun sens. Un autre

[1] Dans nos conventions, si $(k) = (1)$, $(\bar{k}) = (2)$ et réciproquement.

champ d'investigations est la recherche de fermetures garantissant un principe d'entropie. Dans cette Note, nous nous intéressons aux entropies physiques $S^{(k)}$ définies par la loi de Gibbs où $T^{(k)} > 0$ est la température

$$T^{(k)}\,\mathrm{d}S^{(k)} = \mathrm{d}e_i^{(k)} - \frac{p^{(k)}}{\rho^{(k)2}}\,\mathrm{d}\rho^{(k)} \tag{2}$$

et à la définition des grandeurs interfaciales garantissant le second principe de la thermodynamique [1–3]

$$\partial_t S^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}\nabla_{\mathbf{x}} S^{(k)} \geqslant 0, \qquad \sum_k \alpha^{(k)}\rho^{(k)}\big(\partial_t S^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}\nabla_{\mathbf{x}} S^{(k)}\big) \geqslant 0 \tag{3}$$

Pour (1), les entropies phasiques données par la loi de Gibbs vérifient

$$\partial_t S^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} S^{(k)} = \frac{\xi^{(k)}\theta^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}p\,\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}}{\alpha^{(k)}\rho^{(k)}}\cdot\frac{\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)}}{T^{(k)}}$$

Le second principe de la thermodynamique ne peut donc être respecté que si $\xi^{(k)}\theta^{(k)} = 0$, $\forall k$, ce qui impose $(\mathbf{u}_I, p_I) = (\mathbf{u}^{(k)}, p^{(\bar{k})})$. Cette fermeture est celle du modèle de Baër et Nunziato [2].

Dans le cadre de fermetures thermodynamiques par des lois d'état de gaz parfaits pour lesquelles $p = (\gamma - 1)\rho e_i$, $e_i = C_V T$, $\eta = \frac{p}{\rho^\gamma}$, $S = C_V \ln(\eta)$, l'entropie mathématique partielle s (voir Vol'Pert [4] et Massot [5] pour les définitions et un résultat d'existence locale) s'écrit $s = S_0\alpha^{(1)}\alpha^{(2)} - \sum_k a^{(k)}\rho^{(k)}\ln(\alpha^{(k)}p^{(k)}/(\alpha^{(k)}\rho^{(k)})^{\gamma^{(k)}})$. Elle vérifie

$$\partial_t s - \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\sum_k a^{(k)}\rho^{(k)}\mathbf{u}^{(k)}\ln\left(\frac{\alpha^{(k)}p^{(k)}}{(\alpha^{(k)}\rho^{(k)})^{\gamma^{(k)}}}\right) \leqslant \sum_k\left[S_0\mathbf{u}_I\alpha^{(k)} - p_I\frac{\mathbf{u}_I - \mathbf{u}^{(k)}}{\epsilon^{(k)}}\right] \tag{4}$$

2. Modèle discret (DEM)

En 2003, Abgrall et Saurel [6] proposent un modèle discret en lieu et place des habituels modèles continus à discrétiser. Ce modèle, de part sa construction à base de solveurs de Riemann monofluides (généralisés au cadre de problèmes en présence de fluides purs), hérite de toutes les propriétés des solveurs de Riemann approchés utilisés. Il est en particulier entropique si ces solveurs le sont [7]. Ce modèle discret présente l'avantage de pouvoir prendre en compte une physique complexe via la construction de problèmes de Riemann approchés généralisés au changement de phase, à la détonique [8,9], ou plus simplement à la prise en compte de tension de surface [10].

L'étude de la limite de ce modèle [11] met en évidence un modèle continu garantissant par construction un principe d'entropie phasique qui s'écrit, dans sa formulation prenant en compte la tension superficielle,

$$\partial_t\alpha^{(k)}\mathcal{W}^{(k)} + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\big(\alpha^{(k)}F(\mathcal{W}^{(k)})\big) = \mathcal{F}_I^{(k)}\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)} + S_C^{(k)}(\mathbf{n}_\Delta^{(k)})\|\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)}\| + \int_\theta a_I(\theta)S_C^{(k)}(\mathbf{n}_\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

en considérant

$$\mathcal{F}_I^{(k)} = \begin{pmatrix} -\mathbf{u}_I \\ 0 \\ p_I^{(k)}\mathbb{I} \\ p_I^{(k)}\mathbf{u}_I + \tilde{\lambda}\tilde{\mu}\Delta^{\bar{k}k}p\ \Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_C^{(k)}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} -\tilde{\mu}\Delta^{\bar{k}k}p \\ 0 \\ \tilde{\lambda}\Delta^{\bar{k}k}[\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n} \\ \tilde{\lambda}(\mathbf{u}_I\cdot\mathbf{n})(\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}) + \tilde{\mu}p_I^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}p \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{u}_I = \mathbf{u}^{(k)} + \tilde{\theta}^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}$ et $p_I^{(k)} = p^{(k)} + \tilde{\xi}^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}p$ (voir Tableau 1, ligne 3), $\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)} = \|\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)}\|\mathbf{n}_\Delta^{(k)}$, et pour finir $\Delta^{\bar{k}k}p = p^{(\bar{k})} - p^{(k)} - (-1)^k\sigma(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2})$ et $\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(\bar{k})} - \mathbf{u}^{(k)}$. Les grandeurs r_1 et r_2 sont les rayons de courbure principaux, σ la tension superficielle, et $a_I(\theta)$ une concentration d'aire interfaciale directionnelle, c'est-à-dire la probabilité de présence de contacts entre les fluides k et $\bar{k}$ orientés dans la direction $\mathbf{n}(\theta)$. Le terme $S_C^{(k)}$ est une relaxation aux interfaces qui est activée au niveau microscopique par la concentration d'aire interfaciale et au niveau macroscopique par la norme du gradient de probabilité de présence : dans le cas d'un écoulement entre fluides purs, il impose l'équilibre mécanique à travers le contact. Oubliant le terme source microscopique (terme intégral de (5)), l'entropie phasique de Gibbs vérifie alors

$$\partial_t S^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} S^{(k)} = \frac{\|\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)}\|}{\alpha^{(k)}\rho^{(k)}T^{(k)}}\frac{\tilde{\lambda}\tilde{\mu}}{Z^{(\bar{k})}}\big(\Delta^{\bar{k}k}p + Z^{(\bar{k})}\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\Delta^{(k)}\big)^2 \geqslant 0$$

Tableau 1
Coefficients des fermetures interfaciales. Les coefficients λ, μ et ν sont les propositions de correction, excepté pour Baër et Nunziato et DEM qui ne le nécessitent pas

Table 1
Interfacial closure coefficients. Coefficients λ, μ and ν are correction proposals, except for Baër and Nunziato and DEM which do not need to be corrected

Référence	$\xi^{(k)}$	$\theta^{(k)}$	$\lambda \geqslant 0$	$\mu \geqslant 0$	ν
Baër et Nunziato [2]	$(0,1)$	$(1,0)$	0	0	0
Glimm [13]	$\alpha^{(k)}$	$\alpha^{(k)}$	1/2	1/2	$\alpha^{(k)}\alpha^{(\bar{k})}$
Limite de DEM [7,11]	$\tilde{\xi}^{(k)} = \frac{Z^{(k)}}{Z^{(k)}+Z^{(\bar{k})}}$	$\tilde{\theta}^{(k)} = \frac{Z^{(\bar{k})}}{Z^{(k)}+Z^{(\bar{k})}}$	$\tilde{\lambda} = \frac{Z^{(k)}Z^{(\bar{k})}}{Z^{(k)}+Z^{(\bar{k})}}$	$\tilde{\mu} = \frac{1}{Z^{(k)}+Z^{(\bar{k})}}$	$\tilde{\nu} = \tilde{\lambda}\tilde{\mu}$
Abgrall et Saurel [14]	$\alpha^{(\bar{k})}$	$\frac{m^{(\bar{k})}}{m^{(\bar{k})}+m^{(k)}}$	1/2	1/2	0
Seguin et al. [15,16]	$\frac{a^{(\bar{k})}m^{(k)}}{a^{(\bar{k})}m^{(k)}+a^{(k)}m^{(\bar{k})}}, a^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)}\Gamma^{(k)}}{c^{(k)2}}$	$\frac{m^{(\bar{k})}}{m^{(\bar{k})}+m^{(k)}}$	1/2	1/2	0
Ransom et Hicks [12]	$\tilde{\xi}^{(k)}$	$\frac{1}{2}$	1/8	$(\xi^{(k)}-\xi^{(\bar{k})})^2$	$-\tilde{\nu}$

où $Z = \rho c$ désigne l'impédance acoustique, c étant la vitesse du son. Par suite, les six relations de (3) et (4) sont vérifiées. La fermeture la plus proche dans la littérature est celle de Ransom et Hicks [12], avec une écriture de μ similaire dans le terme microscopique, qui rentre dans le cadre présenté à la Section 1, mais n'assure pas de principe d'entropie.

3. Formulation entropique générale

La compréhension du modèle continu correspondant au modèle discret d'Abgrall et Saurel permet de proposer une classe générique de modèles entropiques, prenant en compte le terme de relaxation macroscopique.

$$\partial_t \alpha^{(k)}\mathcal{W}^{(k)} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \big(\alpha^{(k)} F(\mathcal{W}^{(k)})\big) = \mathcal{F}_I \nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)} + S_C^{(k)}(\mathbf{n}_\Delta^{(k)})\|\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)}\| + \int a_I(\theta) S_C^{(k)}(\mathbf{n}_\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{6}$$

$$\mathcal{F}_I^{(k)} = \big(-\mathbf{u}_I, 0, p_I^{(k)}\mathbb{I}, p_I^{(k)}\mathbf{u}_I + \nu \Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}\Delta^{\bar{k}k} p\big)$$

avec les définitions des grandeurs interfaciales généralisées $p_I^{(k)} = p^{(k)} + \xi^{(k)}\Delta^{\bar{k}k} p \Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\Delta^{(k)}$ et $\mathbf{u}_I = \mathbf{u}^{(k)} + \theta^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}$, la conservation des grandeurs totales imposant $\Delta^{\bar{k}k} p = -\Delta^{k\bar{k}} p$ et $\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u} = -\Delta^{k\bar{k}}\mathbf{u}$. En omettant toujours le terme source volumique, les entropies phasiques vérifient

$$\begin{aligned}\partial_t S^{(k)} + \mathbf{u}^{(k)}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} S^{(k)} = \frac{\|\nabla_{\mathbf{x}}\alpha^{(k)}\|}{\alpha^{(k)}\rho^{(k)}T^{(k)}}\big[&(\lambda\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\Delta^{(k)} + \xi^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}p)(\theta^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\Delta^{(k)} + \mu\Delta^{\bar{k}k}p)\\ &+ (\nu - \lambda\mu)\Delta^{\bar{k}k}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_\Delta^{(k)}\Delta^{\bar{k}k}p\big]\end{aligned}$$

Un jeu de conditions sur les différents coefficients est alors nécessaire pour garantir les principes d'entropies physiques (3) et mathématiques (4). Un exemple de conditions englobant le modèle précédent est $2\sqrt{\mu\lambda\xi^{(k)}\theta^{(k)}} \geqslant \theta^{(k)}\xi^{(k)} + \nu$, $\theta^{(k)}\xi^{(k)} \geqslant 0$ et $\lambda\mu \geqslant 0$.

Des corrections peuvent être construites à partir de ces contraintes pour rendre entropiques les modèles qui ne le sont pas nécessairement (voir le Tableau 1). La plus simple qui fonctionne toujours est de prendre $(\lambda, \mu, \nu) = (1/2, 1/2, 0)$. De même que d'autres jeux de conditions peuvent être exhibés, ce modèle générique ne regroupe certainement pas tous les modèles vérifiant les principes d'entropies.

4. Conclusion

Nous avons pu exhiber une correction à ajouter aux modèles usuels pour les rendre entropiques, par rapport à l'entropie de Gibbs, quelle que soit la loi d'état d'état utilisée. Cette correction est calquée sur le modèle discret de

Abgrall et Saurel et correspond à la prise en compte d'un terme de relaxation physique lié au gradient de probabilité de présence des phases qui est le pendant macroscopique des termes de relaxation volumiques microscopiques.

Cette correction ne change en rien le caractère non-conservatif, non-linéaire et conditionnellement hyperbolique de ce type de systèmes. Elle prétend juste les rendre mieux posés vis-à-vis du principe d'entropie (croissance des entropies de Gibbs sur les lignes de courant) et de la prise en compte de phénomènes de relaxation négligés jusqu'alors.

L'impact sur la simulation numérique a été observé sur le modèle discret de Abgrall et Saurel. On observe d'une part une très bonne description des interactions chocs/discontinuités, tenant plus de l'absence de définition du produit $\mathcal{F}_I \nabla_{\mathbf{x}}\alpha$ dans la méthode, et d'autre part, un excellent comportement des pressions et des vitesses aux interfaces entre fluides purs ($[\alpha^{(k)}] \approx 1$) : le terme en $\|\nabla_{\mathbf{x}}\alpha\|$ impose les relations de saut aux pressions et vitesses phasiques, c'est-à-dire que $p^{(1)} - p^{(2)} = \sigma H$ et $\mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_\Delta = \mathbf{u}^{(2)} \cdot \nu_\Delta$. C'est d'ailleurs, à notre connaissance, la seule modélisation le permettant.

Remerciements

M. Papin est financé par une bourse de thèse du Commissariat à l'Energie Atomique.

Références

[1] D.A. Drew, S.L. Passman, Theory of Multicomponent Fluids, Appl. Math. Sci., vol. 135, Springer, 1998.
[2] M.R. Baër, J.W. Nunziato, A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition in reactive granular materials, Int. J. Multiphase Flows 12 (1986) 861–889.
[3] S. Gavrilyuk, R. Saurel, Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia, J. Comput. Phys. 175 (2002) 326–360.
[4] A.L. Vol'Pert, S.I. Hudjaev, On the Cauchy problem for composite systems of non-linear differential equations, Math. USSR-Sb. 16 (1972) 517–544.
[5] M. Massot, Modélisation mathématique et numérique de la combustion des mélanges gazeux, Thèse de doctorat, École Polytechnique, 1996.
[6] R. Abgrall, R. Saurel, Discrete equations for physical and numerical compressible multiphase mixtures, J. Comput. Phys. 186 (2003) 361–396.
[7] A. Chinnayya, Construction de modèles et de méthodes numériques pour les écoulements multiphasiques à phases compressibles. Application à la simulation des ondes de détonation dans les matériaux hautement énergétiques, Thèse de doctorat, Université de Provence, Aix-Marseille I, 2002.
[8] R. Saurel, O. Le Metayer, A multiphase model for compressible flows with interfaces, shocks, detonation waves and cavitation, J. Fluid Mech. 431 (2001) 239–271.
[9] O. Le Métayer, J. Massoni, R. Saurel, Modelling evaporation fronts with reactive Riemann solvers, J. Comput. Phys. 205 (2) (2005) 567–610.
[10] L. Hallo, M. Papin, Construction d'un solveur analytique pour la résolution de problèmes de Riemann bifluides 1D. Application à l'extension aux problèmes de Riemann complexes du modèle DEM, Rapport LRC-04-02, CEA/CESTA – Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux, 2004.
[11] M. Papin, Contribution à la modélisation d'écoulement supersoniques particulaires ; Étude et validation d'un modèle bifluide discret, Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1, 2005.
[12] T.N. Dinh, R.R. Nourgaliev, T.G. Theofanous, Understanding the ill-posed two-fluid model, in: 10th International Topical Meeting on Nuclear reactor Thermal Hydraulics (NURETH-10), Seoul, Korea. October 5–9, 2003.
[13] J. Glimm, D. Saltz, D.H. Sharp, Renormalization group solution of two-phase flow equations for Rayleigh–Taylor mixing, Phys. Lett. A 222 (1996) 171–176.
[14] R. Abgrall, R. Saurel, A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows, J. Comput. Phys. 150 (1999) 425–467.
[15] F. Coquel, T. Gallouët, J.-M. Hérard, N. Seguin, Closure laws for a two-fluid two-pressure model, C. R. Acad. Sci. Paris 134 (2002) 927–932.
[16] T. Gallouët, J.-M. Hérard, N. Seguin, Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach, Math. Models Methods Appl. Sci. (M3AS) 14 (5) (2004) 663–700.