

# Résistance d'un milieu poreux à phase solide hétérogène

Julien Sanahuja<sup>a,\*</sup>, Luc Dormieux<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Lafarge centre de recherche, 95, rue du Montmurier, BP 15, 38291 Saint-Quentin Fallavier cedex, France

<sup>b</sup> ENPC, institut Navier, 6 et 8, avenue Blaise-Pascal, 77455 Marne-la-Vallée, France

Reçu le 12 septembre 2005 ; accepté le 20 septembre 2005

Disponible sur Internet le 26 octobre 2005

Présenté par André Zaoui

## Résumé

On s'intéresse au critère de rupture macroscopique d'un matériau poreux dont la phase solide est constituée d'un ensemble de sphères composites formées d'un noyau infiniment résistant entouré d'une calotte dont la rupture est caractérisée par un critère de von Mises. Un critère macroscopique approché, établi par voie micromécanique, est formulé analytiquement. Le résultat est particulièrement simple dans le cas limite d'une calotte d'épaisseur infinitésimale. Le critère en question permet potentiellement de prévoir la prise et l'évolution de la résistance d'une pâte de ciment en cours d'hydratation. *Pour citer cet article : J. Sanahuja, L. Dormieux, C. R. Mecanique 333 (2005).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Strength of a porous medium with a heterogeneous solid phase.** The strength of a porous medium, the solid phase of which is made up of composite spheres is determined in the framework of a micromechanical self-consistent reasoning. The strength of the spherical cores is infinite while the surrounding layers are made up of a von Mises material. Application of the modified secant method yields an analytical expression of the macroscopic strength. Such results can be used in order to predict the setting and strength criterion of a cement paste during hydration. *To cite this article : J. Sanahuja, L. Dormieux, C. R. Mecanique 333 (2005).* © 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Milieu poreux ; Micromécanique ; Homogénéisation non linéaire ; Résistance ; Ciment

*Keywords:* Porous media; Micromechanics; Nonlinear homogenization; Strength; Cement

## Abridged English version

The solid domain of the porous medium under consideration is made up of homothetic composite spheres, with a core (phase 1) surrounded by a spherical layer (phase 2).  $\varphi$ ,  $f_1$  and  $f_2$  denote the volume fractions of the pores and of phases 1 and 2, whereas  $\chi$  is the ratio between the core radius and the external radius of the composite sphere. Note that  $\chi^3 = f_1/(f_1 + f_2)$  represents the volume fraction  $\mathcal{F}$  of the core in the composite sphere.  $\langle a \rangle_i$  denotes the average of a field  $a(\underline{z})$  defined on phase  $i$  in the r.e.v. For a second order tensor  $\mathbf{a}$ , we introduce its deviatoric part  $\mathbf{a}_d$ ,  $\mathbf{a}_m = \text{tr } \mathbf{a}/3$ ,  $\mathbf{a}_d = \sqrt{\mathbf{a}_d : \mathbf{a}_d}/2$ .  $\mathbf{1}$  and  $\mathbb{1}$  are the second and fourth order identity tensors.

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [julien.sanahuja@lafarge.com](mailto:julien.sanahuja@lafarge.com) (J. Sanahuja), [dormieux@lmsc.enpc.fr](mailto:dormieux@lmsc.enpc.fr) (L. Dormieux).

Phase 2 is a von Mises material, the strength criterion of which reads  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d - k$ . The core strength is infinite. This Note aims at the determination of the macroscopic strength of the porous medium, under the assumption that the distribution of pores and composite spheres is perfectly disordered. The nonlinear homogenization process is based on the modified secant method [1–3].

In Section 2, phases 1 and 2 are assumed to have an isotropic linear elastic behavior (bulk and shear moduli  $k_i$  and  $\mu_i$ ). The quadratic average of the deviatoric strain  $\varepsilon_d$  in phase 2 can be determined as a function of the macroscopic stress invariants  $\Sigma_m$  and  $\Sigma_d$  (4). The practical use of this result requires to determine the macroscopic bulk and shear moduli  $K^{\text{hom}}$  and  $\mu^{\text{hom}}$ . To this end, a generalized self-consistent scheme of the pattern-based type [4–6] involving composite spheres and pores is developed.  $K^{AC}$  and  $\mu^{AC}$  denoted the corresponding estimates of  $K^{\text{hom}}$  and  $\mu^{\text{hom}}$ . The classical Eshelby problem is used in order to estimate the average strain in the pores (6). In contrast, as far as the average strain concentration tensors  $\langle \mathbb{A} \rangle_1$  and  $\langle \mathbb{A} \rangle_2$  are concerned, the solution to a generalized Eshelby problem, in which a composite sphere is embedded in an infinite medium with elastic moduli  $K^{AC}$  and  $\mu^{AC}$ , is due. As usual, the loading is defined through uniform strain boundary conditions at infinity. This solution is determined successively for spherical and deviatoric boundary conditions.

With spherical boundary conditions at infinity, the displacement field  $\underline{\xi}$  is given by (7), in which coefficients  $A$  and  $B$  depend on the phase under consideration. In turn, with deviatoric boundary conditions at infinity defined by  $\underline{\xi} = \mathbf{E}_0 \cdot \underline{z}$  and  $\mathbf{E}_0 = E_0(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$ , the displacement now takes the form (10), (11), coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  again depending on the phase. In the limit case where phase 1 (core) is rigid and phase 2 is incompressible,  $K^{AC}$  and  $\mu^{AC}$  are shown to be solution to (8)–(12), with the  $P_i(\chi)$  polynoms defined in (13). More precisely, the homogenized bulk and shear moduli are proportional to  $\mu_2$  and are given by (17).

We now look for the macroscopic strength of the porous medium. We therefore introduce a fictitious constitutive behavior for phase 2. The latter is nonlinear isotropic elastic, its state equation reading  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}(\varepsilon_d) : \boldsymbol{\varepsilon}$  [9]. The secant stiffness tensor  $\mathbb{C}(\varepsilon_d)$  is chosen so as to meet condition (18). In other words, the strength criterion of phase 2 is satisfied asymptotically when the local deviatoric strain  $\varepsilon_d$  is large enough. For this purpose, the secant shear modulus  $\mu(\varepsilon_d)$  of phase 2 is taken equivalent to  $k/(2\varepsilon_d)$ . The macroscopic stress–strain response of the r.e.v. is now determined on radial macroscopic strain pathes of the form  $\mathbf{E} = \lambda \mathbf{e}$ . For any direction of  $\mathbf{e}$ , the macroscopic stress  $\boldsymbol{\Sigma}$  reached asymptotically on such strain pathes is estimated by means of the modified secant method. The boundary  $\partial G^{\text{hom}}$  of the domain of admissible macroscopic stresses is found to be an ellipse centered at the origin in the  $(\Sigma_m, \Sigma_d)$  plane (22).

When  $\chi \rightarrow 0$ , the solid phase tends toward homogeneity. We then retrieve from (22) the macroscopic strength criterion predicted by the classical self-consistent scheme (23). In particular, the percolation threshold is found to correspond to the critical porosity  $\varphi = 1/2$  (no strength if  $\varphi > 1/2$ ). When  $\chi \rightarrow 1$ , the core is surrounded by a layer of infinitesimal thickness. This situation can be used in order to model interfacial properties of the solid grains. In this case, a new critical porosity, namely  $\varphi = 1/3$ , appears. While the strength is again found to vanish if  $\varphi > 1/2$ , it proves to be infinite if  $\varphi < 1/3$ . In between ( $1/3 < \varphi < 1/2$ ), the decrease of the macroscopic strength as a function of  $\varphi$  is given by (24). Fig. 2 presents the elliptic boundary  $\partial G^{\text{hom}}$  for  $\varphi = 0.4$  and  $\mathcal{F} = 0, 0.2, 0.5, 0.8$  and 1.

## 1. Introduction

On s'intéresse à la rupture d'un milieu poreux dont le solide est hétérogène. La microstructure étudiée se présente comme un assemblage parfaitement désordonné et isotrope de pores et d'un motif morphologique composite sphérique formé d'un noyau entouré d'une calotte (Fig. 1). Ce modèle est conçu notamment pour être appliqué à une pâte de ciment en cours d'hydratation. Les noyaux représentent les grains de ciment anhydre n'ayant pas encore réagi, la calotte représente les hydrates (produits d'hydratation du ciment par l'eau), que l'on suppose tous localisés autour des grains de ciment, et les pores sont les pores capillaires.

L'espace poreux, la phase « noyau » (phase 1) et la phase « calotte » (phase 2) occupent respectivement les sous-domaines  $\Omega^p$ ,  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  d'un VER  $\Omega$ ; les fractions volumiques correspondantes sont notées  $\varphi$ ,  $f_1$  et  $f_2$ . Le rapport  $\chi$  entre le rayon du noyau et le rayon extérieur de la sphère composite est supposé invariable. La fraction volumique  $\mathcal{F}$  du noyau dans toutes les sphères composites est alors identique, égale à  $\chi^3 = f_1/(f_1 + f_2)$ .

Les moyennes d'un champ  $a(\underline{z})$  sur l'espace poreux, le noyau, la calotte et le VER sont respectivement notées  $\langle a \rangle_p$ ,  $\langle a \rangle_1$ ,  $\langle a \rangle_2$  et  $\langle a \rangle$ . Pour un tenseur  $\mathbf{a}$  d'ordre 2, on note  $\mathbf{a}_d$  sa partie déviatorique,  $a_d$  le scalaire  $\sqrt{\mathbf{a}_d : \mathbf{a}_d}/2$  et  $a_m = \text{tr } \mathbf{a}/3$ .  $\mathbf{1}$  et  $\mathbb{I}$  désignent respectivement les tenseurs identité d'ordre 2 et 4.

L'espace poreux est vide ou non pressurisé. La calotte est constituée par un matériau de von Mises dont le critère s'écrit  $f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_d - k$ . Le noyau est supposé infiniment résistant. On met en œuvre une technique d'homogénéisation non linéaire de type sécante modifiée [1–3] pour obtenir une expression approchée du critère de rupture macroscopique. Cette démarche nécessite de résoudre au préalable un problème d'homogénéisation linéaire et, en particulier, de produire une estimation de la déformation déviatorique moyenne dans la calotte.

## 2. Homogénéisation linéaire et déformation déviatorique moyenne dans la calotte

Pour commencer, le comportement des deux phases solides est supposé élastique linéaire isotrope. Le tenseur d'élasticité, les modules de compression et de cisaillement de la phase  $i$  sont respectivement notés  $\mathbb{C}_i$ ,  $k_i$  et  $\mu_i$ . Le comportement macroscopique est alors élastique linéaire et isotrope. Les tenseurs de contrainte et de déformation macroscopiques, respectivement notés  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\boldsymbol{E}$  sont reliés par l'équation d'état

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \boldsymbol{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{\text{hom}} = 3K^{\text{hom}}\mathbb{J} + 2\mu^{\text{hom}}\mathbb{K} \quad (1)$$

où  $J_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}/3$  et  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ .  $K^{\text{hom}}$  et  $\mu^{\text{hom}}$  désignent les modules de compression et cisaillement homogénéisés. L'énergie élastique volumique  $\Psi$  du domaine solide :

$$\Psi = \frac{1}{2|\Omega|} \left( \int_{\Omega^1} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_1 : \boldsymbol{\varepsilon} dV_z + \int_{\Omega^2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}_2 : \boldsymbol{\varepsilon} dV_z \right) \quad (2)$$

dépend des modules élastiques des phases noyau et calotte, d'une part de façon explicite à travers les tenseurs  $\mathbb{C}_i$ , et d'autre part de façon implicite par l'intermédiaire du champ de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(\underline{z})$ . En dérivant cette énergie par rapport à  $\mu_2$  et en appliquant le lemme de Hill au champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et au champ de « déformation »  $\partial\boldsymbol{\varepsilon}/\partial\mu_2$ , on obtient [3] :

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mu_2} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{K} : \boldsymbol{\varepsilon} dV_z + \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mu_2} dV_z = 2f_2\langle\varepsilon_d^2\rangle_2 \quad (3)$$

En utilisant dans (3) l'expression macroscopique  $\Psi = \boldsymbol{E} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \boldsymbol{E}/2$  de l'énergie élastique, la moyenne quadratique de la déformation déviatorique dans la phase 2 prend la forme :

$$4f_2\langle\varepsilon_d^2\rangle_2 = -\frac{\partial}{\partial\mu_2} \left( \frac{1}{K^{\text{hom}}} \right) \Sigma_m^2 - \frac{\partial}{\partial\mu_2} \left( \frac{1}{\mu^{\text{hom}}} \right) \Sigma_d^2 \quad (4)$$

Il convient maintenant de proposer des estimations de  $K^{\text{hom}}$  et  $\mu^{\text{hom}}$ . Le champ de tenseurs de localisation des déformations étant noté  $\mathbb{A}(\underline{z})$ , le tenseur de rigidité macroscopique s'écrit :

$$\mathbb{C}^{\text{hom}} = \langle \mathbb{C}(\underline{z}) : \mathbb{A}(\underline{z}) \rangle = f_1 \mathbb{C}_1 : \langle \mathbb{A}(\underline{z}) \rangle_1 + f_2 \mathbb{C}_2 : \langle \mathbb{A}(\underline{z}) \rangle_2 \quad (5)$$

Faisant l'hypothèse d'une microstructure parfaitement désordonnée constituée de pores et de sphères composites, on utilise un schéma autocohérent généralisé pour estimer  $\langle \mathbb{A} \rangle_1$  et  $\langle \mathbb{A} \rangle_2$  dans l'esprit du concept de motif morphologique représentatif [4–6]. On note  $\mathbb{C}^{\text{AC}}$  l'estimation autocohérente de  $\mathbb{C}^{\text{hom}}$ .

Soit  $\boldsymbol{E}$  la déformation macroscopique imposée au VER. La déformation moyenne dans l'une ou l'autre des deux phases solides est estimée par celle qui s'établirait dans cette phase au sein du motif morphologique plongé dans un milieu de rigidité  $\mathbb{C}^{\text{AC}}$ , et soumis à l'infini à une déformation homogène  $\boldsymbol{E}_0$  bien choisie (Fig. 1). La déformation moyenne dans l'espace poreux est estimée à partir de la solution du problème de l'inclusion d'Eshelby [7] :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_p = (\mathbb{I} - \mathbb{S}_{\text{sph}}^{\text{AC}})^{-1} : \boldsymbol{E}_0 \quad (6)$$

où  $\mathbb{S}_{\text{sph}}^{\text{AC}}$  est le tenseur d'Eshelby relatif à une inclusion sphérique plongée dans le milieu d'élasticité  $\mathbb{C}^{\text{AC}}$ . La relation entre  $\boldsymbol{E}_0$  et  $\boldsymbol{E}$  est déduite de la règle de moyenne  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{E}$ .

L'étude du problème de l'inclusion composite plongée dans le milieu homogène infini d'élasticité  $\mathbb{C}^{\text{AC}}$  s'appuie sur [8]. Rappelons que  $\chi$  désigne le rapport des rayons extérieurs du noyau et de la calotte. Les trois régions de l'espace (noyau, calotte, milieu effectif) ont un comportement élastique linéaire isotrope. On fait référence dans ce qui suit à un repère orthonormé  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  et au système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  dans lequel l'angle  $\theta$  est compté à partir de l'axe dirigé par  $\underline{e}_3$ .

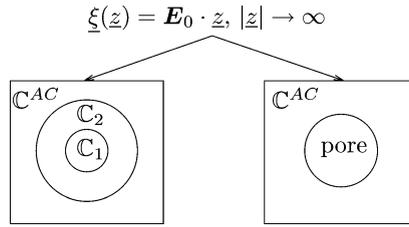


Fig. 1. Schéma autocohérent généralisé avec motif morphologique.

Il est commode de traiter séparément les chargements macroscopiques purement sphériques et les chargements macroscopiques purement déviatoriques. On s'intéresse d'abord à une sollicitation sphérique en considérant :  $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{1}$ . L'équation d'équilibre mécanique  $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  impose de rechercher dans chaque région le champ de déplacement sous la forme :

$$\underline{\xi}(\underline{z}) = \left( Ar + \frac{B}{r^2} \right) \underline{e}_r \tag{7}$$

les coefficients  $A$  et  $B$  dépendant du domaine considéré (noyau, calotte, milieu effectif). Les six coefficients ainsi introduits sont déterminés en écrivant la continuité de  $\underline{\xi}$  et celle du vecteur-contrainte aux frontières entre domaines, ainsi que la condition aux limites à l'infini, compte tenu du choix de  $\mathbf{E}_0$ . Dans le cas limite du noyau rigide et de la calotte incompressible, on montre que la relation entre les modules de compression et de cisaillement homogénéisés est identique à celle obtenue par le schéma autocohérent classique (solide homogène incompressible) :

$$K^{AC} = \frac{4(1 - \varphi)}{3\varphi} \mu^{AC} \tag{8}$$

ce qui conduit au coefficient de Poisson homogénéisé sous la forme :

$$\nu^{AC} = \frac{2 - 3\varphi}{4 - 3\varphi} \tag{9}$$

On considère ensuite une sollicitation purement déviatorique de la forme :  $\mathbf{E}_0 = E_0 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2)$ , L'idée consiste à rechercher dans chaque phase le champ de déplacement sous la forme :

$$\underline{\xi}(\underline{z}) = \xi_r(r) \sin^2(\theta) \cos(2\phi) \underline{e}_r + \xi_\theta(r) \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(2\phi) \underline{e}_\theta + \xi_\phi(r) \sin(\theta) \sin(2\phi) \underline{e}_\phi \tag{10}$$

Pour assurer l'équilibre mécanique, les fonctions  $\xi_r(r)$ ,  $\xi_\theta(r)$  et  $\xi_\phi(r)$  doivent être choisies de la façon suivante (en notant  $\nu$  le coefficient de Poisson de la phase concernée) :

$$\begin{aligned} \xi_r(r) &= Ar - \frac{6\nu}{1 - 2\nu} Br^3 + 3\frac{C}{r^4} + \frac{5 - 4\nu}{1 - 2\nu} \frac{D}{r^2} \\ \xi_\theta(r) &= Ar - \frac{7 - 4\nu}{1 - 2\nu} Br^3 - 2\frac{C}{r^4} + 2\frac{D}{r^2} \\ \xi_\phi(r) &= -\xi_\theta(r) \end{aligned} \tag{11}$$

les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  étant propres à chaque phase. Comme précédemment, ces derniers sont déterminés à l'aide des conditions de continuité et des conditions aux limites. Considérant à nouveau le cas limite du noyau rigide et de la calotte incompressible, on montre que le module de cisaillement homogénéisé est solution de :

$$\frac{\mu^{AC}}{\mu_2} = \frac{1 - \varphi}{2} \left[ 3\varphi \frac{\mu_2}{\mu^{AC}} \frac{K^{AC} + 2\mu^{AC}}{9K^{AC} + 8\mu^{AC}} + \frac{P_1(\chi)\mu_2 + 4P_2(\chi)\mu^{AC}}{P_3(\chi)\mu_2 + 8P_4(\chi)\mu^{AC}} \right]^{-1} \tag{12}$$

où les  $P_i(\chi)$  sont des polynômes du rapport  $\chi = r_1/r_2$  des rayons de la sphère composite :

$$\begin{aligned} P_1(\chi) &= (19 + 16\chi^7)(1 - \chi^3) + 84(1 - \chi^2)^2 \chi^3 \\ P_2(\chi) &= (4(1 + \chi^2)(1 + 9\chi^2 + \chi^4) + 16\chi(1 + \chi^4) + 55\chi^3)(1 - \chi)^4 \\ P_3(\chi) &= 38 + 225\chi^3 - 336\chi^5 + 200\chi^7 + 48\chi^{10} \\ P_4(\chi) &= 2(2 + 3\chi^7)(1 - \chi^3) + (31\chi^2 - 11)(1 - \chi^2)\chi^3 \end{aligned} \tag{13}$$

On rappelle que  $\chi^3$  représente la fraction volumique de noyau dans la sphère composite. En utilisant (8) et (12), le rapport  $\mu^{AC}/\mu_2$  apparaît alors comme la solution du trinôme  $ax^2 + bx + c = 0$ , avec :

$$a = 8(3 - \varphi)P_2(\chi) \quad (14)$$

$$b = 2(3 - \varphi)P_1(\chi) + 24(2\varphi - 1)P_4(\chi) \quad (15)$$

$$c = 3(2\varphi - 1)P_3(\chi) \quad (16)$$

Le discriminant est positif ou nul dans tous les cas (pour  $0 \leq \varphi \leq 1$  et  $0 \leq \chi \leq 1$ ). Lorsque  $\varphi > 1/2$ , les deux racines sont négatives. Dans ce cas, la seule solution est  $K^{AC} = \mu^{AC} = 0$ . Lorsque  $\varphi < 1/2$ , une seule racine est positive. On retrouve le seuil de « percolation mécanique » du schéma auto-cohérent classique (pores et solide homogène),  $\varphi = 1/2$  [9].

Notant  $\mathcal{A} = K^{AC}/\mu_2$  et  $\mathcal{B} = \mu^{AC}/\mu_2$ , les résultats analytiques établis dans cette partie s'écrivent :

$$\mathcal{A} = \frac{4(1 - \varphi)}{3\varphi} \mathcal{B} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{cases} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \text{si } \varphi < 1/2 \\ 0 & \text{si } \varphi > 1/2 \end{cases} \quad (17)$$

### 3. Estimation du critère de rupture macroscopique

Pour déterminer le critère de rupture macroscopique connaissant le critère de rupture microscopique de la calotte donné sous la forme  $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ , l'idée consiste à se ramener à un problème d'homogénéisation non linéaire en introduisant un comportement élastique non linéaire fictif pour le matériau de la calotte, défini par un tenseur sécant  $\mathbb{C}(\varepsilon_d)$  tel que :

$$f\left(\lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} \mathbb{C}(\varepsilon_d) : \boldsymbol{\varepsilon}\right) = 0 \quad (18)$$

En d'autres termes, le comportement fictif est choisi de façon à saturer asymptotiquement le critère lorsque la déformation locale est suffisamment grande (on note symboliquement  $\varepsilon_d \rightarrow \infty$ ). Dans la pratique, on choisit un tenseur  $\mathbb{C}(\varepsilon_d)$  isotrope, avec un module de compression  $K$  constant et un module de cisaillement  $\mu(\varepsilon_d)$ . Pour le cas du matériau de von Mises, (18) prend la forme :

$$\lim_{\varepsilon_d \rightarrow \infty} 2\mu(\varepsilon_d)\varepsilon_d = k \quad (19)$$

Il suffit donc que  $\mu(\varepsilon_d)$  soit équivalent à  $k/(2\varepsilon_d)$  pour  $\varepsilon_d \rightarrow \infty$ . On note en particulier que la propriété  $\mu(\varepsilon_d)/K \rightarrow 0$  autorise à considérer le matériau de calotte comme incompressible et à utiliser les solutions de la Section 2.

On applique alors la méthode sécante modifiée [1–3] avec la déformation effective  $\varepsilon_d^{\text{ef}} = \sqrt{\langle \varepsilon_d^2 \rangle}$  et le comportement fictif non linéaire de la calotte qui vient d'être décrit pour déterminer la réponse du VER à des trajets de déformations macroscopiques radiaux  $\boldsymbol{E} = \lambda \boldsymbol{e}$ . Sur chacun d'eux, on détermine la contrainte macroscopique mobilisée asymptotiquement (quand  $\lambda \rightarrow \infty$ ). Celle-ci appartient à la frontière  $\partial G^{\text{hom}}$  du domaine de résistance macroscopique  $G^{\text{hom}}$ , que l'on détermine ainsi point par point. Compte tenu des relations  $K^{\text{hom}} = \mathcal{A}\mu_2$  et  $\mu^{\text{hom}} = \mathcal{B}\mu_2$ , (4) prend la forme :

$$\frac{\Sigma_m^2}{\mathcal{A}} + \frac{\Sigma_d^2}{\mathcal{B}} = f_2(2\mu(\varepsilon_d)\varepsilon_d)^2 \quad (20)$$

et la condition (19)  $\mu(\varepsilon_d) \approx k/(2\varepsilon_d)$  conduit à l'équation de  $\partial G^{\text{hom}}$  :

$$\frac{\Sigma_m^2}{\mathcal{A}} + \frac{\Sigma_d^2}{\mathcal{B}} = f_2 k^2 \quad (21)$$

ou encore, en utilisant (8) :

$$\frac{3\varphi}{4(1 - \varphi)} \Sigma_m^2 + \Sigma_d^2 = f_2 \mathcal{B} k^2 \quad (22)$$

avec  $f_2 = (1 - \varphi)(1 - \chi^3)$  et  $\mathcal{B}$  donné par (17). Ce critère est une ellipse dans le plan  $(\Sigma_m, \Sigma_d)$ , dont le rapport d'aspect est fonction de la seule porosité, tandis que la taille dépend de la porosité, de la fraction de noyaux rigides dans le solide, et est proportionnelle à la résistance de la calotte. Lorsque  $\chi \rightarrow 0$  (fraction volumique de la phase rigide nulle),  $\mathcal{B} \rightarrow (1 - 2\varphi)/(1 - \varphi/3)$  et on retrouve le critère obtenu [1] par le schéma autocohérent classique (pores et solide homogène) :

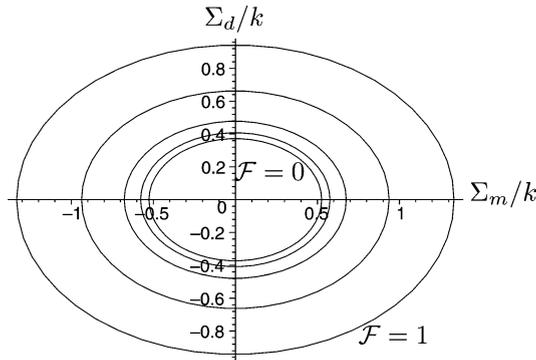


Fig. 2. Domaine des contraintes admissibles ;  $\varphi = 0,4$  et  $\mathcal{F} = 0, 0,2, 0,5, 0,8$  et 1.

$$\frac{3\varphi}{4(1-\varphi)} \Sigma_m^2 + \Sigma_d^2 = \frac{(1-\varphi)(1-2\varphi)}{1-\varphi/3} k^2 \tag{23}$$

pour  $\varphi < 1/2$ . Le domaine de résistance est réduit à  $\Sigma = \mathbf{0}$  lorsque  $\varphi > 1/2$ .

Soulignons le fait qu’il n’est pas possible de définir pour le solide composite « noyau–calotte » ( $\chi > 0$ ) une résistance  $k' = k'(k, \chi)$  équivalente à placer dans le schéma autocohérent classique (23) et ne dépendant que des caractéristiques intrinsèques de ce solide (fraction de noyaux rigides et résistance de la calotte).

Lorsque  $\chi \rightarrow 1$  (calotte d’épaisseur infinitésimale), on se trouve dans le cas d’un polycrystal poreux dont les grains sont rigides et infiniment résistants, et dont l’interface entre les grains est soumise à un critère de von Mises. On montre que :

$$\lim_{\chi \rightarrow 1} f_2 \mathcal{B} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \varphi < 1/3 \\ \frac{(1/2 - \varphi)(1 - \varphi)}{\varphi - 1/3} & \text{si } 1/3 < \varphi < 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 < \varphi \end{cases} \tag{24}$$

On observe une nouvelle porosité critique,  $\varphi = 1/3$ , en dessous de laquelle la résistance est infinie. La résistance globale n’est alors limitée physiquement que par celle des grains (supposée ici infinie). Au dessus du seuil  $\varphi = 1/3$ , la résistance décroît avec la porosité, jusqu’à s’annuler pour  $\varphi = 1/2$ . En particulier, pour une interface lisse ( $\chi \rightarrow 1$  et  $k \rightarrow 0$ ), on note que la résistance macroscopique est nulle pour  $\varphi > 1/3$  : le seuil de « percolation mécanique » se déplace de  $1/2$  à  $1/3$ .

La Fig. 2 représente la frontière  $\partial G^{\text{hom}}$  du domaine des contraintes admissibles dans le plan  $(\Sigma_m, \Sigma_d)$  pour  $\varphi = 0,4$  et  $\mathcal{F} = 0, 0,2, 0,5, 0,8$  et 1. Cette figure permet de quantifier l’augmentation de la résistance macroscopique en fonction de  $\mathcal{F}$ .

**Références**

[1] P. Ponte Castaneda, The effective mechanical properties of non linear isotropic composites, J. Mech. Phys. Solids 39 (1991) 45–71.  
 [2] P. Suquet, Overall properties of nonlinear composites: a modified secant moduli theory and its link with Ponte Castaneda’s nonlinear variational procedure, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II 301 (1995) 563–571.  
 [3] P. Suquet, Effective behavior of non linear composites, in: P. Suquet (Ed.), Continuum Micromechanics, in: CISM Courses and Lectures, vol. 377, Springer, 1997.  
 [4] C. Stolz, A. Zaoui, Combined variational approach and morphological analysis to the behaviour of inhomogeneous elastic media, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. II 312 (1991) 143–150.  
 [5] M. Bornert, C. Stolz, A. Zaoui, Morphological representative pattern-based bounding in elasticity, J. Mech. Phys. Solids 44 (1996) 307–331.  
 [6] A. Zaoui, Structural morphology and constitutive behavior of microheterogeneous materials, in: P. Suquet (Ed.), Continuum Micromechanics, in: CISM Courses and Lectures, vol. 377, Springer, 1997.  
 [7] J.D. Eshelby, The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, Proc. Roy. Soc. London Ser. A 241 (1957) 376–396.  
 [8] E. Hervé, A. Zaoui, n-layered inclusion-based micromechanical modelling, Int. J. Engrg. Sci. 31 (1) (1993) 1–10.  
 [9] L. Dormieux, Poroelasticity and strength of fully or partially saturated porous materials, in: L. Dormieux, F.-J. Ulm (Eds.), Applied Micromechanics of Porous Materials, in: CISM Courses and Lectures, vol. 480, Springer, 2005.