

Modélisation de fissures elliptiques internes par hybridation de fonctions de poids

Brahim El Khalil Hachi ^a, Said Rechak ^b, Mohamed Haboussi ^{c,*}, M'barek Taghite ^c

^a Département électromécanique, centre universitaire de Djelfa, BP 3117, Ain-Cheih 17000, Djelfa, Algérie

^b Laboratoire de génie mécanique et développement, École nationale polytechnique, BP 182, El-Harrach 16200, Alger, Algérie

^c Laboratoire d'énergie et de mécanique théorique et appliquée (LEMTA), UMR 7563 CNRS INPL-UHP, BP 160, 54504 Vandœuvre-lès-Nancy, France

Reçu le 30 septembre 2005 ; accepté le 11 octobre 2005

Disponible sur Internet le 2 décembre 2005

Présenté par André Zaoui

Résumé

Une méthode améliorant le calcul des facteurs d'intensité de contrainte par hybridation de deux fonctions de poids est présentée et appliquée aux cas de fissures elliptiques internes sous différents chargements. L'hybridation consiste à utiliser l'une ou l'autre des deux fonctions dans la zone de la fissure où la fonction est la plus efficace. La délimitation des deux zones est faite après optimisation du rapport des axes et du rayon de courbure de la fissure. Lors de l'optimisation on cherche à atténuer l'effet des singularités présentes dans les fonctions de poids et à mieux prendre en compte l'influence de la courbure de l'ellipse. *Pour citer cet article : B. El Khalil Hachi et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Embedded elliptical cracks modeling with hybridization of weight functions. A method improving the evaluation of the stress intensity factor by hybridization of two weight functions is presented and applied to embedded elliptical cracks under various loadings. The hybridization consists in using one or the other function in the zone of the crack where it is the most efficient. The delimitation of the two zones is achieved after optimizing the axes ratio and the curvature radius of the crack. During this optimization we seek to reduce the effects of the singularities present in the weight functions as well as to take better into account the influence of the ellipse curvature. *To cite this article: B. El Khalil Hachi et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Hybridation ; Fonction de poids ; Facteur d'intensité de contrainte ; Fissure elliptique interne

Keywords : Computation solid mechanics; Hybridization; Weight function; Stress intensity factor; Embedded elliptical crack

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : Mohamed.Haboussi@ensem.inpl-nancy.fr (M. Haboussi).

Abridged English version

The development of weight functions in fracture mechanics started with the work of Bueckner [2]. The determination of the stress intensity factor (SIF), for semi-infinite crack in an infinite medium, was then achieved by means of a formulation using the Green function, for a semi-infinite crack, in an infinite medium. The idea of such an approach consists in employing one or several known solutions (reference solutions) of a particular case in order to find the solution for a general case. The reference solution generally comes from analytical results. But in some cases, the absence of such results necessitates the use of approximate solutions, as in Orynyak et al. [3] for the point weight function method PWF, in order to determine the general solution for semi-elliptical and quart-elliptical cracks.

The aim of this Note is to propose a method improving on the calculation of SIF in mode I for various stress distributions applied to elliptical cracks by means of hybridization of two weight functions. The adopted expression of the SIF is given by its general integral form on the surface of the crack (1) where $W_{QQ'}$ is the weight function and $q(Q)$ is the loading value at point Q . The idea of hybridization consists in dividing the ellipse area into two zones, an internal zone I and an external zone II (see Fig. 1(a)), then to use on each zone the appropriate weight function i.e. with the highest efficiency. Indeed, the classical weight functions (2) and (3) that we will use here exhibit a numerical efficiency which depends on the position in the crack surface. These functions (2) and (3) were proposed by respectively Oore et al. [1] and Krasowsky et al. [4] for the modeling of elliptical cracks.

The weight function of (3) is intended exclusively for cracks of elliptical form. Nevertheless, it presents an additional singularity $(1 - r/R)^{-1/2}$ as compared to (2). This makes (3) less efficient in the vicinity of the crack front ($r \rightarrow R$). This argument leads us to choose the weight function given by (3) for the internal zone I, and the weight function given by (2) for the external zone II. The proportion between these two zones given by (5) is determined by optimizing the ratio $\alpha = a/b$. In this optimization procedure we aim at reducing the singularity effects present in the weight functions as well as at taking better into account the role of the curvature radius of the crack front in the SIF evaluation.

The SIF expression (1) exhibits two singularities, when point Q is close to the crack front, present both in the weight functions (2) and (3). The first is a surface singularity due to the term $1/l_{QQ'}^2$, whereas the second is a contour singularity due to the term $1/\rho_Q^2$.

The treatment procedure of surface singularity employed here is similar to that used efficiently by Krasowsky et al. [4]. It consists in surrounding the point Q' , belonging to the crack front, by a small half-circle (see Fig. 1(b)) inside which the function $W_{QQ'}$ is approximated by the weight function of a rectilinear crack. The integral is then analytically calculated on the half-disk (6).

Concerning the treatment of the contour singularity which occurs when the point Q is close to the front crack (Γ) we make the choice to ignore a very thin band of the crack, of constant thickness, close to (Γ) as shown in Fig. 1(c). This assumption was also adopted by Krasowsky et al. [4] who considers a band with changing thickness. The weakness of the band thickness makes the impact on the final results negligible. To achieve the calculation of the contour integral a special treatment is done for the points which are close to the ignored band (see Fig. 1(d)). In this case, an analytical evaluation of the integral becomes possible (8). For the rest of the domain, the contour integral is evaluated as a discrete sum (9).

The present approach is applied to an embedded elliptical crack in an infinite body, under a polynomial loading (10), with various values of α and θ_r . The results obtained by using the hybridization approach in the case of a uniform loading are reported in Table 1 and compared to the analytical solution due to Shah and Kobayashi [5]. The present approach shows a high degree of accuracy (max error not exceeding 1.14%). It improves on the evaluation of the SIF compared to other weight function approaches of Krasowsky et al. [4], Oore et al. [1] and Wang et al. [8] for which the maximum errors are 6.31%, 17.89% and 17.19% respectively. For $\alpha = 0.5$, the effectiveness of the hybrid approach is clear (see Fig. 2), when compared with other approaches using other techniques such as the Finite Element Method (FEM) [9] and the eXtended Finite Element Method (XFEM) [10]. The same degree of accuracy is observed for other polynomial loadings; linear, quadratic and cubic (see Figs. 3 and 4).

The second treated example concerns a tube under internal pressure containing an elliptical embedded crack (Fig. 5(a)). In this case, the crack loading is given by Lamé's solution (11). Fig. 5 illustrates the good agreement of our results with those found for the same problem by the Hybrid Boundary Element Method (HBEM) proposed by Guozhong and Kankda [11]. These results enabled us to determine the field of validity of this approach according to the geometrical configuration of the tube.

1. Introduction

Dans cette Note, nous nous intéressons au calcul du facteur d'intensité de contrainte (FIC) pour une fissure elliptique en mode I, considéré comme le mode le plus dangereux. L'expression du FIC retenue à cet effet est celle basée sur les fonctions de poids. Elle est donnée par [1] :

$$K_{IQ'} = \int_{(S)} W_{QQ'} q(Q) dS \quad (1)$$

$K_{IQ'}$ représente le facteur d'intensité de contrainte en mode I au point Q' du fond de fissure, $q(Q)$ le chargement au point Q et S la surface de l'ellipse (fissure). $W_{QQ'}$ représente classiquement la fonction de poids liée au problème.

L'utilisation des fonctions de poids en mécanique de la rupture pour la détermination du facteur d'intensité de contrainte (FIC) remonte aux travaux de Bueckner [2] portant sur l'étude d'une fissure semi-infinie dans un milieu infini, à l'aide d'une approche basée sur la fonction de Green. Celle-ci consiste à se servir d'une ou plusieurs solutions connues (solutions de référence) d'un cas particulier dans le but de trouver la solution pour un cas plus général. La solution de référence vient généralement de résultats analytiques (exacts). Mais dans certains cas, l'absence de tels résultats oblige les auteurs, tels que Orynyak et al. [3] pour la méthode de fonction de poids du point (PWFPM), à utiliser des solutions approximatives de fissures elliptiques pour déterminer la solution générale dans le cas de fissures semi-elliptiques et quart-elliptiques. Dans le présent travail on se propose de définir cette fonction par hybridation de deux fonctions de poids approchées obtenues par Oore et Burns [1] et Krasowsky et al. [4]. (Une présentation détaillée de ces fonctions poids est proposée dans le paragraphe 2 de ce texte.) On montre alors qu'il est possible d'améliorer l'évaluation du FIC avec des temps de calcul comparables à ceux des méthodes standards.

2. Présentation de l'hybridation

La méthode d'hybridation développée ici utilise deux types de fonctions de poids. La première fonction a été développée par Oore et Burns [1] pour modéliser toute forme fermée de fissure dans un milieu infini :

$$W_{QQ'} = \frac{\sqrt{2}}{\pi l_{QQ'}^2 \sqrt{\int_{\Gamma} d\Gamma / (\rho_Q^2)}} \quad (2)$$

La deuxième est celle développée par Krasowsky et al. [4] pour les fissures elliptiques dans un milieu infini :

$$W_{QQ'} = \frac{2\Pi^{1/4}(\theta)}{\sqrt{\pi a(1-r^2(\varphi)/R^2(\varphi))}} l_{QQ'}^2 \int_{\Gamma} d\Gamma / \rho_Q^2 \quad (3)$$

Dans les relations (2) et (3), r et φ sont les coordonnées polaires du point arbitraire Q , $R(\varphi)$, la distance entre l'origine et le fond de fissure d'angle φ , $l_{QQ'}$, la distance entre le point Q' et le point arbitraire Q , (Γ) , le front de fissure elliptique, ρ_Q , la distance entre le point Q et le segment infinitésimal $d\Gamma$, $\Pi(\theta) = ((\sin^2 \theta + \alpha^4 \cos^2 \theta) / (\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta))$ et $\alpha = a/b$ (voir la Fig. 1(a)).

Partant de l'observation que les fonctions de poids n'ont pas la même efficacité numérique partout dans l'ellipse, l'idée de l'hybridation consiste à considérer que l'ellipse est séparable en deux zones I et II. Sur chacune des deux zones, on utilise la fonction de poids qui est la plus efficace. Les deux zones sont définies par :

$$\text{zone I: } \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 \leq 1; \quad \text{zone II: } \left(\frac{x}{b'}\right)^2 + \left(\frac{y}{a'}\right)^2 > 1 \quad (4)$$

avec $a'/a = b'/b = \beta$ et $\beta \in [0, 1]$. Le paramètre β de proportion entre les zones sera précisé par la suite.

La fonction de poids de l'expression (3) est destinée exclusivement aux fissures de forme elliptique. Néanmoins, elle présente une singularité supplémentaire $(1-r/R)^{-1/2}$ par rapport à l'expression (2). Ceci rend l'expression (3) moins efficace au voisinage du fond de fissure lorsque $r \rightarrow R$. Cet argument nous a conduits à choisir la fonction de poids (3) pour la zone elliptique I et la fonction de poids (2) pour la zone II.

Il reste à déterminer la proportion adéquate β entre les deux zones I et II. Il est à noter que la fonction de poids (2) tend, plus rapidement que la fonction de poids (3), vers la fonction de poids d'une fissure circulaire [4]

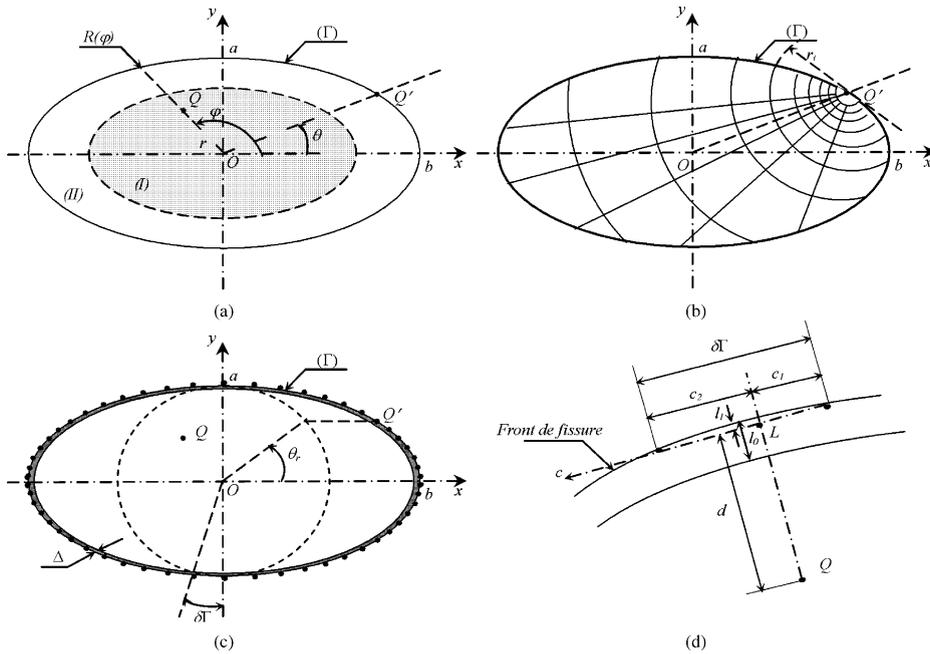


Fig. 1. (a) Subdivision de la fissure elliptique en deux zones ; (b) Discrétisation de la fissure ; (c) Discrétisation du front de la fissure ; (d) Agrandissement au voisinage du front de fissure.

Fig. 1. (a) Subdivision of the elliptical crack into two zones; (b) Discretization of the crack; (c) Discretization of the crack front; (d) Zoom in the vicinity of the crack front.

$\sqrt{R^2 - r^2} / (\pi \sqrt{\pi R l_{QQ'}^2})$ lorsque $\alpha \rightarrow 1$ (ceci a été vérifié numériquement). D'autre part, la fonction (3) est nettement plus adaptée à la variation du rayon de courbure R_c du front de la fissure (cas des ellipses aplaties ou des faibles valeurs de α). Ceci est confirmé par la présence, via la fonction $\Pi(\theta)$, du rayon de courbure $R_c = a\alpha^{-1}\Pi^{3/2}(\theta)$ dans l'expression de la fonction (3). Par conséquent, plus α est petit et le gradient du rayon de courbure élevé ($\theta = 0^\circ$ ou 180°), plus la zone I devrait s'agrandir vis-à-vis de la zone II. Compte tenu de ces considérations et après une étude détaillée du cas du chargement uniforme, les valeurs suivantes de β ont été retenues pour l'ensemble des cas traités :

$$\beta = (3/2) \min(a, R_c) \text{ pour } \alpha \in]0, 0.8[\text{ et } \beta = 1 - \alpha^2 \text{ pour } \alpha \in [0.8, 1] \tag{5}$$

3. Procédure numérique, maillage et singularités

Le calcul du FIC nécessite l'évaluation de deux types d'intégrale : de surface dans (1) et curviligne dans (2) et (3). Les différentes singularités présentes dans ces intégrales nécessitent un traitement qu'on détaille ci-après.

3.1. L'intégrale de surface

Dans l'intégrale de surface de l'Éq. (1), la technique de traitement de la singularité $1/l_{QQ'}^2$ est celle employée efficacement par Krasowsky et al. [4]. Elle consiste à entourer le point (Q') d'un petit demi-cercle de rayon R_0 sur lequel l'intégrale (1) est analytiquement évaluée pour la fonction de poids $W_{QQ'} = \sqrt{2d} / (\pi \sqrt{\pi l_{QQ'}^2})$ d'une fissure rectiligne [4] avec d la plus courte distance entre le point Q et le front de fissure. On trouve ainsi :

$$K_I^{S'} = \frac{8}{\pi \sqrt{\pi}} \sqrt{R_0} \left[2E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] q(Q') \tag{6}$$

Le FIC est donné dans ce cas par $K_I^S = K_I^{S'} + K_I^{S''}$ avec S , la surface de l'ellipse, S' , la surface intérieure au demi-cercle et S'' , la surface restante ; K et E sont respectivement les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce. Pour réduire l'erreur due à la linéarisation de la courbure au point (Q'), on prendra dans (6) $\min(R_c(Q'), a)/30 \leq R_0 \leq \min(R_c(Q'), a)/20$ alors que Krasowsky et al. [4] prennent $R_0 = \min(R_c(Q'), a)/30$.

En vue du calcul numérique de l'intégrale de surface, le domaine (S'') est discrétisé en traçant des demi-cercles concentriques de centre (Q') et de rayons $R_0 < r_0 < r_1 < r_2 < r_3 \dots$ et des demi-droites partant de (Q') (environ 60 dans le présent travail, voir la Fig. 1(b)).

3.2. L'intégrale de contour

Tant que le point Q est loin du front de fissure (Γ), l'intégrale en question se transforme en une somme :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} = \sum_{i=1}^{4N} \frac{(\delta\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} \tag{7}$$

Dans la relation (7), N désigne le quart du nombre de points subdivisant le contour (Γ). Afin de minimiser l'erreur commise lors de la linéarisation de l'arc de courbe $\delta\Gamma$, ce nombre doit satisfaire, selon Krasowsky et al. [4], la condition $N \geq \pi/(2\sqrt{8\mu\gamma})$ avec $\mu = l_1/l_0 \in [0.1, 0.2]$ (voir la Fig. 1(d)).

Lorsque Q est très proche du fond de fissure, l'intégrale $\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2}$ devient singulière ($\rho_Q \rightarrow 0$) et son évaluation numérique devient délicate. Pour traiter cette singularité nous ignorons, comme Krasowsky et al. [4] une bande très fine à proximité du contour d'épaisseur constante égale à $\Delta = \gamma a$ où $\gamma = 1/300$ (voir la Fig. 1(c)), ce qui nous distingue de Krasowsky et al. [4], pour qui cette épaisseur est variable. Le domaine effectif de la fissure devient $(x/b)^2 + (y/a)^2 \leq (1 - \Delta/R(\theta))^2$.

Si le point Q est situé à proximité de la bande fine ignorée, donc suffisamment proche du $k^{\text{ème}}$ segment du front de fissure discrétisé (Fig. 1(d)), l'intégrale est évaluée analytiquement sur ce segment afin d'éviter tout risque de singularité pouvant perturber le bon déroulement du calcul :

$$\int_{(\delta\Gamma)_k} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} \approx \int_{c_1}^{c_2} \frac{dc}{c^2 + d^2} = \left| \frac{1}{d} \left(\arctan \frac{c_2}{d} - \arctan \frac{c_1}{d} \right) \right| \tag{8}$$

L'Éq. (7) devient alors :

$$\int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{\rho_Q^2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\delta\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} + \int_{(\delta\Gamma)_k} \frac{d\Gamma}{\rho_Q} + \sum_{i=k+1}^{4N} \frac{(\delta\Gamma)_i}{\rho_{iQ}^2} \tag{9}$$

L'utilisation de (9) au lieu de (7) est justifiée par l'amélioration des résultats obtenus et permet d'éviter une discrétisation excessivement raffinée de la courbe (Γ), obligatoire lorsque Q se rapproche de celle-ci.

4. Exemples, résultats et interprétations

Nous avons élaboré un code de calcul nommé HWFun basé sur le langage C++ pour évaluer le FIC, par l'approche d'hybridation, dans le cas de fissures elliptiques. Deux exemples pratiques sont illustrés ci-après. Ils concernent le cas d'une fissure elliptique interne dans un milieu infini sous un chargement polynomial et le cas d'une fissure elliptique interne dans un tube sous pression.

4.1. Fissure elliptique interne dans un milieu infini sous un chargement polynomial

Nous considérons dans cet exemple que le chargement appliqué à la fissure est un chargement polynomial de la forme suivante :

$$\sigma = a_{ij} \left(\frac{x}{b} \right)^i \left(\frac{y}{a} \right)^j, \quad i, j \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} \tag{10}$$

Ce mode de chargement est couramment utilisé dans la littérature (voir par exemple Shah et Kobayashi [5], Raju et Newman [6], Orynyak et Gienko [7]) ; il permet de simuler de multiples situations pratiques.

Dans un premier temps, le cas du chargement uniforme ($a_{ij} = 0$, sauf $a_{00} = \sigma_0$) est considéré. Dans le Tableau 1, est représentée l'erreur relative commise par rapport à la solution analytique de Shah et Kobayashi [5] (mentionnée

sur le tableau), lors de l'évaluation du FIC adimensionnel $F_I = K_I E(\sqrt{1 - \alpha^2}) / (\sigma_0 \sqrt{\pi a})$ obtenu par l'approche d'hybridation, pour différentes valeurs du rapport α et de l'angle réduit $\theta_r = \arctan(\tan(\theta)/\alpha)$. Dans ce tableau sont également représentés les résultats trouvés par Wang et al. [8] ainsi que les écarts relatifs sur le FIC adimensionnel obtenus en utilisant les fonctions de poids proposées par Krasowsky et al. [4] et Oore et Burns [1].

Les comparaisons entre ces méthodes montrent que l'approche par hybridation donne de meilleurs résultats (erreur $\leq 1,14\%$) pour la majorité des configurations traitées (α, θ_r) à l'exception de quelques cas ($\alpha = 0,8, \theta_r \leq 22,5^\circ$) pour lesquels Wang et al. [8] trouvent des FIC plus précis et où l'erreur ne dépasse pas 1,5 % pour l'ensemble des méthodes. Des écarts plus importants sont relevés pour les autres méthodes, de l'ordre de 17 % pour Oore et Burns [1] et Wang et al. [8] lorsque par exemple $\alpha = 0,2, \theta_r = 0^\circ$. La Fig. 2 montre aussi l'efficacité de l'approche de l'hybridation comparée à d'autres techniques telles que la méthode des éléments finis FEM (Wang et Lambert [9]) ou la méthode des éléments finis étendus XFEM (Sukumar et al. [10]) pour un chargement uniforme et un rapport de $\alpha = 0,5$.

Pour les chargements d'ordres supérieurs : linéaire (LinX : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{10} = \sigma_0$ et LinY : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{01} = \sigma_0$) et quadratique (QuadXX : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{20} = \sigma_0$ et QuadYY : $a_{ij} = 0$, sauf $a_{02} = \sigma_0$), les résultats trouvés par la

Tableau 1

FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique sous chargement uniforme pour différentes valeurs du rapport α

Table 1

Dimensionless SIF F_I on elliptical crack front under uniform load for various values of the α ratio

α	$\theta_r \rightarrow$	0.00	11.25	22.50	33.75	45.00	56.25	67.50	78.75	90.00
0.8	Sol. anal. – Shah	0.894	0.899	0.912	0.931	0.952	0.971	0.987	0.997	1.000
	Er(%) HWFun	0.94	0.84	0.56	0.22	0.13	0.37	0.56	0.62	0.66
	Er(%) FP – Krasowsky	1.55	1.43	1.09	0.60	0.09	0.44	0.83	1.13	1.20
	Er(%) FP – Wang	0.40	0.15	0.44	0.77	1.23	1.55	1.98	2.11	2.63
0.6	Sol. anal. – Shah	0.775	0.787	0.821	0.864	0.908	0.946	0.976	0.994	1.000
	Er(%) HWFun	0.86	0.55	0.06	0.34	0.60	0.56	0.38	0.22	0.15
	Er(%) FP – Krasowsky	3.54	3.25	2.32	1.20	0.15	0.72	1.40	1.86	2.08
	Er(%) FP – Wang	3.02	2.49	1.13	1.52	2.20	2.64	3.07	3.52	4.00
0.4	Sol. anal. – Shah	0.632	0.662	0.729	0.805	0.873	0.928	0.968	0.992	1.000
	Er(%) HWFun	0.22	0.74	0.63	1.14	0.97	0.51	0.19	0.11	0.01
	Er(%) FP – Krasowsky	5.48	4.65	2.84	1.27	0.08	0.70	1.20	1.54	1.90
	Er(%) FP – Wang	7.12	6.04	2.74	0.62	2.23	3.23	3.93	4.13	4.20
0.2	Sol. anal. – Shah	0.447	0.526	0.652	0.762	0.849	0.916	0.963	0.991	1.000
	Er(%) HWFun	0.60	1.05	1.07	1.05	0.52	0.41	0.61	1.00	0.69
	Er(%) FP – Krasowsky	6.31	3.18	0.71	0.08	0.15	0.04	0.35	0.62	0.30
	Er(%) FP – Wang	17.19	11.19	3.09	0.24	0.88	1.93	2.19	2.09	2.34
	Er(%) FP – Oore	17.89	11.41	3.53	1.31	1.18	1.97	2.08	2.73	2.90

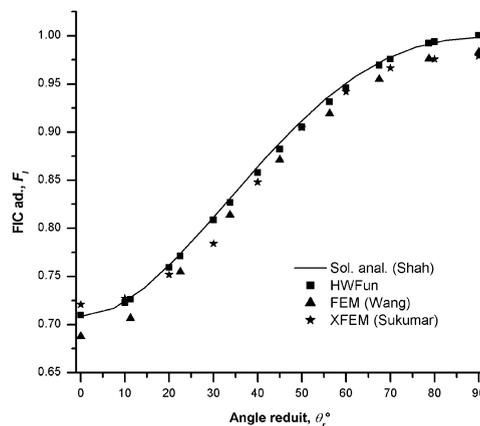


Fig. 2. FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique sous chargement uniforme pour $\alpha = 0,5$.

Fig. 2. Dimensionless SIF F_I on an elliptical crack front under uniform loading for $\alpha = 0,5$.

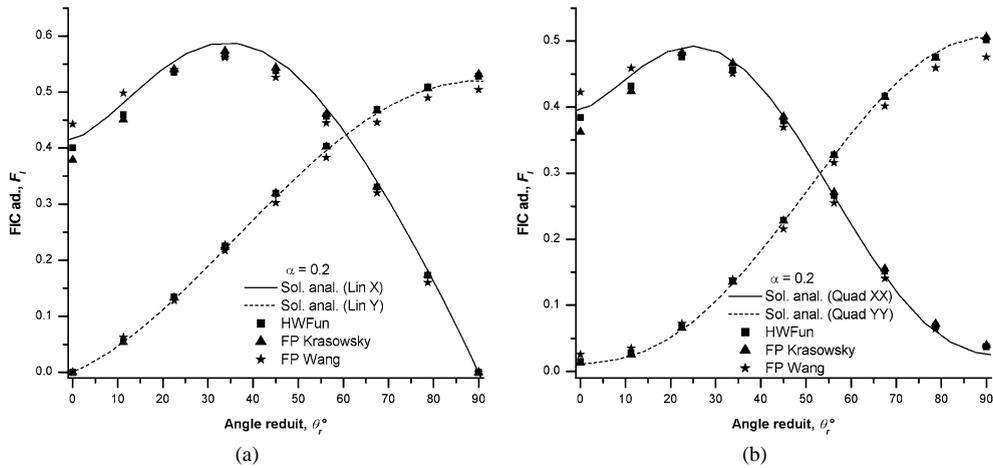


Fig. 3. FIC adimensionnel F_I sur le contour de la fissure elliptique pour $\alpha = 0,2$. (a) Chargement linéaire ; (b) Chargement quadratique.
 Fig. 3. Dimensionless SIF F_I on an elliptical crack front for $\alpha = 0.2$. (a) Linear loading; (b) Quadratic loading.

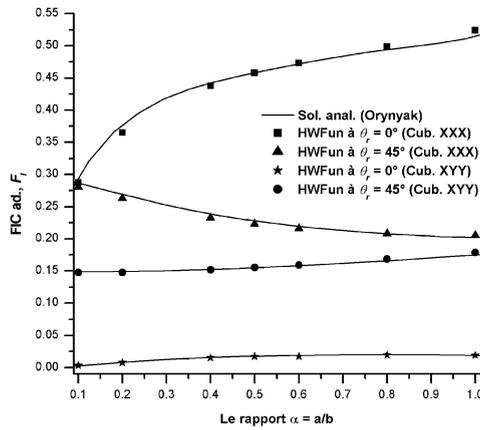


Fig. 4. Variation du FIC adimensionnel F_I en fonction du rapport α à $\theta_r = 0^\circ$ et 45° pour des chargements cubiques.
 Fig. 4. Variation of dimensionless SIF F_I according to the ratio α at $\theta_r = 0^\circ$ and 45° for cubic loadings.

présente approche pour différentes valeurs de $\alpha(0,2; 0,4; 0,6; 0,8)$ montrent une meilleure corrélation avec la solution analytique de Shah et Kobayashi [5] pour des angles réduits entre 0° et 90° . Le cas de $\alpha = 0,2$ nous semble significatif et est illustré sur la Fig. 3.

Dans le cas d'un chargement cubique, les résultats sont en parfaite concordance avec la solution analytique d'Orynyak et Gienko [7]. Sur la Fig. 4, une illustration des résultats est représentée. Elle concerne le FIC adimensionnel en fonction de α pour $\theta_r = 0^\circ$ et 45° .

4.2. Fissure elliptique interne dans un tube sous pression

On choisit ici d'appliquer notre approche pour des chargements non polynomiaux tels que c'est le cas pour des tubes sous pression présentant des fissures elliptiques internes (Fig. 5(a)). Dans ce cas, la distribution de la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ à l'intérieur de l'ellipse est donnée par la relation de Lamé :

$$\sigma = p \left[\left(\frac{R_i + t}{R_i + t_1 + y} \right)^2 + 1 \right] / \left[\left(\frac{R_i + t}{R_i} \right)^2 - 1 \right] \tag{11}$$

avec R_i le rayon intérieur du tube, t son épaisseur, t_1 et t_2 les distances entre le centre de la fissure et les surfaces du tube, p , la pression intérieure et y , l'ordonnée du point Q dans le repère de la Fig. 1(a).

La présente approche est comparée avec la méthode des éléments de frontières hybrides HBEM développée par Guozhong et al. [11]. Le FIC adimensionnel $F'_I = K_I E(k) / (p(R_i/t)\sqrt{\pi a})$ est alors déterminé sur le contour de l'ellipse pour les configurations suivantes : $t/R_i = 0,1$, $a/t_1 = a/t_2 \in \{0,2, 0,4\}$, $\alpha \in \{0,25, 0,50, 1,00\}$.

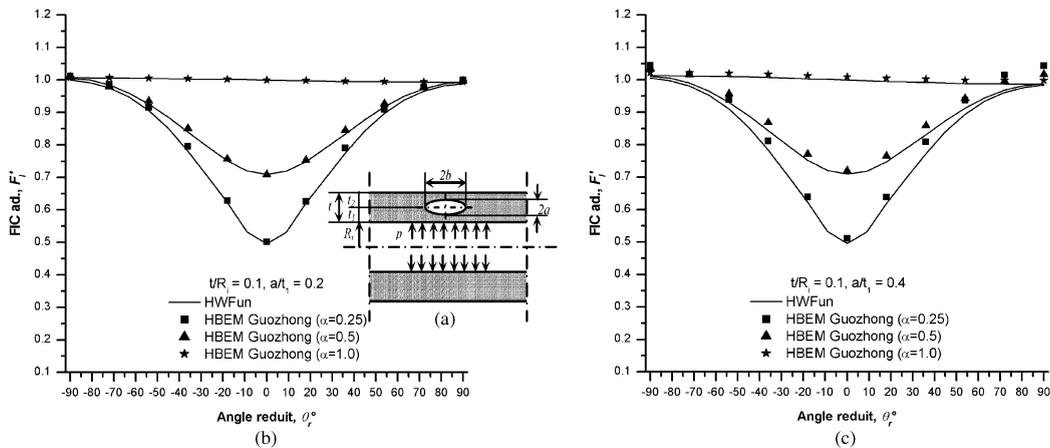


Fig. 5. Fissure elliptique dans un tube sous pression. (a) Paramètres géométriques du tube ; (b) FIC adimensionnel F_I' pour $a/t_1 = 0,4$; (c) FIC adimensionnel F_I' pour $a/t_1 = 0,2$.

Fig. 5. Embedded elliptical crack in pressurized cylinder. (a) Geometrical parameters of the cylinder; (b) Dimensionless SIF F_I' for $a/t_1 = 0.4$; (c) Dimensionless SIF F_I' for $a/t_1 = 0.2$.

Comme on peut le constater sur les Figs. 5(b) et 5(c), notre approche initialement prévue pour des corps infinis reste valable même pour des corps finis (c'est le cas pour le tube étudié). Le décalage avec la HBEM, qui est une approche plus générale, ne dépasse pas 6 % tant que a/t_1 et $a/t_2 \leq 0,4$.

Le décalage augmente en se rapprochant des surfaces libres du tube, c'est-à-dire lorsque le rapport a/t_1 augmente ou lorsque θ_r tend vers $\pm 90^\circ$. Les surfaces libres engendrent des concentrations de contraintes non prises en compte par la méthode d'hybridation dans sa version actuelle.

5. Conclusion

Compte tenu de sa simplicité de mise en œuvre comparée à d'autres méthodes et de son adaptabilité tout en ayant des intervalles de validité acceptables, l'approche par hybridation constitue un outil très efficace numériquement pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte en mode I.

Références

- [1] M. Oore, D.J. Burns, Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields, *Trans. ASME J. Pressure Vessel Technol.* 102 (2) (1980) 202–211.
- [2] H.F. Bueckner, A novel principle for the computation of stress intensity factors, *Z. Angew. Math.* 50 (1970) 529–546.
- [3] I.V. Orynyak, M.V. Borodii, V.M. Torop, Approximate construction of a weight function for quarter-elliptical and semi-elliptical cracks subjected to normal stresses, *Engrg. Fracture Mech.* 40 (1994) 143–151.
- [4] A.J. Krasowsky, I.V. Orynyak, A.Y. Gienko, Approximate closed form weight function for an elliptical crack in an infinite body, *Int. J. Fracture* 99 (1/2) (1999) 117–130.
- [5] R.C. Shah, A.S. Kobayashi, Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading, *Engrg. Fracture Mech.* 3 (1971) 71–96.
- [6] I.S. Raju, J.C. Newman Jr., Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical vessels, *Trans. ASME J. Pressure Vessel Technol.* 104 (1982) 293–298.
- [7] I.V. Orynyak, A.Y. Gienko, Mode-I elliptical crack in an infinite elastic body—Part 1: Crack-face displacement for the polynomial law of loading, *Strength of Mater. (Ukraine)* 34 (1) (2002) 12–26.
- [8] X. Wang, S.B. Lambert, G. Glinka, Approximate weight functions for embedded elliptical cracks, *Engrg. Fracture Mech.* 59 (1998) 381–392.
- [9] X. Wang, S.B. Lambert, Stress intensity factors and weight functions for high aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates, *Engrg. Fracture Mech.* 57 (1) (1997) 13–24.
- [10] N. Sukumar, D.L. Chopp, B. Moran, Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation, *Engrg. Fracture Mech.* 70 (2003) 29–48.
- [11] C. Guozhong, C. Kankda, Analysis of embedded elliptical cracks in cylindrical pressure vessels, *Int. J. Pressure Vessels Piping* 64 (1995) 153–159.