

Étude numérique du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces en cavité carrée remplie d'air

Hong Wang^a, Shihe Xin^{a,b,*}, Patrick Le Quéré^a

^a LIMSI-CNRS, BP 133, 91403 Orsay cedex, France

^b Département de physique, bâtiment 507, université Paris-Sud, 91405 Orsay cedex, France

Reçu le 11 mars 2005 ; accepté après révision le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 2 décembre 2005

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

Un code numérique est développé pour le couplage de la convection naturelle en cavité avec le rayonnement de surfaces et des études sont menées pour une cavité carrée remplie d'air dont les quatre parois ont la même émissivité. Les résultats montrent que, par rapport au cas sans rayonnement, la paroi haute est refroidie, la paroi basse est réchauffée, l'écoulement horizontal est renforcé, et la stratification est diminuée. L'analyse montre que la densité de flux net radiatif est linéaire en ΔT si $\Delta T \ll T_0$, ce qui est le cas à petit nombre de Rayleigh, et que le nombre de Nusselt radiatif est linéaire en la hauteur de la cavité. Le rayonnement de surfaces fait baisser le nombre de Rayleigh critique caractérisant l'apparition de l'instationnarité : pour $\varepsilon = 0.2$ et une cavité de 0.335 m de haut il est localisé à 9.3×10^6 et la bifurcation correspondante est supercritique. De plus des solutions périodiques multiples sont observées entre $Ra = 1.2 \times 10^7$ et 1.3×10^7 . **Pour citer cet article :** H. Wang et al., *C. R. Mecanique 334 (2006)*.

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Numerical study of natural convection-surface radiation coupling in air-filled square cavities. A numerical tool is developed for coupling natural convection in cavities with surface radiation and computations are performed for an air-filled square cavity whose four walls have the same emissivity. Compared to the adiabatic case without radiation, the top wall is cooled, the bottom wall is heated, air flow along the horizontal walls are reinforced and thermal stratification in cavity core is reduced. Detailed analysis shows that net radiative heat flux is linear with ΔT if $\Delta T \ll T_0$, which is the case at low Rayleigh number, and that radiative Nusselt number is a linear function of the cavity height. Surface radiation induces an early transition to time-dependent flows: for $\varepsilon = 0.2$ and a cavity height of 0.335 m the critical Rayleigh number is equal to 9.3×10^6 and the corresponding Hopf bifurcation is supercritical. Furthermore, multiple periodic solutions are observed between $Ra = 1.2 \times 10^7$ and 1.3×10^7 . **To cite this article:** H. Wang et al., *C. R. Mecanique 334 (2006)*.

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Convection naturelle ; Rayonnement de surfaces ; Cavité différenciellement chauffée

Keywords : Computational fluid mechanics; Natural convection; Surface radiation; Differentially heated cavity

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : shihe.xin@limsi.fr (S. Xin).

Abridged English version

Natural convection in a square cavity has been widely investigated due to the numerous applications. However, the interaction between natural convection and surface radiation is rarely studied although surface radiation is inherent in natural convection.

In the present Note a numerical code is developed for coupling natural convection in cavity with surface radiation and applied to an air-filled differentially heated square cavity whose four walls have the same emissivity ε , i.e. the configuration investigated by Akiyama and Chong [10].

We suppose that air flow in the cavity is governed by the Navier–Stokes equations under Boussinesq assumption. No-slip condition is valid on the cavity walls, a temperature difference, $\Delta T = T_c - T_f$, is submitted to the vertical walls and adiabatic conditions are applied to the horizontal walls. In the case without surface radiation, adiabatic conditions mean that the normal gradient of temperature is equal to zero. Surface radiation implies that convective heat flux balances net radiative heat flux on the horizontal walls. Interaction of natural convection with surface radiation comes only from the thermal conditions on the horizontal walls.

On the horizontal walls, the thermal boundary conditions are: $-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + q_r = 0$ at $z = 0$ and $\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + q_r = 0$ at $z = H$ where q_r is the net radiative flux. q_r is governed by $q_r = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\sigma T^4 - J)$ and $AJ = b$ where σ is Stefan–Boltzmann constant, J is the radiosity, matrix A is $A_{ij} = \delta_{ij} - (1-\varepsilon)F_{ij}$ with F_{ij} geometry view factor and b ($b_i = \varepsilon\sigma T_i^4$). In 2D cases F_{ij} is analytical, A is thus constructed explicitly and inverted. The dimension of the radiation problem depends on the number of isothermal and isoflux surface elements. As temperature field is not uniform on the horizontal walls, there needs to discretize them. In the present work both horizontal and vertical walls are discretized for the radiation problem in the same way as for the Navier–Stokes equations. Furthermore, the term q_r appeared in the thermal boundary conditions is explicit in time, i.e. $q_r^{n+1} = 2q_r^n - q_r^{n-1}$, and this allows us to obtain first T^{n+1} by solving the Navier–Stokes equations using projection method, then b^{n+1} , J^{n+1} and q_r^{n+1} .

Calculations have been made for $Ra = 10^4$, 10^5 and 10^6 and results have been compared to those in [10]. There is good agreement for convective Nusselt numbers (Fig. 2) and discrepancy is observed on radiative Nusselt numbers (Fig. 3). This is explained by the fact that Akiyama and Chong [10] have not inverted A and that their calculation of q_r is approximate. This reveals also that there needs more detailed results on the coupling between natural convection and surface radiation in order to validate numerical codes, i.e. a benchmark problem.

In terms of heat transfer, dimensional net radiative flux, $q_r \sim \varepsilon\sigma(T_c^4 - T_f^4) \approx 3\varepsilon\sigma T_0^3 \Delta T$ provided $\Delta T \ll T_0$, is linear in ΔT . It means that radiative Nusselt number, $q_r H / (\lambda \Delta T)$, is linear in H (Figs. 3 and 7). As convective Nusselt number being proportional to $Ra^{1/4} \sim \Delta T^{1/4} H^{3/4}$ remains constant at fixed Rayleigh number while radiative Nusselt number is linear in H , effects of surface radiation on natural convection at fixed Rayleigh number are more important for larger H . Compared to flow structure of the case without surface radiation, effects of surface radiation are visible along the horizontal walls and in the cavity core: surface radiation cools down the top horizontal wall (Fig. 6), heats up the bottom horizontal wall, reduces thermal stratification in the cavity core (Fig. 5) and reinforces horizontal flow along the horizontal walls (Fig. 5). With increasing emissivity, flow structure tends to that in cavity with perfect conducting horizontal walls (Fig. 4).

As the onset of time-dependent flow in a cavity with perfect conducting horizontal walls occurs at lower Rayleigh number than in a cavity with adiabatic horizontal walls, it is hoped that interaction of natural convection with surface radiation lowers the critical Rayleigh number characterizing the onset of time-dependent flow. For emissivity equal to 0.2 a first time-dependent flow is obtained at $Ra = 2 \times 10^7$ with $\Delta T = 5$ K and a cavity height of 0.333 m. A cavity height of 0.335 m is used then in order to determine the critical point, this means that variation of Rayleigh number is that of ΔT . Detailed investigation reveals at lower Rayleigh numbers two branches of periodic solutions characterized by constant dimensionless period (Fig. 8): one branch with a period of 5 ends at $Ra = 1.2 \times 10^7$ and another with a period of 6.5 ranges from $Ra = 1.3 \times 10^7$ to 9.4×10^6 . Multiple periodic solutions are thus observed between $Ra = 1.2 \times 10^7$ and 1.3×10^7 (Figs. 8 and 9). The critical Rayleigh number is located at $Ra = 9.3 \times 10^6$ by extrapolating the relationship between solution amplitude and Rayleigh number and the corresponding Hopf bifurcation is supercritical (Fig. 11). Fig. 10 illustrates the spatial structure of temperature fluctuations. As expected, they are concentrated along the cavity walls and the physical mechanism seems to be an instability of the horizontal boundary layers.

1. Introduction

La convection naturelle en cavité carrée a fait l'objet de nombreuses études numériques en tant que configuration générique représentative des applications potentielles. Mais rares sont des études qui tiennent compte du couplage de la convection naturelle avec le rayonnement même si ce couplage est inhérent en convection naturelle.

Dans le cadre des cavités rectangulaires, le milieu participant a été étudié par Lauriat [1], Chang et al. [2], Fusegi et Farouk [3], Yücel et al. [4], Kassemi et Naraghi [5], Han et Baek [6] et Colomer et al. [7], la cavité partitionnée a été étudiée par Chang et al. [2], Han et Baek [6] et Mezrhab et Bchir [8] et le milieu transparent en cavité simple a été considéré par Balaji et Venkateshan [9], Kassemi et Naraghi [5], Akiyama et Chong [10], Velusamy et al. [11] and Colomer et al. [7]. Parmi les études réalisées en cavité de géométrie simple, Colomer et al. [7] ont fait des simulations 3D et Velusamy et al. [11] ont étudié l'interaction de la convection naturelle turbulente avec le rayonnement de surfaces (modélisation $k-\varepsilon$ 2D). Ces études illustrent bien une dispersion trop importante des configurations et méthodologies utilisées et le manque des données pour valider des codes de calculs en configuration simple est bien évident.

Afin d'enrichir la base de données en couplage convection naturel–rayonnement de surfaces et comprendre l'effet du rayonnement de surfaces sur la convection naturelle, un code numérique 2D est mis en œuvre dans le présent travail et des études sont réalisées en cavité carrée remplie d'air dont les quatre parois ont la même émissivité. Cette configuration est essentiellement celle utilisée par Akiyama et Chong [10].

2. Problème physique et équations mathématiques

Nous considérons une cavité carrée différentiellement chauffée dont les quatre parois internes sont supposées grises, diffuses et opaques et ont la même valeur d'émissivité, ε (Fig. 1). La cavité 2D est remplie d'un fluide transparent – de l'air ($Pr = 0.71$) et le mouvement d'air est gouverné par les équations de Navier–Stokes sous l'hypothèse de Boussinesq. Sur le bord de la cavité il y a l'adhérence, les deux parois verticales sont soumises à un écart de température et celles horizontales sont adiabatiques. De manière classique, sans rayonnement de surfaces, la condition adiabatique implique que le gradient de température normal à ces parois est nul. En présence du rayonnement elle est traduite par l'équilibre entre les flux convectif et radiatif. Il s'est avéré que le rayonnement de surfaces ne modifie pas les équations gouvernant le mouvement du fluide mais altère seulement les conditions aux limites thermiques. Le couplage de la convection naturelle avec le rayonnement de surfaces se fait uniquement à travers les conditions aux limites thermiques.

Nous avons donc $-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + q_r = 0$ en $z = 0$ et $\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + q_r = 0$ en $z = H$ où $\lambda = 0.025 \text{ W/(K m)}$ est la conductivité de l'air, T est la température et q_r est la densité de flux net radiatif. q_r est déterminée par les systèmes d'équations

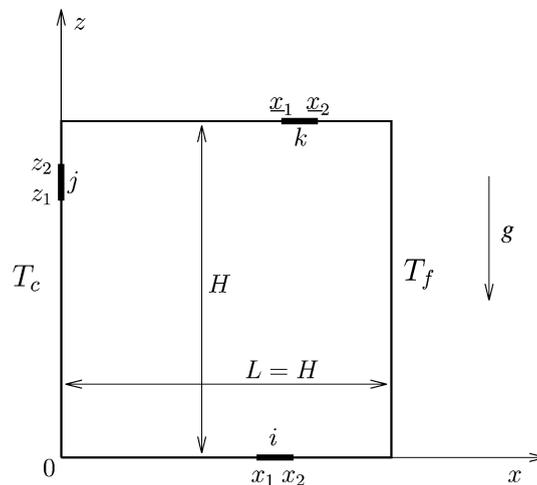


Fig. 1. Configuration du problème physique étudié avec $T_0 = (T_c + T_f)/2$ et $\Delta T = T_c - T_f$.

Fig. 1. Configuration of the physical problem. $T_0 = (T_c + T_f)/2$ and $\Delta T = T_c - T_f$.

suivants : $q_r = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\sigma T^4 - J)$ et $AJ = b$ où σ est la constante de Stefan–Boltzmann, J représente le vecteur radiosité, A la matrice dont $A_{ij} = \delta_{ij} - (1 - \varepsilon)F_{ij}$ avec F_{ij} le facteur de forme et b ($b_i = \varepsilon\sigma T_i^4$) le vecteur émission propre.

En convection naturelle les équations sont classiquement rendues sans dimension. Pour cela nous utilisons l'écart de température entre les parois actives ΔT et la température moyenne T_0 pour définir une température réduite $\Theta = (T - T_0)/\Delta T$ et, comme longueur et vitesse de référence, respectivement la hauteur H et $\alpha Ra^{1/2}/H$ avec α la diffusivité thermique de l'air et $Ra = (g\beta\Delta TH^3)/(\nu\alpha)$ le nombre de Rayleigh. Nous poursuivons cette logique pour rendre sans dimension les équations du problème avec rayonnement, à savoir que q_r et J sont rendues sans dimension par $\lambda\Delta T/H$ comme la définition du nombre de Nusselt en convection naturelle pure. Notons que le problème avec rayonnement fait apparaître conventionnellement deux paramètres sans dimension additionnels, outre Ra et Pr , le rapport de température, $\theta_0 = T_0/\Delta T$, et le nombre de rayonnement, $N_r = \varepsilon\sigma T_0^4 H/(\lambda\Delta T)$ (ou son inverse le nombre de Planck). Comme il est difficile de faire varier un nombre sans dimension en maintenant constants les trois autres en couplage convection naturelle–rayonnement, nous n'avons pas jugé nécessaire de faire apparaître θ_0 et N_r dans cette étude outre la mention de T_0 , ΔT et H .

3. Méthodes numériques

De manière générale la dimension du problème radiatif dépend du nombre de facettes qui peuvent être considérées isothermes ou isoflux.  tant donné que les parois verticales ne sont pas uniformément éclairées, nous avons opté pour la stratégie de discrétiser au niveau radiatif les quatre parois afin de connaître la distribution des flux nets radiatifs sur les parois actives et de prendre le maillage Navier–Stokes pariétal pour le problème radiatif.

Les équations de Navier–Stokes sont discrétisées classiquement par un schéma d'ordre 2 en temps et en espace sur un maillage décalé non uniforme (progression géométrique). Les conditions aux limites thermiques qui couplent T et q_r instantanés sont traitées en temps de manière semi-implicite : $q_r^{n+1} = 2q_r^n - q_r^{n-1}$. Ce traitement nous permet de résoudre d'abord par méthode de projection les équations de Navier–Stokes discrètes pour T^{n+1} et d'obtenir ensuite q_r^{n+1} en résolvant le problème radiatif. La résolution du problème radiatif se fait par la construction explicite de la matrice A (le calcul des facteurs de forme) et son inversion directe. En 2D les facteurs de formes sont analytiques : $F_{ij} = -\frac{1}{2}[\sqrt{x_2^2 + z^2}|_{z=z_2}^{z=z_1} - \sqrt{x_1^2 + z^2}|_{z=z_1}^{z=z_2}]/(x_2 - x_1)$ et $F_{ik} = \frac{-1}{2(x_2 - x_1)}[\sqrt{(x_2 - x)^2 + H^2}|_{x=x_1}^{x=x_2} - \sqrt{(x_1 - x)^2 + H^2}|_{x=x_1}^{x=x_2}]$ (voir les détails dans la Fig. 1).

4. Résultats et discussion

Les résultats présentés dans cette section sont presque indépendants du maillage, c'est la raison pour laquelle aucune information n'est fournie sur le maillage.

4.1. Validation du code

Contrairement à la convection naturelle pure en cavité, il existe peu de données en couplage convection naturelle–rayonnement de surfaces pour la validation d'un code. La configuration la plus appropriée semble celle étudiée par Akiyama et Chong [10] : une cavité carrée remplie d'air dont les quatre parois ont la même émissivité. Notons néanmoins que Akiyama et Chong [10] ont utilisé une méthode approximative pour le calcul de q_r , la comparaison de leurs données avec nos résultats ne peut donc qu'être qualitative. La Fig. 2 montre les nombres de Nusselt convectif obtenus à $Ra = 10^4$ et 10^5 en fonction de l'émissivité, ε . Nous observons, comme dans [10] qu'il n'y a plus l'égalité entre les nombres de Nusselt convectifs sur les parois actives dès que ε est diff rent de zéro. La conservation d'énergie se traduit en présence du rayonnement de surfaces par l'égalité des sommes des nombres de Nusselt convectif et radiatif sur les parois actives (Tableau 1).   $Ra = 10^4$ les nombres de Nusselt convectifs croissent d'abord et décroissent ensuite avec l'augmentation de ε tandis qu'à $Ra = 10^5$ les nombres de Nusselt convectifs décroissent avec l'augmentation de ε . L'écart entre les deux études est inférieur à 1 %, mais notons que le présent travail montre à $Ra = 10^5$ un effet plus progressif du rayonnement sur les nombres de Nusselt convectifs. La Fig. 3 représente l'évolution du nombre de Nusselt radiatif à la paroi chaude pour $Ra = 10^4$, 10^5 et 10^6 . Une différence plus importante entre les deux études est constatée sur le nombre de Nusselt radiatif du fait que q_r est calculé de façon approximative dans [10].

4.2. Effets du rayonnement : écoulements stationnaires

La Fig. 2 montre que le rayonnement fait varier jusqu'à 10 % le nombre de Nusselt convectif et on s'attend à ce que les couches limites verticales soient peu influencées par le rayonnement. La Fig. 4 illustre à $Ra = 10^6$ l'influence du rayonnement de surfaces sur la structure d'écoulement : les effets visibles se trouvent le long des parois horizontales et dans le cœur de la cavité. Par rapport au cas sans rayonnement ($\varepsilon = 0$), les isothermes ne sont plus normales aux parois horizontales du fait de l'échange net radiatif, la stratification diminue au centre de la cavité (Fig. 5), les

Tableau 1

Nombres de Nusselt sur les parois actives avec $T_0 = 293.5$ K et $\Delta T = 10$ K. $Nu_t = Nu_c + Nu_r$

Table 1

Nusselt number at active walls obtained with $T_0 = 293.5$ K and $\Delta T = 10$ K. $Nu_t = Nu_c + Nu_r$

Ra	H (m)	ε	Paroi chaude			Paroi froide		
			Nu_c	Nu_r	Nu_t	Nu_c	Nu_r	Nu_t
10^4	0.021	0.0	2.246	0	2.246	2.246	0	2.246
10^4	0.021	0.2	2.260	0.507	2.767	2.268	0.499	2.767
10^4	0.021	0.8	2.249	2.401	4.650	2.278	2.372	4.650
10^5	0.045	0.0	4.540	0	4.540	4.540	0	4.540
10^5	0.045	0.2	4.394	1.090	5.484	4.411	1.073	5.484
10^5	0.045	0.8	4.189	5.196	9.385	4.247	5.137	9.384
10^6	0.097	0.0	8.852	0	8.852	8.852	0	8.852
10^6	0.097	0.2	8.381	2.355	10.736	8.417	2.319	10.736
10^6	0.097	0.8	7.815	11.265	19.080	7.930	11.150	19.078

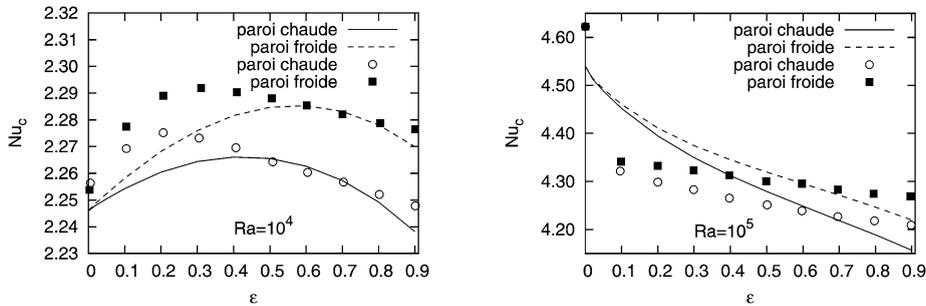


Fig. 2. Nombre de Nusselt convectif à $Ra = 10^4$ (à gauche) et $Ra = 10^5$ (à droite) en fonction de l'émissivité.

Fig. 2. Evolution of convective Nusselt number with emissivity at $Ra = 10^4$ (left) and $Ra = 10^5$ (right).

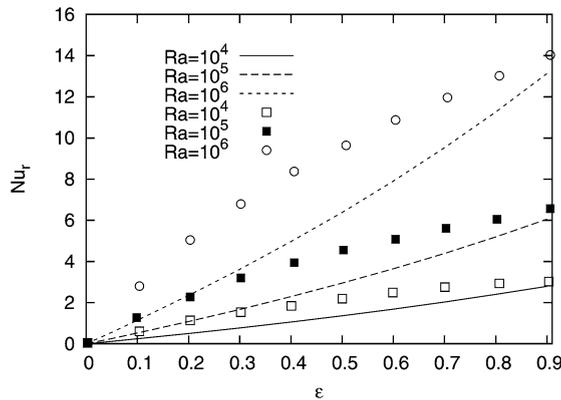


Fig. 3. Nombre de Nusselt radiatif à la paroi chaude en fonction de l'émissivité avec $T_0 = 293.5$ K et $\Delta T = 10$ K.

Fig. 3. Evolution of radiative Nusselt number with emissivity. $T_0 = 293.5$ K and $\Delta T = 10$ K.

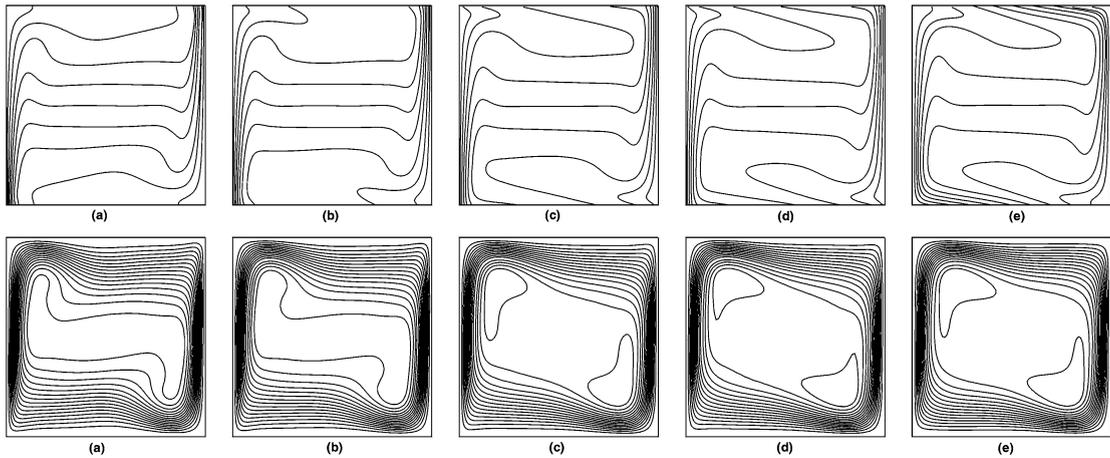


Fig. 4. Influence de l'émissivité sur l'écoulement à $Ra = 10^6$ avec (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0.1$, (c) $\varepsilon = 0.4$, (d) $\varepsilon = 0.8$ et (e) $\varepsilon = 0$ avec parois horizontales conductrices.

Fig. 4. Effect of emissivity on flow structure at $Ra = 10^6$. (a) $\varepsilon = 0$, (b) $\varepsilon = 0.1$, (c) $\varepsilon = 0.4$, (d) $\varepsilon = 0.8$ and (e) $\varepsilon = 0$ with conducting horizontal walls.

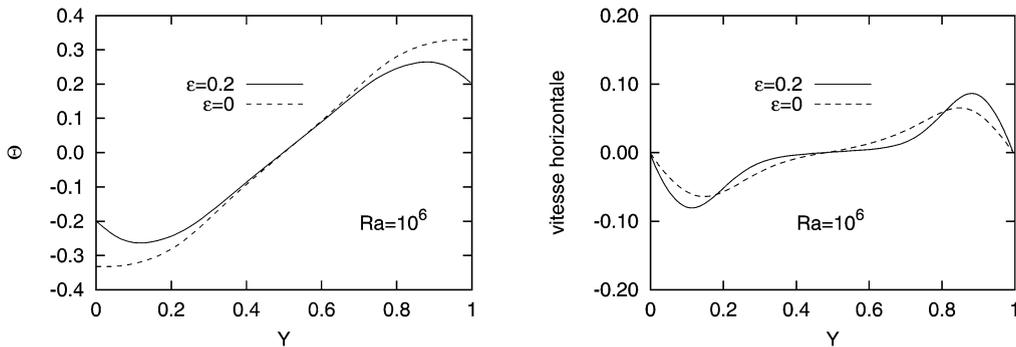


Fig. 5. Profils de température (à gauche) et vitesse horizontale (à droite) en $x = 0.5$ à $Ra = 10^6$.

Fig. 5. Temperature (left) et horizontal velocity (right) profiles at $x = 0.5$ and $Ra = 10^6$.

couches limites horizontales sont renforcées (Fig. 5) et enfin la paroi haute est refroidie et la paroi basse est réchauffée (Fig. 6). Ce comportement de la température sur les paroi horizontales s'explique par le fait que la paroi haute perd de la chaleur (flux net radiatif essentiellement positif) et que la paroi basse reçoit de la chaleur (flux net radiatif essentiellement négatif) (voir la Fig. 6). De façon qualitative, le rayonnement de surfaces a pour effet d'induire une structure d'écoulement qui ressemble plus à celle dans une cavité avec parois horizontales parfaitement conductrices (Fig. 4).

En matière de transfert thermique, Tableau 1 liste les données quantitatives en vue de comparaison. Pour $\varepsilon = 0.2$, le rayonnement de surfaces modifie le transfert thermique global au moins à la hauteur de 20% pour la gamme du nombre de Rayleigh considéré. Il est à noter que pour ε fixe le nombre de Nusselt radiatif augmente non seulement avec le nombre de Rayleigh mais aussi en proportion par rapport au nombre de Nusselt convectif correspondant. Du fait que $q_r \approx \varepsilon \sigma (T_c^4 - T_f^4) \approx 4\varepsilon \sigma T_0^3 \Delta T$ si $\Delta T \ll T_0$, ce qui est notre cas à petit nombre de Rayleigh, et que la densité de flux conductif, $\lambda \Delta T / H$, est utilisée pour définir Nu_r , le nombre de Nusselt radiatif n'est plus qu'une fonction linéaire de H , ce qui est confirmé par une remise à l'échelle de la Fig. 3 (Fig. 7). Bien que le nombre de Nusselt convectif soit proportionnel à $Ra^{1/4} \sim \Delta T^{1/4} H^{3/4}$, il reste constant à un nombre de Rayleigh fixe. Comme $Nu_r \sim H$, pour un nombre de Rayleigh et les émissivités fixes l'influence du rayonnement de surfaces est d'autant plus importante que H est grande.

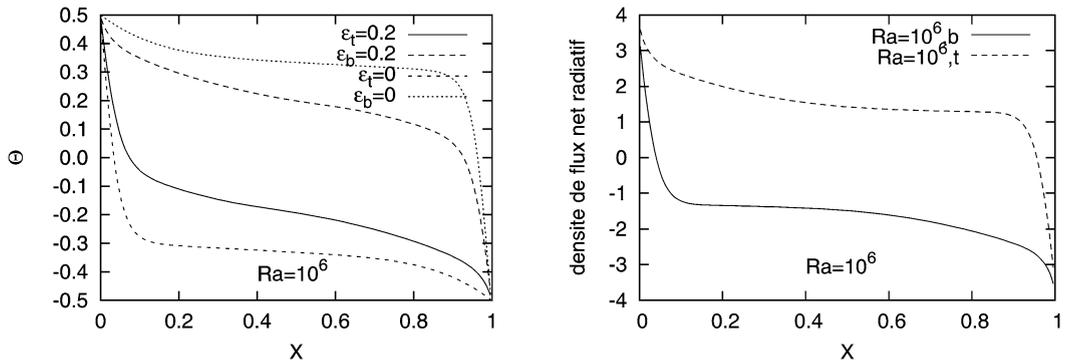


Fig. 6. Température (à gauche) et densité de flux net radiatif (à droite) en parois haute et basse à $Ra = 10^6$.

Fig. 6. Temperature (left) and net radiative flux (right) on the horizontal walls at $Ra = 10^6$.

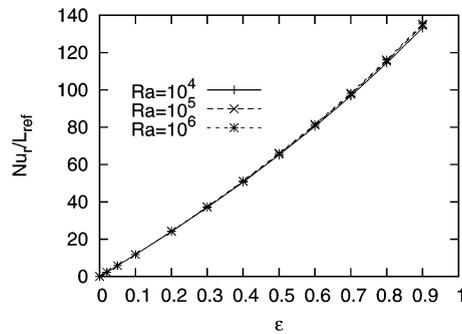


Fig. 7. Nombre de Nusselt radiatif normalisé par la longueur de référence $L_{ref} = H$ est indépendant du nombre de Rayleigh.

Fig. 7. Radiative Nusselt number scaled by the reference length H is independent of Rayleigh number.

4.3. Effets du rayonnement : écoulement instationnaire

Dans une cavité carrée remplie d'air avec conditions aux limites idéalisées, l'apparition de l'instationnarité a lieu à $Ra = 1.82 \times 10^8$ pour les parois horizontales adiabatiques [12] et à $Ra = 2.08 \times 10^6$ pour celles parfaitement conductrices [13]. Comme en présence du rayonnement de surfaces la structure d'écoulement ressemble plutôt à celle dans une cavité avec parois horizontales conductrices, on s'attend à un nombre de Rayleigh critique intermédiaire.

Nous avons procédé de façon classique en augmentant progressivement le nombre de Rayleigh et examiné pour chaque nombre de Rayleigh étudié le comportement en temps des solutions numériques. (Il s'agit de l'évolution temporelle des nombres de Nusselt et des solutions à quelques points soigneusement sélectionnés.) Etant donné que nous devons choisir pour chaque nombre de Rayleigh un couple de ΔT et H , les premiers calculs ont été faits pour H variant de 0.265 m à 0.420 m et $\varepsilon = 0.2$. Comme un des premiers écoulements instationnaires a été observé à $Ra = 2.0 \times 10^7$ avec $\Delta T = 5$ K et $H = 0.333$ m, nous choisissons alors de travailler avec $H = 0.335$ m et $\varepsilon = 0.2$ et toute variation du nombre de Rayleigh correspond à celle de ΔT .

Par la suite nous avons diminué progressivement le nombre de Rayleigh : nous avons donc exploré 1.9×10^7 , 1.8×10^7 , ..., 1.2×10^7 et obtenu des solutions périodiques caractérisées par une période sans dimension de $T = 5$. Lorsque nous partions avec la solution obtenue à $Ra = 1.2 \times 10^7$ comme conditions initiales pour étudier $Ra = 1.1 \times 10^7$, nous avons observé, après un long transitoire, une solution périodique en temps caractérisée par une période sans dimension de $T = 6.5$. Il s'agit donc d'une autre branche de solutions périodiques. Nous avons continué à diminuer le nombre de Rayleigh et obtenu des solutions périodiques jusqu'à $Ra = 9.4 \times 10^6$. Nous sommes également repartis de $Ra = 1.1 \times 10^7$ pour des nombres de Rayleigh plus élevés et nous avons obtenus des solutions périodiques avec $T = 6.5$ jusqu'à $Ra = 1.3 \times 10^7$. Lorsque nous avons fait le passage $Ra = 1.3 \times 10^7 \rightarrow 1.5 \times 10^7$, la solution périodique finale a une période de $T = 5$. La Fig. 8 résume les procédures suivies et les résultats obtenus, notamment les deux branches de solutions périodiques.

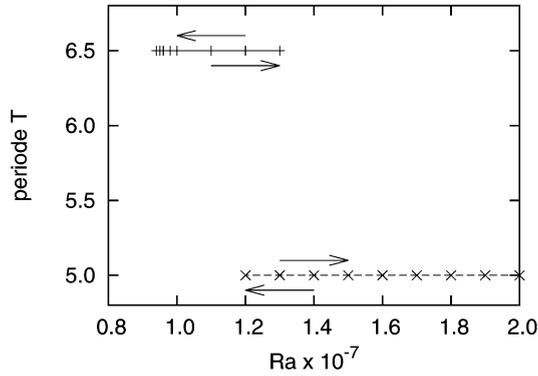


Fig. 8. Période T des solutions instationnaires en fonction du nombre de Rayleigh. Les flèches indiquent l'ordre avec lequel des simulations ont été réalisées.

Fig. 8. Period T of time-dependent flows versus Rayleigh number. The arrows show the order with which simulations have been done.

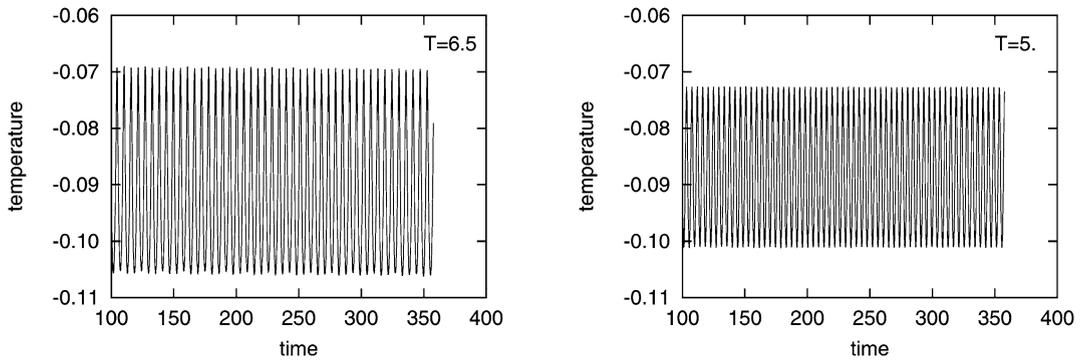


Fig. 9. Evolutions temporelles de la température au même point spatial obtenues à $Ra = 1.3 \times 10^7$ pour les deux branches de solutions instationnaires.

Fig. 9. Time evolutions at the same point obtained for $Ra = 1.3 \times 10^7$ and the two solution branches.

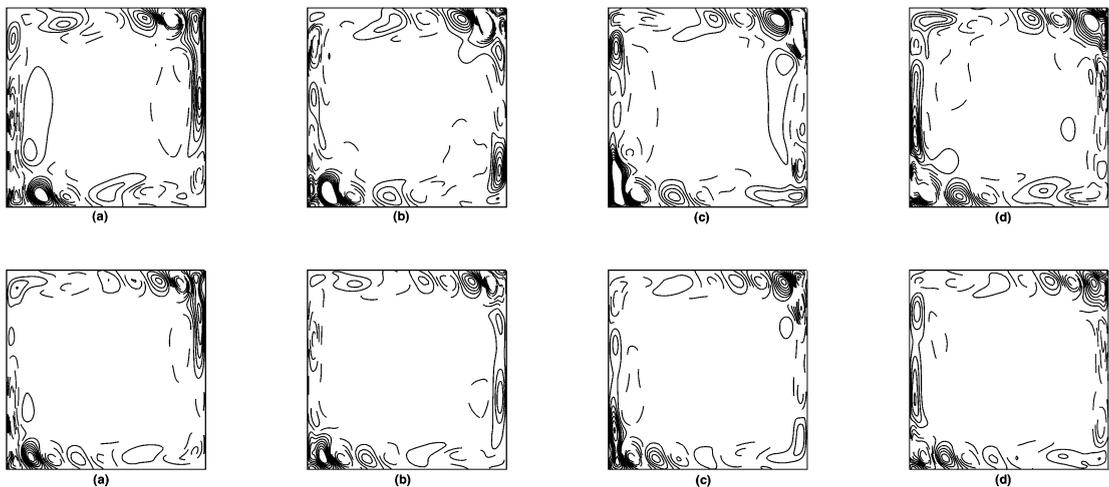


Fig. 10. Fluctuations de température à $\frac{T}{4}$ (a), $\frac{T}{2}$ (b), $\frac{3T}{4}$ (c) et T (d). Il s'agit de la branche de solutions avec période $T = 6.5$ (en haut) et celle avec période $T = 5$ (en bas) à $Ra = 1.2 \times 10^7$.

Fig. 10. Temperature fluctuations at $\frac{T}{4}$ (a), $\frac{T}{2}$ (b), $\frac{3T}{4}$ (c) and T (d) (solution branch of $T = 6.5$ on top and that of $T = 5$ at bottom).

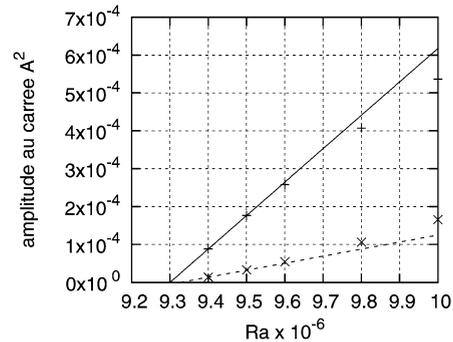


Fig. 11. Amplitude au carré en fonction du nombre de Rayleigh illustre la relation linéaire au voisinage du point critique. L'extrapolation fournit une valeur approchée du nombre de Rayleigh critique de 9.3×10^6 .

Fig. 11. Solution amplitude squared shows a linear relationship in the neighbourhood of the critical point and a critical Rayleigh number of 9.3×10^6 is determined by extrapolation.

Afin d'illustrer les solutions périodiques multiples, nous présentons dans la Fig. 9 les évolutions temporelles de la température au même point dans la cavité. Nous avons également disposé dans la Fig. 10 les fluctuations de la température obtenues à $Ra = 1.2 \times 10^7$. Comme on peut constater, les fluctuations de la température sont concentrées dans les zones pariétales et il semble que ces écoulements périodiques sont dûs à une instabilité de couches limites horizontales. Il est à noter que le rayonnement de surfaces faisant intervenir la température puissance 4 brise la centro-symétrie classique des équations de Boussinesq, c'est la raison pour laquelle la solution de base stationnaire en couplage convection naturelle–rayonnement pariétal ne présente plus aucune symétrie spatiale et que l'apparition de l'instationnarité ne brise plus que la translation en temps des solutions de base.

Étant donné l'apparition de l'instationnarité, il est intéressant de calculer le nombre de Rayleigh critique correspondant à la transition stationnaire–instationnaire, à savoir le point de bifurcation de Hopf. Une détermination précise est impossible par l'intégration temporelle des équations instationnaires car au voisinage du nombre de Rayleigh critique, les temps nécessaires à l'obtention des solutions à amplitude finie tendent vers l'infini. Comme pour une bifurcation de Hopf supercritique l'amplitude des solutions périodiques est proportionnelle à $(Ra - Ra_c)^{1/2}$, nous avons adopté, en supposant une bifurcation de Hopf supercritique, la méthode présentée dans [14] : calculer des solutions supercritiques pour de différentes valeurs du nombre de Rayleigh au voisinage de Ra_c , examiner la relation entre l'amplitude A des solutions et le nombre de Rayleigh et extrapoler les résultats à $A = 0$ pour obtenir Ra_c . Nous avons présenté dans la Fig. 11 les courbes $A^2 - Ra$: comme indiqué par la figure les relations quasi-linéaires confirment donc que la bifurcation est supercritique. L'extrapolation de ces deux courbes nous donne le nombre de Rayleigh critique égal à $Ra_c = 9.3 \times 10^6$.

Par rapport aux études antérieures réalisées en convection naturelle pure dans une cavité carrée différentiellement chauffée avec parois horizontales adiabatiques, on conclut en premier que la présence du rayonnement de surfaces avec une émissivité des quatre parois égale à $\varepsilon = 0.2$, fait baisser le nombre de Rayleigh critique. Comme on a vu ci-dessus que le rayonnement de surfaces fait tendre la structure de l'écoulement vers celle dans une cavité avec parois horizontales conductrices, il semble normal que le rayonnement de surfaces fait baisser le nombre de Rayleigh critique. Il est vraisemblable que le nombre de Rayleigh critique baissera d'avantage pour ε plus grande.

5. Conclusions

Nous avons mis en œuvre un code numérique pour l'étude du couplage de la convection naturelle en cavité avec le rayonnement de surfaces. Pour le valider, nous avons choisi une cavité remplie d'air dont les quatre parois ont la même émissivité. La validation du code développé est faite par une comparaison avec les données de la littérature pour $Ra = 10^4$, 10^5 et 10^6 et révèle le manque de données précises à cet effet. Il est donc impératif de disposer d'un benchmark problème en couplage convection naturelle–rayonnement de surfaces en vue de valider des codes numériques.

Par rapport à une cavité avec parois horizontales adiabatiques, le rayonnement de surfaces refroidit la paroi haute et réchauffe la paroi basse, il renforce le mouvement d'air le long des parois horizontales et il diminue la stratification

au centre de la cavité. Le rayonnement de surfaces fait que la structure d'écoulement ressemble de plus en plus à celle dans une cavité avec parois horizontales conductrices. Au niveau des transferts thermiques, le nombre de Nusselt radiatif est linéaire en la longueur de référence (la densité de flux net radiatif dimensionnel est linéaire en ΔT). Pour un nombre de Rayleigh fixe le rayonnement de surfaces influe d'autant plus sur l'écoulement de la convection que H est grande.

Le rayonnement de surfaces fait également baisser, par rapport au cas adiabatique sans rayonnement, le nombre de Rayleigh critique caractérisant l'apparition de l'instationnarité. Pour $\varepsilon = 0.2$ et $H = 0.335$ m, la bifurcation de Hopf correspondante est supercritique et le nombre de Rayleigh critique est localisé à 9.3×10^6 . A des nombres de Rayleigh supercritiques, deux branches de solutions périodiques à période sans dimension constante sont obtenues et des solutions périodiques multiples sont constatées entre $Ra = 1.2 \times 10^7$ et 1.3×10^7 .

Remerciements

Les auteurs remercient Dr. A. Mezrhab pour des discussions intéressantes. Le manuscrit a été amélioré grâce à des commentaires de qualité des experts référés.

Références

- [1] G. Lauriat, Combined radiation–convection in gray fluids enclosed in vertical cavities, *J. Heat Transfer* 104 (1982) 609.
- [2] L.C. Chang, K.T. Yang, J.R. Lloyd, Radiation–natural convection interactions in two dimensional complex enclosures, *J. Heat Transfer* 105 (1983) 89–95.
- [3] T. Fusegi, B. Farouk, Laminar and turbulent natural convection–radiation interactions in a square enclosure filled with a non-gray gas, *Numer. Heat Transfer, Part A* 15 (1989) 303–322.
- [4] A. Yücel, A. Acharya, M.L. Williams, Natural convection and radiation in a square enclosure, *Numer. Heat Transfer, Part A* 15 (1989) 261–278.
- [5] M. Kassemi, M.H.N. Naraghi, Analysis of radiation–natural convection interactions in 1-g and low-g environments using the discret exchange factor method, *Int. J. Heat Mass Transfer* 17 (1994) 4141–4149.
- [6] C.Y. Han, S.W. Baek, The effects of radiation on natural convection in a rectangular enclosure divided in two partitions, *Numer. Heat Transfer, Part A* 37 (3) (2000) 249–270.
- [7] G. Colomer, M. Costa, R. Consul, A. Oliva, Three-dimensional numerical simulation of convection and radiation in a differentially heated cavity using the discrete ordinates method, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2) (2004) 257–269.
- [8] A. Mezrhab, L. Bchir, Radiation–natural convection interactions in partitioned cavities, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow* 8 (7) (1998) 781–799.
- [9] C. Balaji, S.P. Venkateshan, Interaction of surface radiation with free convection in a square cavity, *Int. J. Heat Fluid Flow* 14 (1993) 260–267.
- [10] M. Akiyama, Q.P. Chong, Numerical analysis of natural convection with surface radiation in a square enclosure, *Numer. Heat Transfer, Part A* 31 (1997) 419–433.
- [11] K. Velusamy, T. Sundararajan, K.N. Seetharamu, Interaction effects between surface radiation and turbulent natural convection in square and rectangular enclosures, *J. Heat Transfer* 123 (2001) 1063–1070.
- [12] P. Le Quéré, M. Behnia, From onset of unsteadiness to chaos in a differentially heated square cavity, *J. Fluid Mech.* 359 (1998) 81–107.
- [13] S. Xin, P. Le Quéré, Linear stability analyses of natural convection flows in a differentially heated square cavity with conducting horizontal walls, *Phys. Fluids* 13 (9) (2001) 2529–2542.
- [14] P. Le Quéré, Etude de la transition à l'instationnarité des écoulements de convection naturelle en cavité verticale différenciellement chauffée par méthodes spectrales Chebyshev, Thèse d'Etat, Univ. de Poitiers, Poitiers, France, 1987.