

# Résistance d'un composite à renforts rigides : le cas d'une matrice de Drucker–Prager avec règle d'écoulement plastique non associée

Luc Dormieux \*, Jean-François Barthélémy, Samir Maghous

*ENPC, institut Navier, 6 et 8, avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-la-Vallée, France*

Reçu le 18 novembre 2005, accepté après révision le 21 novembre 2005

Disponible sur Internet le 22 décembre 2005

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

---

## Résumé

On considère un comportement rigide plastique caractérisé par un critère de rupture de Drucker–Prager et une règle d'écoulement non associée. On montre que ce dernier peut être approché formellement par une suite de comportements de types visqueux avec précontrainte isotrope. On s'intéresse alors aux états limites d'un composite dont le matériau précédent constitue la matrice, renforcée par des inclusions rigides. On montre que ces derniers sont placés sur un cône de Drucker–Prager dont le coefficient de frottement, supérieur à celui de la matrice, est donné analytiquement en fonction des caractéristiques du critère et de la règle d'écoulement de celle-ci, ainsi que de la fraction volumique des inclusions. *Pour citer cet article : L. Dormieux et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Strength of a composite reinforced by rigid inclusions: the case of a Drucker–Prager matrix with non associated plastic flow rule.** A rigid plastic behavior characterized by a failure criterion of the Drucker–Prager type and a non associated flow rule is considered. The latter can be viewed formally as the limit of a sequence of viscous behaviors with isotropic prestress. The limit states of a composite made up of such a material reinforced by rigid inclusions are then determined. The latter lie on a Drucker–Prager cone which friction coefficient is greater than that of the matrix and depends on the characteristics of the strength and of the flow rule of the matrix, as well as on the volume fraction of the inclusions. *To cite this article: L. Dormieux et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2005 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés* : Milieux continus ; Analyse limite ; Plasticité non associée ; Drucker–Prager ; Homogénéisation

*Keywords* : Continuum mechanics ; Limit analysis ; Non-associated plasticity ; Drucker–Prager ; Homogenization

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [dormieux@lmsc.enpc.fr](mailto:dormieux@lmsc.enpc.fr) (L. Dormieux).

## Abridged English version

The homogenized criterion of a composite made up of rigid inclusions embedded in a matrix obeying a Drucker–Prager strength criterion has been derived in [1] with the assumption that the flow rule of the matrix satisfies the normality condition. This Note deals with the case where this assumption is not valid.

$\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\mathbf{d}$  and  $\underline{v}$  respectively denote the stress, strain rate and velocity fields in a representative elementary volume (r.e.v.)  $\Omega$  of reinforced material.  $\boldsymbol{\Sigma}$  and  $\mathbf{D}$  denote the corresponding macroscopic stress and strain rate tensors. The mean local stress is  $\sigma_m = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} / 3$  and the local volume strain rate is  $d_v = \text{tr } \mathbf{d}$ .  $\boldsymbol{\delta}$  denoting the second order identity tensor, we then introduce the deviatoric parts  $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$  and  $\mathbf{d}_d = \mathbf{d} - (d_v/3) \boldsymbol{\delta}$  of  $\boldsymbol{\sigma}$  and  $\mathbf{d}$ , as well as the scalar deviatoric stress and strain rate defined as  $\sigma_d = (\boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d)^{1/2}$  and  $d_d = (\mathbf{d}_d : \mathbf{d}_d)^{1/2}$ . With these notations, the strength criterion of the solid matrix is given by (1).

Following [2], we first look for a state equation of the solid matrix written formally in the framework of viscoplasticity (Section 2). When the normality rule is fulfilled in the form  $d_v = T d_d$ , the technique proposed in [3,1] consists in relating the stress and the strain rate tensors by (3), in which  $f_a(X)$  is a sequence of  $C^2$ -class convex functions ( $a > 0$ ), decreasing on  $]-a, +\infty[$ , with  $\lim_{X \rightarrow -a^+} f_a(X) = +\infty$  and  $f_a(X) = 0$  for  $X > 0$  (see Fig. 1). Such a stress state satisfies the strength criterion in the form (1). Besides, it can be shown that the normality rule  $d_v = T d_d$  is indeed fulfilled asymptotically, when  $a \rightarrow 0^+$ , (provided that  $\boldsymbol{\sigma} \neq h \boldsymbol{\delta}$ ).

In order to generalize this approach to the non associated flow rule  $d_v = t d_d$  with  $0 \leq t < T$ , (3) is now replaced by (4), with  $Y = d_v - t d_d$ . With respect to (3), an isotropic prestress  $\sigma_o^p(Y) \boldsymbol{\delta}$  is introduced. Its value is derived in (6), so that (1) be satisfied. It can be shown that the condition  $d_v = t d_d$  is fulfilled asymptotically when  $a \rightarrow 0^+$  (except for the stress state  $\boldsymbol{\sigma} \neq h \boldsymbol{\delta}$ ). Note that (4)–(6) can be written in the form (7) with the secant tensors  $\mathbf{C}^m(\mathbf{d})$  and  $\boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{d})$  given in (8) and (9) respectively.

Let us now consider the reinforced composite and seek its limit stress states at the macroscopic scale (Section 3). The latter cannot be derived from the classical theorems of limit analysis since the normality rule is not fulfilled. We herein extend the definition of the limit stress states proposed in [4,5] to the context of homogenization. More precisely, uniform strain boundary conditions  $\underline{v} = \mathbf{D} \cdot \underline{x}$  are applied at point  $\underline{x}$  of the boundary  $\partial\Omega$ . For a given value of  $a$ , a macroscopic stress tensor  $\boldsymbol{\Sigma}_a$  is said to be a limit state of the r.e.v. if there exists a microscopic stress field  $\boldsymbol{\sigma}$  statically admissible with  $\boldsymbol{\Sigma}$  ( $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0$ , average stress tensor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\Sigma}$ ) and a velocity field meeting uniform strain boundary conditions, that are related by the state equation (5). The limit when  $a \rightarrow 0$  of these limit states is then considered. The corresponding strain rate tensor  $\mathbf{D}$  then describes the plastic flow of the homogenized material, when subjected to  $\boldsymbol{\Sigma} = \lim_{a \rightarrow 0} \boldsymbol{\Sigma}_a$ .

The limit states are determined at Section 4 in the framework of the modified secant method [6,7]. This approach is based on the concept of effective strain rate, defined in the present case by (10). The method amounts to replacing the ‘real matrix’ with state equation (7) by a linear effective material defined by (11). We now need estimates of the volume and deviatoric effective strain rates. Following [7], the latter can be derived from the derivatives of the dissipation  $\Phi(\mathbf{D})$  with respect to  $k^m$  and  $\mu^m$  (see (15), (16)). The stress solution  $\boldsymbol{\Sigma}$  to the non linear problem (13), (14)–(16) is given in (20) which shows that the homogenized material obeys a Drucker–Prager strength criterion. In turn, a strain rate  $\mathbf{D}$  associated with  $\boldsymbol{\Sigma}$  representing the plastic flow at the macroscopic scale is subjected to the condition (19), which can be interpreted as the (non associated) macroscopic flow rule. In the particular cases  $t = 0$  (no plastic volume strain) and  $t = T$  (normality rule), we retrieve the results already presented in [1] and [8] respectively.

## 1. Introduction

On considère dans cette Note un composite comportant une matrice obéissant à un critère de rupture de Drucker–Prager et des renforts rigides supposés infiniment résistants. Le mortier et certains sols dits grossiers constituent des exemples d’un tel matériau. Une méthode pour la détermination du critère de rupture homogénéisé a été présentée dans [1] dans l’hypothèse où la règle d’écoulement de la matrice, supposée rigide-plastique, est associée. L’objet de cette Note est d’aborder la situation où la condition de normalité n’est plus vérifiée.

Dans la suite,  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{d}$  désignent respectivement les champs de contrainte et de taux de déformation dans un volume élémentaire représentatif (v.e.r.)  $\Omega$  du matériau renforcé. Les tenseurs identité du second ordre et du quatrième ordre sont notés  $\boldsymbol{\delta}$  et  $\mathbb{I}$  respectivement. On fera également appel à  $\mathbb{J} = \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} / 3$  et à  $\mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J}$ . On introduit la contrainte moyenne  $\sigma_m = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} / 3$ , le taux de déformation volumique  $d_v = \text{tr } \mathbf{d}$ , ainsi que les parties déviatoriques  $\boldsymbol{\sigma}_d = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta}$

et  $\mathbf{d}_d = \mathbf{d} - (d_v/3)\boldsymbol{\delta}$  des tenseurs de contrainte et de taux de déformation. On note encore  $\sigma_d = (\boldsymbol{\sigma}_d : \boldsymbol{\sigma}_d)^{1/2}$  et  $d_d = (\mathbf{d}_d : \mathbf{d}_d)^{1/2}$ .

Avec ces notations, le critère de Drucker–Prager qui s’applique à la matrice s’écrit :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = T(\sigma_m - h) + \sigma_d = 0 \quad (1)$$

où  $h$  et  $T$  caractérisent respectivement la résistance en traction isotrope et le coefficient de frottement. Dans cette Note, la règle d’écoulement de la matrice spécifie la proportionnalité entre  $d_v$  et  $d_d$  sous la forme  $d_v = t d_d$  avec  $t \in [0, T]$ . Le cas particulier  $t = T$  correspond à la normalité.

## 2. Équation d’état dans la matrice

Dans le cas où la règle de normalité s’applique, l’idée consiste à utiliser la fonction d’appui  $\pi(\mathbf{d})$  du convexe définissant les états de contrainte supportables ( $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ ) comme potentiel pour l’écriture de l’équation d’état sous la forme [2] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}} \quad (2)$$

On montre que le tenseur de contrainte ainsi défini réalise la condition  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ . Dans le cas du matériau de Drucker–Prager, cette démarche doit être aménagée en raison des singularités de la fonction d’appui [3,1]. En effet, la fonction d’appui  $\pi(\mathbf{d})$  est finie, égale à  $h d_v$  si  $X = d_v - T d_d \geq 0$ , mais est infinie pour  $X < 0$  [9]. Pour traiter cette singularité, on introduit une suite de potentiels de la forme  $\psi_a(d_v, d_d) = f_a(X) + h d_v$  indexée par des réels  $a > 0$ , à partir duquel l’état de contraintes s’écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{d}} = f'_a(X) \left( \boldsymbol{\delta} - T \frac{\mathbf{d}_d}{d_d} \right) + h \boldsymbol{\delta} \quad (X = d_v - T d_d) \quad (3)$$

Les fonctions  $f_a(x)$  sont de classe au moins  $C^2$ , convexes et décroissantes sur  $]-a, +\infty[$ , nulles sur  $\mathbf{R}^+$  et tendent vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow -a^+$  (voir Fig. 1). Il est facile de voir que la suite de fonctions  $\psi_a$  correspondante converge simplement vers la fonction d’appui  $\pi(\mathbf{d})$  de Drucker–Prager quand  $a$  tend vers 0. Lorsque l’état de contraintes est différent de  $h\boldsymbol{\delta}$ , (3) montre que  $f'_a(X) \neq 0$ , soit  $X \in ]-a, 0[$ . La règle de normalité, c’est-à-dire  $d_v = T d_d$ , est donc vérifiée asymptotiquement quand  $a \rightarrow 0^+$ .

On cherche à présent à généraliser cette démarche à une règle d’écoulement non associée ( $d_v = t d_d$ ,  $0 \leq t < T$ ), le critère de rupture étant toujours donné par (1). On fait à nouveau appel à la suite de fonctions  $f_a(x)$ . L’état de contraintes est maintenant défini au moyen d’un potentiel  $\psi_a(d_v, d_d) = f_a(Y) + h d_v$  et une précontrainte  $\sigma_o^p(Y)$ , avec  $Y = d_v - t d_d$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi_a}{\partial \mathbf{d}}(Y) + \sigma_o^p(Y) \boldsymbol{\delta} \quad (4)$$

On tire de (4) que

$$\sigma_m = f'_a(Y) + h + \sigma_o^p(Y) ; \quad \sigma_d = -t f'_a(Y) \frac{d_d}{d_d} \quad (5)$$

de sorte que la condition (1) impose la valeur de  $\sigma_o^p(Y)$  :

$$\sigma_o^p(Y) = \left( \frac{t}{T} - 1 \right) f'_a(Y) \quad (6)$$

De surcroît, si  $\boldsymbol{\sigma}$  est un état de contraintes différent de  $h\boldsymbol{\delta}$ , (5) indique que  $Y < 0$  et que la règle d’écoulement non associée  $d_v = t d_d$  est satisfaite asymptotiquement quand  $a \rightarrow 0$ . Pour la suite, il est utile de remarquer que l’équation d’état (4) peut être mise sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}^m(\mathbf{d}) : \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}^p(\mathbf{d}) \quad (7)$$

faisant intervenir le tenseur sécant  $\mathbb{C}^m(\mathbf{d})$  isotrope donné par

$$\mathbb{C}^m(\mathbf{d}) = 3k^m \mathbb{J} + 2\mu^m \mathbb{K} \quad \text{avec } k^m = \frac{f'_a(Y)}{Y} ; \quad \mu^m = -t \frac{f'_a(Y)}{2d_d} \quad (8)$$

et la précontrainte isotrope  $\sigma^P = \sigma^P \delta$  avec

$$\sigma^P = h + \frac{f'_a(Y)}{Y} \left( \frac{t}{T} Y - d_v \right) \quad (9)$$

### 3. États limites du matériau renforcé

On s'intéresse à présent à la résistance du matériau constitué de la matrice décrite à la Section 2 et de renforts rigides. On cherche à déterminer celle-ci par un raisonnement micromécanique. Plus précisément, on considère un v.e.r.  $\Omega$  de ce matériau soumis au mode de chargement défini par des conditions aux limites uniformes en déformation : le champ de vitesse  $\underline{v}$  est de la forme  $\underline{D} \cdot \underline{x}$  sur la frontière  $\partial\Omega$ . Le tenseur  $\underline{D}$  s'interprète comme le taux de déformation macroscopique. Le champ  $\underline{v}$  est dit cinématiquement admissible (c.a.) avec  $\underline{D}$  dans le mode de chargement. On introduit le taux de déformation volumique  $D_v$ , la partie déviatorique  $\underline{D}_d$  de  $\underline{D}$  et sa norme  $D_d = \sqrt{\underline{D}_d : \underline{D}_d}$ . Les états de contrainte du v.e.r. sont définis à l'échelle macroscopique par un tenseur  $\underline{\Sigma}$  et, à l'échelle microscopique, par un champ  $\sigma$  à divergence nulle, de moyenne  $\bar{\sigma}$  égale à  $\underline{\Sigma}$ . Un tel champ  $\sigma$  est dit statiquement admissible (s.a.) avec  $\underline{\Sigma}$ .

L'approche classique du calcul à la rupture permet de déterminer le domaine  $K$  des chargements potentiellement supportables [9]. Il s'agit des états de contrainte macroscopiques  $\underline{\Sigma}$  pour lesquels il existe un champ de contraintes microscopiques  $\sigma$  s.a. avec  $\underline{\Sigma}$  et compatibles avec le critère de rupture local ( $\mathcal{F}(\sigma) \leq 0$  dans la matrice). Cependant, étant implicitement dédiée aux matériaux doués d'une règle d'écoulement plastique associée, cette approche de la résistance n'est pas adaptée à la situation présente. La définition des états limites présentée ci-après transpose dans le contexte de l'homogénéisation celle proposée dans [4,5].

On commence par raisonner à  $a$  fixé. Un état de contrainte représenté par un tenseur  $\underline{\Sigma}$  est dit état limite du composite constitué par la matrice définie par  $f_a$  et les renforts rigides s'il existe un champ  $\sigma$  s.a. avec  $\underline{\Sigma}$  et un champ de vitesse  $\underline{v}$  c.a. dans le mode, tels que  $\sigma$  soit relié au taux de déformation  $\underline{d} = (\underline{\text{grad}} \underline{v} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{v})/2$  par (5). Notons que cette définition fait correspondre à  $\underline{\Sigma}$  le taux de déformation macroscopique  $\underline{D}$  associé à  $\underline{v}$ . L'analyse des propriétés de  $\underline{D}$  fournit la structure de la règle d'écoulement macroscopique. Dans un deuxième temps, les états limites du matériau de Drucker–Prager renforcé par les inclusions rigides sont obtenus par passage à la limite ( $a \rightarrow 0$ ). Soit  $\mathcal{E}_t$  l'ensemble des états limites ainsi obtenu.

Dans le cas particulier  $t = T$ , cette définition coïncide avec celle de l'analyse limite :  $\mathcal{E}_t = \partial K$ . En revanche, lorsque  $t < T$ , l'ensemble  $\mathcal{E}_t$  des états limites ainsi obtenu est un sous-ensemble du domaine des chargements extrêmes  $K$  déterminé par l'analyse limite. Néanmoins, à la différence de la situation où la règle d'écoulement est associée, il importe de souligner qu'il n'existe pas de théorème général assurant que les états limites de  $\mathcal{E}_t$  soient nécessairement accessibles au terme d'un trajet de chargement issu d'un état de contraintes initial quelconque situé à l'intérieur de  $\mathcal{E}_t$ .

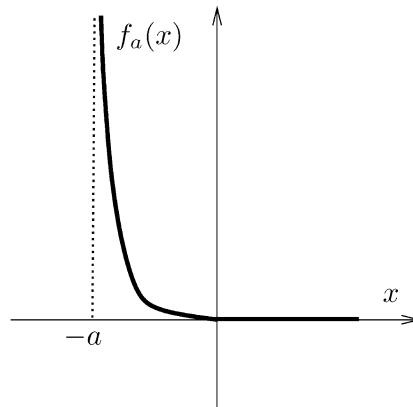


Fig. 1. Allure de la fonction  $f_a(x)$ .

Fig. 1. Shape of the function  $f_a(x)$ .

Notons que l'état de contraintes macroscopique  $\Sigma = h\delta$  est un état limite particulier puisque les champs uniformes  $\sigma = h\delta$  et  $\underline{v} = 0$  possèdent les propriétés requises. On s'intéresse à présent aux états limites  $\Sigma \neq h\delta$ . Compte tenu de l'écriture de l'équation d'état (5) de la matrice sous la forme (7), la détermination de ces derniers est abordée dans le cadre de la méthode sécante modifiée [6,7].

#### 4. Application de la méthode sécante modifiée

On se donne un taux de déformation macroscopique  $\mathbf{D}$  tel que  $\mathbf{D}_d \neq 0$  et l'on cherche s'il est possible d'associer à  $\mathbf{D}$  un état de contraintes macroscopique  $\Sigma \neq h\delta$ , qui soit état limite au sens de la Section 3. On définit les taux de déformations effectifs volumique  $d_v^e$  et déviatorique  $d_d^e$  dans la matrice par :

$$d_v^e = (\overline{d_v^m})^{1/2}; \quad d_d^e = (\overline{d_d^m})^{1/2} \quad (10)$$

où  $(\overline{\cdot})^m$  désigne l'opérateur de moyenne sur le sous-domaine du v.e.r. occupé par la matrice. On note que  $d_d^e \geq D_d/(1-\varphi) > 0$ . De façon cohérente avec ces définitions, on introduit encore l'estimation effective  $Y^e$  de  $Y = d_v - td_d$  définie par  $Y^e = d_v^e - td_d^e$ .

On travaille en premier lieu avec  $a$  fixé, avant de procéder au passage à la limite  $a \rightarrow 0$ . On commence par raisonner en modélisant les renforts rigides comme un matériau viscoélastique linéaire de viscosité infinie et en remplaçant la matrice par le matériau viscoélastique linéaire « effectif » dont l'équation d'état s'écrit :

$$\sigma = \mathbb{C}^m(d_v^e, d_d^e) : \mathbf{d} + \sigma^p(d_v^e, d_d^e) \quad (11)$$

Il est possible d'écarter le cas de figure  $Y^e \geq 0$ . En effet, s'il en était ainsi, alors le champ  $\sigma$  serait uniforme dans la matrice, égal à  $h\delta$  (voir (8) et (9)). Il en serait alors de même de  $\Sigma$ . En conséquence, les états limites  $\Sigma \neq h\delta$  correspondent à la situation  $Y^e \in ]-a, 0[$ . Pour ces derniers, le passage à la limite  $a \rightarrow 0$  impose la règle d'écoulement sous la forme :

$$\lim_{a \rightarrow 0} d_v^e = t \lim_{a \rightarrow 0} d_d^e; \quad \lim_{a \rightarrow 0} \frac{Y^e}{d_d^e} = 0 \quad (12)$$

où l'on a tenu compte de la propriété  $d_d^e > D_d$ . En utilisant le théorème de Levin et la nullité des déformations dans les renforts, le comportement homogénéisé du composite constitué de la matrice décrite par (11) et ses inclusions rigides prend la forme

$$\Sigma = \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{D} + \sigma^p \delta \quad \text{avec } \mathbb{C}^{\text{hom}} = 3k^{\text{hom}} \mathbb{J} + 2\mu^{\text{hom}} \mathbb{K} \quad (13)$$

La morphologie du composite envisagée dans cette Note incite à estimer les modules de viscosité homogénéisés à l'aide du schéma de Mori–Tanaka qui coïncide ici avec la borne inférieure de Hashin–Shtrikman. Compte tenu du caractère rigide des renforts (de fraction volumique  $\varphi$ ), il vient :

$$k^{\text{hom}} = \frac{3k^m + 4\varphi\mu^m}{3(1-\varphi)}; \quad \frac{\mu^{\text{hom}}}{\mu^m} = \frac{k^m(6+9\varphi) + \mu^m(12+8\varphi)}{6(k^m + 2\mu^m)(1-\varphi)} \quad (14)$$

Compte tenu de la précontrainte macroscopique, le potentiel macroscopique  $\Phi(\mathbf{D})$  du composite linéaire d'équation d'état (13) s'écrit :

$$\Phi(\mathbf{D}) = \frac{1}{2} \mathbf{D} : \mathbb{C}^{\text{hom}} : \mathbf{D} + \sigma^p \text{tr } \mathbf{D} \quad (15)$$

En raisonnant comme dans [7], on trouve alors :

$$\frac{1}{2}(1-\varphi)d_v^{e2} = \frac{1}{2} \frac{\partial k^{\text{hom}}}{\partial k^m} D_v^2 + \frac{\partial \mu^{\text{hom}}}{\partial k^m} D_d^2; \quad (1-\varphi)d_d^{e2} = \frac{1}{2} \frac{\partial k^{\text{hom}}}{\partial \mu^m} D_v^2 + \frac{\partial \mu^{\text{hom}}}{\partial \mu^m} D_d^2 \quad (16)$$

Pour la suite, il est utile de remarquer, d'après (8), que :

$$\frac{\mu^m}{k^m} = -\frac{tY^e}{2d_d^e} \quad (17)$$

En rapprochant (12) de (17), il apparait que les dérivées de  $k^{\text{hom}}$  et  $\mu^{\text{hom}}$  dans (16) peuvent être simplifiées en utilisant le passage à la limite  $\mu^m/k^m \rightarrow 0$  :

$$d_v^e = \frac{D_v}{1-\varphi} ; \quad d_d^e = \frac{1}{1-\varphi} \sqrt{\frac{2}{3}\varphi D_v^2 + \left(1 + \frac{3}{2}\varphi\right) D_d^2} \quad (18)$$

On notera en particulier que l'expression de  $d_v^e$  est identique à celle de la moyenne directe  $\overline{d^m}$ . En utilisant à nouveau la règle d'écoulement sous la forme  $Y^e/d_d^e \rightarrow 0$ , soit  $d_v^e \approx t d_d^e$ , on tire de (18) la règle d'écoulement macroscopique :

$$\frac{D_v}{D_d} = t \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{2}\varphi}{1 - \frac{2}{3}\varphi t^2}} \quad (19)$$

On obtient alors immédiatement à partir de (13) que les états de contraintes macroscopiques correspondant au taux de déformation macroscopique vérifiant (19) satisfont un critère de Drucker–Prager de la forme :

$$\frac{\Sigma_d}{h - \Sigma_m} = T \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{2}\varphi}{1 - \frac{2}{3}\varphi t^2}} \sqrt{1 - \frac{2}{3}\varphi t^2} \quad (20)$$

La relation (19) caractérise les taux de déformation associés à des états limites  $\Sigma \neq h\delta$ . Elle s'interprète comme la règle d'écoulement macroscopique. On note que la présence d'inclusions rigides confère au composite une dilatance accrue par rapport à celle de la matrice. Dans le cas limite  $t = T$ , on retrouve le critère de rupture obtenu dans [1] et l'écoulement macroscopique décrit par (19) vérifie la règle de normalité. Dans l'autre cas limite où  $t = 0$ , l'écoulement plastique de la matrice n'implique aucune déformation volumique. On retrouve le résultat de [8].

## Références

- [1] J.-F. Barthélémy, L. Dormieux, A micromechanical approach to the strength criterion of Drucker–Prager materials reinforced by rigid inclusions, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* 28 (2004) 565–582.
- [2] J.-B. Leblond, G. Perrin, P. Suquet, Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids, *Int. J. Plasticity* 10 (3) (1994) 213–235.
- [3] J.F. Barthélémy, L. Dormieux, Détermination du critère de rupture macroscopique d'un milieu poreux par homogénéisation non linéaire, *C. R. Mécanique* 331 (2003) 77–84.
- [4] L. Bousshine, A. Chaaba, G. de Saxcé, Softening in stress-strain curve for Drucker–Prager non-associated plasticity, *Int. J. Plasticity* 17 (2001) 21–46.
- [5] G. de Saxcé, L. Bousshine, Limit analysis theorems for implicit standard materials: application to the unilateral contact with dry friction and the non-associated flow rules in soils and rocks, *Int. J. Mech. Sci.* 40 (4) (1998) 387–398.
- [6] P. Ponte-Castaneda, The effective mechanical properties of nonlinear isotropic, *J. Mech. Phys. Solids* 39 (1991) 45–71.
- [7] P. Suquet, Effective behavior of non linear composites, in: P. Suquet (Ed.), *Continuum Micromechanics*, in: CISM Courses and Lectures, vol. 377, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1997.
- [8] E. Lemarchand, F.-J. Ulm, L. Dormieux, The effect of inclusions on the friction coefficient of highly-filled composite materials, *J. Eng. Mech.* 128 (8) (2002) 000.
- [9] J. Salençon, *Calcul à la Rupture et Analyse Limite*, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1983.