

Effets d'une modulation en phase de température à la frontière sur l'instabilité convective d'une couche liquide viscoélastique

Bouchra Oukada, Mohamed Ouazzani Touhami *, Saïd Aniss

Laboratoire de mécanique, faculté des sciences Ain chock, B.P. 5366 Maârif, Casablanca, Maroc

Reçu le 15 juin 2005 ; accepté après révision le 10 janvier 2006

Disponible sur Internet le 28 février 2006

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

Ce travail porte sur l'étude des effets d'une modulation en phase des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil convectif d'une couche liquide viscoélastique horizontale et d'extension infinie. Dans ce cadre, nous supposons que le comportement du liquide est régi par une loi de type Maxwell linéaire et que la température imposée résulte de la superposition d'une composante stationnaire et d'une composante variable au cours du temps. La théorie de Floquet combinée avec une méthode numérique transformant le problème aux valeurs propres obtenu en un problème aux conditions initiales, nous permettent de mettre en évidence, les effets dus à cette modulation et à la nature viscoélastique du fluide sur le seuil critique de convection. *Pour citer cet article : B. Oukada et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Effects of a temperature modulation in phase at the frontier on the convective instability of a viscoelastic layer. In this Note we study the effects of the temperature modulation, applied at the horizontal boundaries, on the onset of convection of a horizontal liquid Maxwellian layer. It is assumed that the temperature imposed features a steady component and a time dependent component. To analyse the effect of the temperature modulation, the study is restricted to a linear stability analysis. Thus the Floquet theory and a technique of converting a boundary value problem to an initial value problem are used to solve the system of equations corresponding to the onset of convection. Results obtained may be used to characterize the influence of modulation effects and that of the viscoelastic nature of liquid on the critical Rayleigh number. *To cite this article: B. Oukada et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Convection ; Modulation de température ; Stabilité ; Viscoélastique ; Solutions harmoniques

Keywords : Fluid mechanics ; Convection ; Temperature modulation ; Stability ; Viscoelastic ; Synchronus solutions

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : m.t.ouazzani@fsac.ac.ma (M. Ouazzani Touhami).

Abridged English version

Several studies have been carried out to examine the effects of temperature modulation, imposed on the horizontal boundaries of a liquid layer [1–5]. Previous investigations are mainly concerned with Newtonian layers. In the present study, we consider the effects of temperature modulation imposed on the frontier of a viscoelastic and horizontal layer. It is assumed that the fluid satisfies the Maxwellian model and the gradient of the temperature have a steady component and a time dependent component. The undisturbed state corresponds to rest where the dimensionless temperature satisfies the diffusion equation (3) and is given by (6). Under these assumptions, the dimensionless linear system is defined by the conservation equations (7), (8). Introducing a normal mode expansion, the system (7), (8) is reduced to the partial differential equations (9), (10). This system is solved using Floquet theory; the solutions are expanded in a product of a periodic Fourier series and an exponential term (11). Hereafter, we determine the marginal stability curves corresponding to synchronous solutions. Introducing (11) into the system (9), (10), we get an infinite set of systems of the form (12), (13). The result is transformed into a set of first-order ordinary differential equations. The solution of this boundary value problem is sought as a superposition of linearly independent solutions following a method often used in stability problems [8]. Each independent solution which satisfies the boundary conditions at $z = 0$ is constructed by a fourth order Runge–Kutta numerical scheme. A linear combination of these solutions satisfying the boundary conditions at the upper frontier of the domain leads to a homogeneous algebraic system for the coefficients of the combination. A necessary condition for the existence of non-trivial solution is the vanishing of the determinant which defines a characteristic equation. Figs. 3 and 4 give the evolution of the critical Rayleigh number Ra_c , as a function of the frequency Ω , for $a = 0.5$, $Pr = 7$, $\Gamma = 0, 0.005, 0.01, 0.02$ for the rigid–rigid and free–free cases. We conclude that for low frequencies, the temperature modulation generates a destabilizing effect compared to the modulation fixe case. For intermediate frequencies, the critical Rayleigh number Ra_c diminishes as the Deborah number Γ is increased. This destabilizing effect becomes more accentuated when the amplitude of the modulation increases (Figs. 5, 6).

1. Introduction

En convection naturelle, l'étude des effets de la modulation des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil critique de convection a déjà fait l'objet de plusieurs investigations [1–5]. Dans ce cadre Venezian [1] s'est intéressé au cas où le gradient de température imposé possède une composante stationnaire et une autre fluctuant de façon sinusoïdale avec une faible amplitude. Il a alors montré, à partir d'une méthode de perturbations et pour le cas libre–libre, que cette modulation de la température à la frontière génère un effet déstabilisant ou stabilisant suivant qu'il s'agisse d'une modulation de température en phase ou en opposition de phase. Ce même problème a été traité par Rosenblat et Herbert [2] dans le cas où les fréquences des excitations de température sont supposées faibles et leurs amplitudes quelconques. Dans le cas où l'amplitude et la fréquence de cette modulation sont arbitraires, Yih et Li [3] ont montré pour une modulation en opposition de phase, en utilisant une méthode de Galerkin, que le seuil critique de convection correspond soit à des solutions harmoniques soit à des solutions sous harmoniques. Pour le cas d'un liquide viscoélastique, le seul travail qu'on peut citer dans ce cadre est celui présenté par Yang [6] qui a considéré le cas d'une couche liquide horizontale soumise à un gradient de température vertical et uniforme en présence d'oscillations verticales. Dans ce problème, où le liquide obéit à un comportement de type Maxwell, l'influence du nombre de Deborah sur le seuil critique de convection a été mise en évidence. En effet et pour le cas des fréquences intermédiaires, ce seuil critique est accéléré ou retardé suivant qu'il s'agisse de faibles ou de grandes valeurs du nombre de Deborah. Il est à signaler que la résolution du système d'équations aux perturbations, dégagées à partir d'une étude de stabilité linéaire de ce problème, a été effectuée à partir de l'utilisation de la méthode spectrale de collocation. En nous inscrivant dans le cadre de cette même problématique [6] nous considérons, ici, le cas où les frontières de cette couche viscoélastique ne sont soumises qu'à un gradient de température vertical. Nous supposons toutefois que ce dernier résulte de deux composantes ; l'une stationnaire et l'autre évoluant au cours du temps de façon sinusoïdale. Pour le cas où celles-ci sont en phase, nous déterminons les solutions harmoniques correspondant aux cas libre–libre et rigide–rigide. Pour ce faire nous avons combiné la théorie de Floquet avec une méthode numérique qui consiste à transformer le problème aux valeurs propres, que l'on obtient à partir d'une analyse de stabilité linéaire, en un problème aux conditions initiales. Les résultats obtenus, nous permettent alors de caractériser l'influence des effets de cette modulation et celle due à la nature viscoélastique du liquide sur le nombre de Rayleigh critique.

2. Formulation et stabilité

Dans le système des coordonnées cartésiennes (x^*, y^*, z^*) , on considère une couche liquide comprise entre deux plans parallèles et infinis d'équations respectives $z^* = 0$ et $z^* = L$. Ces plans sont maintenus aux températures dimensionnelles suivantes :

$$T^* = \begin{cases} T_2 + T_s \cos(\omega^* t^*) & \text{en } z^* = 0 \\ T_1 + T_s \cos(\omega^* t^*) & \text{en } z^* = L \end{cases} \quad (1)$$

où $T_2 > T_1$. Les quantités T_s et ω^* désignent respectivement l'amplitude et la fréquence de la modulation. Par ailleurs, le liquide considéré est supposé de type Maxwell linéaire [7] dont le comportement est régi par :

$$\tau^* + \lambda \frac{\partial \tau^*}{\partial t^*} = \eta(\nabla \mathbf{V}^* + \nabla' \mathbf{V}^*) \quad (2)$$

où λ est le temps de relaxation du liquide, η sa viscosité dynamique, τ^* le tenseur de contraintes, t^* le temps et \mathbf{V}^* le vecteur vitesse. Dans une approche analogue à celle utilisée par Yang [6], nous considérons que l'état de base est défini par un champ de vitesse nul ($\mathbf{V} = 0$) et une contrainte nulle ($\tau = 0$). Dans ce cadre la température de base adimensionnelle $\bar{T} = \frac{(T^* - T_1)}{T_2 - T_1}$ est solution de l'équation de diffusion de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \quad (3)$$

avec

$$\bar{T}(z = 0) = 1 + a \cos \Omega t \quad (4)$$

$$\bar{T}(z = 1) = a \cos \Omega t \quad (5)$$

où $t = t^* \kappa / L^2$ (κ étant la diffusivité thermique) et $z = z^* / L$. Les grandeurs $\Omega = \omega^* L^2 / \kappa$ et $a = T_s / (T_2 - T_1)$ désignent respectivement les expressions adimensionnelles de la fréquence et de l'amplitude de la modulation considérée. La solution de l'équation (3) vérifiant les conditions (4) et (5) est :

$$\bar{T} = 1 - z + a(T_1(z) \cos(\Omega t) + T_2(z) \sin(\Omega t)) \quad (6)$$

avec

$$T_1(z) = \frac{\cos(\sigma(1-z)) \cosh(\sigma z) + \cosh(\sigma(1-z)) \cos(\sigma z)}{\cosh(\sigma) + \cos(\sigma)}$$

et

$$T_2(z) = \frac{\sin(\sigma(1-z)) \sinh(\sigma z) + \sinh(\sigma(1-z)) \sin(\sigma z)}{\cosh(\sigma) + \cos(\sigma)}$$

où $\sigma = \sqrt{\Omega/2}$. En superposant à cette solution des perturbations infinitésimales en pression, température, contrainte, densité et vitesse (p', T', τ, ρ' et $\mathbf{V}(U, V, W)$), on obtient les équations de conservation adimensionnelles et linéarisées suivantes [6,11] :

$$Pr^{-1} \left(1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\Delta W) = Ra \left(1 + \Gamma \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) T' + \Delta (\Delta W) \quad (7)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + W \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \Delta T' \quad (8)$$

où $Pr = \nu / \kappa$ est le nombre de Prandtl, $Ra = g \chi (T_2 - T_1) L^3 / \nu \kappa$ le nombre de Rayleigh, $\Gamma = \lambda \kappa / L^2$ le nombre de Deborah ; χ le coefficient de dilatation thermique et $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

L'analyse en modes normaux des Éqs. (7), (8) conduit à la détermination des solutions W et T' sous la forme : $W = \tilde{W}(z, t) \exp(iq_x x + iq_y y)$, $T' = \tilde{T}(z, t) \exp(iq_x x + iq_y y)$ où q_x et q_y désignent respectivement les nombres d'ondes suivant x et y . Les composantes $\tilde{W}(z, t)$ et $\tilde{T}(z, t)$ vérifient alors :

$$\left(Pr^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - M \right) M \tilde{W} + Pr^{-1} \Gamma \frac{\partial^2}{\partial t^2} (M \tilde{W}) + q^2 Ra \Gamma \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + q^2 Ra \tilde{T} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - M \tilde{T} = -\tilde{W} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \quad (10)$$

avec $D = \partial/\partial z$, $M = (D^2 - q^2)$ et $q^2 = q_x^2 + q_y^2$. Les conditions aux limites s'écrivent comme suit :

- (a) Cas rigide–rigide : $\tilde{T} = \tilde{W} = D\tilde{W} = 0$ en $z = 0, 1$.
- (b) Cas libre–libre : $\tilde{T} = \tilde{W} = D^2\tilde{W} = 0$ en $z = 0, 1$.

3. Résolution numérique

Le système d'équations (9), (10) est linéaire et son second membre dépend explicitement et de façon périodique du temps à travers $\partial\tilde{T}/\partial z$. Il s'agit donc d'un système de Floquet qui possède deux types de solutions périodiques ; des solutions harmoniques (de période $2\pi/\Omega$) et des solutions sous harmoniques de période $4\pi/\Omega$. Ces solutions s'écrivent donc sous la forme suivante [10] :

$$(\tilde{W}, \tilde{T}) = \exp(\mu\Omega t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \{W_n(z), T_n(z)\} \exp(in\Omega t) \quad (11)$$

où $\mu = \mu_r + i\mu_i$ est l'exposant de Floquet. Dans la suite de ce travail, nous limitons notre étude à la détermination des courbes de stabilité marginales ($\mu_r = 0$) correspondant aux solutions harmoniques ($\mu_i = 0$). L'écriture de la température de base sous sa forme complexe suivante : $(\tilde{T} = F(z) \exp(i\Omega t) + F^*(z) \exp(-i\Omega t))$ où $F(z) = T_1(z) - iT_2(z)$ et F^* son conjugué) et la prise en compte de l'expression (11), permet d'obtenir :

$$[in\Omega Pr^{-1}(1 + in\Gamma\Omega) - M] M W_n = -q^2 Ra(1 + in\Gamma\Omega) T_n \quad (12)$$

$$(M - in\Omega) T_n = -W_n + (DF W_{n-1} + DF^* W_{n+1}) \quad (13)$$

où $D = d/dz$ et les conditions aux limites associées aux Éqs. (12), (13) sont :

- (a) Cas rigide–rigide : $T_n = W_n = DW_n = 0$.
- (b) Cas libre–libre : $T_n = W_n = D^2W_n = 0$.

La méthode de résolution numérique que nous utilisons par la suite consiste à :

- (i) Tronquer le système d'Éqs. (12), (13) à l'ordre N avec $-N \leq n \leq N$.
- (ii) Transformer le système différentiel du 6 ème ordre obtenu en un système d'équations différentielles du premier ordre dont les inconnues sont : $W_n, DW_n, (D^2 - q^2)W_n, D(D^2 - q^2)W_n, T_n$ et DT_n .
- (iii) Transformer le problème aux valeurs propres obtenu en un problème aux conditions initiales [8]. Pour ce faire, un ensemble de solutions indépendantes vérifiant les conditions aux limites en $z = 0$ sont construites à partir d'un schéma numérique de Runge–Kutta du quatrième ordre ; une combinaison linéaire de ces solutions satisfaisant les conditions aux limites en $z = 1$, mène alors à un système algébrique homogène dont les inconnus sont les coefficients d'une telle combinaison. Une condition nécessaire pour l'existence de solutions non nulles est que le déterminant de ce système homogène soit nul. Ceci mène à une équation de dispersion suivante $\mathcal{F}(\Omega, a, Pr, \Gamma, q, Ra) = 0$.

Pour la validation de cette méthode, nous nous referons aux deux cas limites de notre problème pour lesquels les résultats portant sur l'étude de stabilité linéaire sont disponibles ; il s'agit notamment du :

- cas d'une couche liquide viscoélastique comprise entre deux plans infinis et soumise à un gradient de température vertical et constant ($a = 0, \Gamma \neq 0$), traité par Vest et Arpaci [9] à partir de la méthode variationnelle et par Yang [6] à partir de la méthode spectrale de collocation.

Tableau 1

Cas d'un liquide viscoélastique non modulé : comparaison du nombre de Rayleigh critique et du nombre d'onde critique avec ceux des références [6] et [9] (μ_{ic} est la partie imaginaire du taux d'amplification μ)

Table 1

Case of an unmodulated viscoelastic liquid: comparison of the critical Rayleigh number and the critical wave number with those from [6] and [9] (μ_{ic} is the imaginary part of the amplification rate, μ)

Γ	Pr	Nos résultats			Ref. [6]			Ref. [9]		
		q_c	Ra_c	μ_{ic}	q_c	Ra_c	μ_{ic}	q_c	Ra_c	μ_{ic}
0,1	0,1	3,116	1707,7499	0	3,116	1707,73	0	–	–	–
	1	4,915	870,53337	15,08130	4,915	870,48	15,08	4,917	877,8	15,07
	10	7,256	226,68274	76,69999	7,256	226,68	76,22	7,309	230,0	76,68
	100	11,59	127,85141	371,7770	11,59	127,89	371,78	11,96	130,1	385,8
1	0,1	3,484	476,39106	1,64704	3,484	476,39	1,647	3,483	478,9	1,647
	1	3,700	51,19260	6,0617	3,700	51,19	6,062	3,696	51,58	6,061
	10	4,719	7,418368	20,78350	4,719	7,418	20,78	4,724	7,496	20,77
	100	7,199	2,159816	82,66400	7,199	2,160	82,66	7,297	2,201	83,45

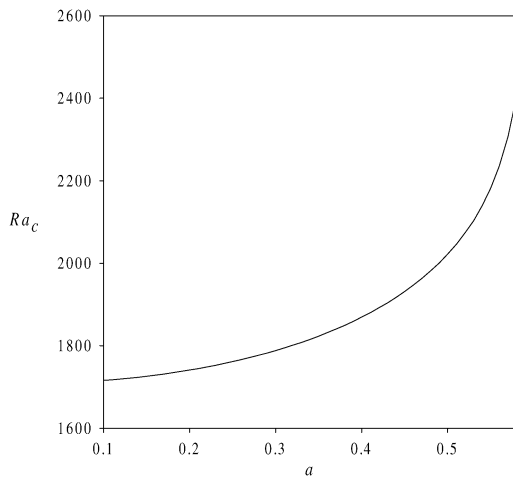


Fig. 1. Cas rigide–rigide : évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega = 5$, $Pr = 0,73$ et $\Gamma = 0$ (nos résultats).

Fig. 1. Rigid–rigid case: evolution of the critical Rayleigh number Ra_c as a function of amplitude a for $\Omega = 5$, $Pr = 0.73$ and $\Gamma = 0$ (our results).

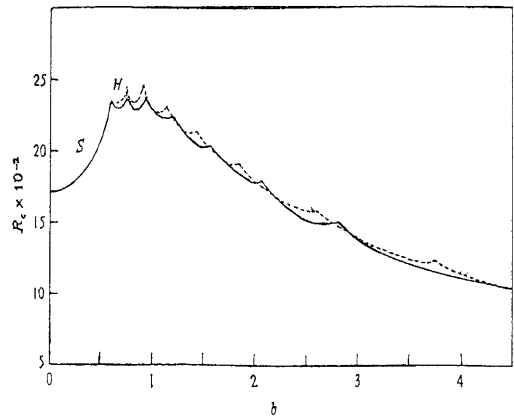


Fig. 2. Évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude b pour $\Omega = 5$, $Pr = 0,73$ et $\Gamma = 0$ (résultats de Yih [3]).

Fig. 2. Evolution of the critical Rayleigh number Ra_c as a function of amplitude b for $\Omega = 5$, $Pr = 0.73$ and $\Gamma = 0$ (results from Yih [3]).

– cas d'une modulation thermique en opposition de phase d'une couche liquide newtonienne et d'extension infinie ($a \neq 0$, $\Gamma = 0$) pour lequel il a été établi, à partir de la méthode de Galerkin, que le seuil critique de convection correspond à des solutions harmoniques ou sous harmoniques [3].

Pour ces deux cas, nous avons été en mesure de reproduire à partir de la méthode présentée ci-dessus, les résultats correspondants avec une très bonne approximation (voir Tableau 1 pour le premier cas et la comparaison des Figs. 1 et 2 pour le deuxième cas).

4. Résultats et discussions

L'objectif principal de notre étude consiste à décrire les effets d'une modulation en phase de température à la frontière d'une couche fluide horizontale et d'extension infinie ; un intérêt particulier sera porté au cas où cette couche est de nature viscoélastique. Dans ce cadre, nous analysons dans ce qui suit les courbes d'évolution du nombre de

Rayleigh critique en fonction des paramètres de ce problème (Figs. 3–6) et ce pour les cas rigide–rigide et libre–libre. On constate alors que :

- (1) Pour le cas d'un fluide Newtonien ($\Gamma = 0$),
 - cette modulation génère, pour $0 \leq \Omega \leq 60$ et pour $0 \leq a \leq 5$, un effet déstabilisant par rapport au cas non modulé ce qui confirme les résultats de Venezian [1] (Figs. 3–6).
 - cet effet déstabilisant devient de plus en plus accentué lorsque l'amplitude augmente (Figs. 5, 6). Ceci est dû au fait qu'on est en présence d'une modulation en phase et que la température de base possède une composante stationnaire et une autre ayant un profil parabolique oscillant dans le temps et dont l'importance devient de plus en plus significative au fur et à mesure que l'amplitude de la modulation augmente [4,1].

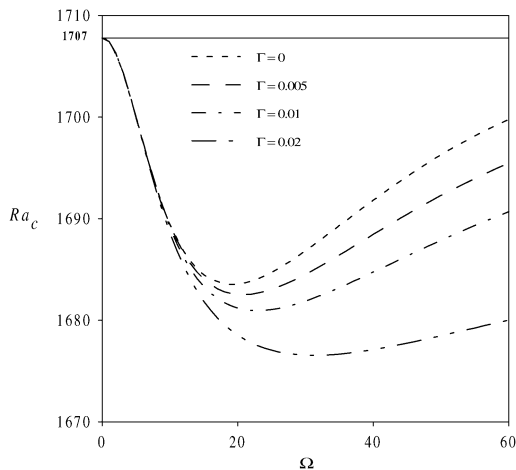


Fig. 3. Cas rigide–rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $a = 0,5$.

Fig. 3. Rigid-rigid case: evolution of the critical Rayleigh number Ra_c as a function of frequency Ω for $a = 0.5$.

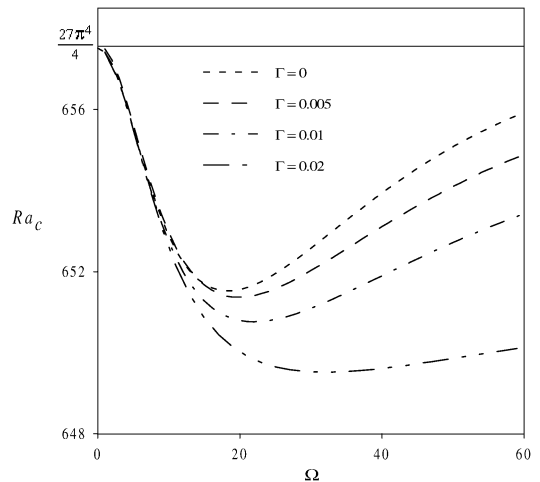


Fig. 4. Cas libre–libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de la fréquence Ω pour $a = 0,5$.

Fig. 4. Free-free case: evolution of the critical Rayleigh number Ra_c as a function of frequency Ω for $a = 0.5$.

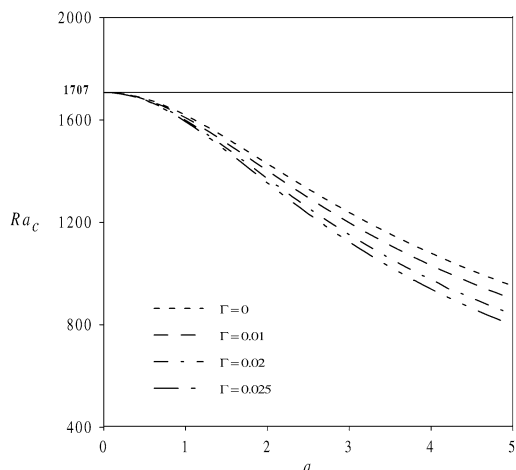


Fig. 5. Cas rigide–rigide, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega = 20$.

Fig. 5. Rigid-rigid case: evolution of the critical Rayleigh number Ra_c as a function of amplitude a for $\Omega = 20$.

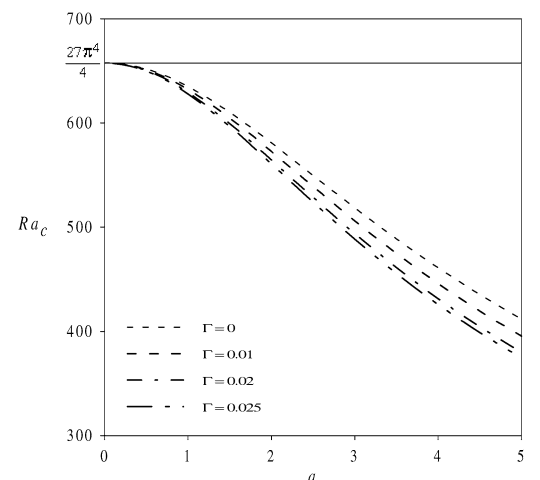


Fig. 6. Cas libre–libre, évolution du nombre de Rayleigh critique Ra_c en fonction de l'amplitude a pour $\Omega = 20$.

Fig. 6. Free-free case: evolution of the critical Rayleigh number Ra_c as a function of amplitude a for $\Omega = 20$.

- (2) Pour une couche viscoélastique ($\Gamma \neq 0$), les courbes présentées montrent que l'influence de la nature du fluide est corrélée aux valeurs de l'amplitude a et de la fréquence Ω
- (i) pour $a = 0,5$ et $\Gamma = 0, 0,005, 0,01, 0,02$,
 - la modulation considérée génère un effet déstabilisant par rapport au cas d'une couche liquide newtonienne non modulée et le nombre de Deborah Γ n'a pas d'influence sur le nombre de Rayleigh critique Ra_c pour les faibles fréquences ($0 \leq \Omega \leq 10$) (Figs. 3, 4)
 - pour les fréquences intermédiaires ($10 \leq \Omega \leq 60$), le nombre de Rayleigh critique Ra_c décroît lorsque le nombre de Deborah Γ augmente. Cet effet déstabilisant est dû dans ce cas aussi bien à la nature viscoélastique du fluide qu'à la modulation des températures imposées aux parois ; ceci confère donc à la nature viscoélastique du fluide un effet identique à celui observé par Vest and Arpaci [9] qui se sont intéressés au cas non modulé. Par ailleurs nos résultats nous permettent de noter que cet effet déstabilisant est prédominant dans les zones de fréquences définies autour des valeurs de Ω qui sont d'autant plus grandes que le nombre de Deborah Γ est plus grand ($\Omega = 19 \rightarrow \Gamma = 0$; $\Omega = 20 \rightarrow \Gamma = 0,05$; $\Omega = 23 \rightarrow \Gamma = 0,01$ et $\Omega = 32 \rightarrow \Gamma = 0,02$) (Figs. 3, 4).
 - (ii) pour $\Omega = 20$, et pour les différentes valeurs de Γ considérées dans ce travail, nous observons à partir des Figs. 5 et 6 que l'augmentation de l'amplitude provoque une déstabilisation de plus en plus accentuée ; ce qui est en accord avec les résultats déjà observés dans le cas newtonien. Ces résultats sont valables aussi bien pour le cas libre–libre que pour celui correspondant à une configuration rigide–rigide.

5. Conclusion

Cette étude nous a permis d'examiner l'influence d'une modulation sinusoïdale en phase des conditions aux limites relatives à la température sur le seuil de convection. Dans ce cadre nous avons essentiellement comparé les résultats relatifs à une couche liquide viscoélastique à ceux correspondant à une couche newtonienne. Toutefois et pour le cas d'une couche newtonienne, nous avons montré à partir de la méthode considérée dans ce travail que la modulation en phase, génère un effet déstabilisant par rapport au cas non modulé. Pour le cas d'une couche viscoélastique et dans les deux configurations rigide–rigide et libre–libre, la nature viscoélastique du liquide génère un effet déstabilisant par rapport au cas d'une couche liquide newtonienne en présence ou en absence d'une modulation pour toutes les valeurs de Γ supérieur ou égal à 0,005. De façon similaire au cas d'une couche liquide newtonienne, l'augmentation de l'amplitude de modulation amplifie les effets de déstabilisation pour une couche liquide viscoélastique.

Références

- [1] G. Venezian, *J. Fluid Mech.* 35 (1969) 243.
- [2] S. Rosenblat, D.M. Herbert, *J. Fluid Mech.* 43 (1970) 385.
- [3] C.S. Yih, C.H. Li, *J. Fluid Mech.* 54 (1972) 143.
- [4] G.Z. Gershuni, E.M. Zhukhovitskii, *Convective Stability of Incompressible Fluids*, Keter Publications, Jerusalem, 1979 (translated from Russian by D. Louvish).
- [5] S. Aniss, M. Souhar, M. Belhaq, *Phys. Fluids* 12 (2000) 926.
- [6] W.M. Yang, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 40 (1997) 1401.
- [7] D.J. Daniel, *Fluids Dynamics of Viscoelastic Liquids*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1990.
- [8] J.K. Platten, J.C. Legros, *Convection in Liquids*, Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 1984.
- [9] C.M. Vest, V.S. Arpaci, *J. Fluid Mech.* 36 (1969) 613.
- [10] D.W. Jordan, P. Smith, *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford Univ. Press, New York, 1987.
- [11] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, 1961.