Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Mecanique 334 (2006) 252–258
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Instabilité non linéaire dans un milieu en expansion

Florent Henon *, Vadim Pavlov

UFR de mathématiques pures et appliquées et laboratoire de mécanique de Lille – UMR 8107, université de Lille 1, boulevard Paul-Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq, France

Reçu le 14 décembre 2004 ; accepté après révision le 10 février 2006

Disponible sur Internet le 29 mars 2006

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Nous considérons des phénomènes acoustiques *non linéaires*, *instabilité explosive*, ainsi que la formation de *structures localisées* dans un milieu non stationnaire. Un exemple d'un milieu possédant de telles particularités est notre Univers en expansion, consideré comme un fluide soumis à un champ de gravitation auto-accordé et gouverné par les équations de l'hydrodynamique classique. Nous montrons que la prise en compte des effets nonlinéaires permet de comprendre les causes de l'apparition de *l'instabilité explosive*. Ce type d'instabilité est plus rapide, $\sim \ln[(t_0 - t)^{-1}]$ pour une fluctuation de densité, qu'une instabilité habituelle (exponentielle, $\sim e^{\gamma t}$) : au bout d'un temps fini, toute inhomogénéité spatiale des conditions initiales conduira à une formation de singularités dans les champs. Ce phénoméne aura lieu si certaines conditions sur les amplitudes et les phases initiales des fluctuations sont respectées. ***Pour citer cet article : F. Henon, V. Pavlov, C. R. Mecanique 334 (2006).***

Abstract

Nonlinear instability in a expanding medium. We consider nonlinear acoustical phenomena, *explosive instabilities* and a formation of *localized structures* in nonstationary environment. An example of such a medium is our Universe in expansion considered as a fluid submissive to a gravitational *self-concorded* force field and governed by the classical hydrodynamics equations. We show that the taking into account of the nonlinear effects allow us to understand the causes of the appearance of the specific *nonlinear instability*, which is calling *explosive instability*. This type of instability is more fast, $\sim \ln[(t_0 - t)^{-1}]$ for density fluctuation, that the habitual instability (exponential, $\sim e^{\gamma t}$): at the end of a finite time, all spatial inhomogeneity of the initials conditions lead to a formation of singularities in the fields. This phenomena will be appear if certains conditions for the initials amplitudes and wavelengths of the fluctuations are observed. ***To cite this article: F. Henon, V. Pavlov, C. R. Mecanique 334 (2006).***

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Acoustique non linéaire ; Interactions de modes ; Instabilité gravitationnelle

Keywords: Fluid mechanics; Nonlinear acoustics; Modes interactions; Gravitational instability

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : henonf@hotmail.com (F. Henon), Vadim.Pavlov@univ-lille1.fr (V. Pavlov).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2006.02.003

Abridged English version

The principal goal of this Note is to demonstrate the possibility of an *nonlinear wave instability*, called *explosive*, in a *nonstationary* environment in a *self-concorded* force field. An example of a medium with such features is the Universe in expansion which can be described in the framework of the non relativistic hydrodynamic approach. We discuss the decisive role of the principle of the homogeneity which permets this possibility. In the self-concorded field, a basic statique equilibrium does not exist, and this fact is confirmed by the observations concerning the expansion of the Univers. We consider an evolution of small field perturbations ($\rho, \mathbf{u}$, etc.). We show that a particular type of the nonlinear instability may appear, the *explosive instability* which is faster, $\sim \ln[(t_0 - t)^{-1}]$ for density fluctuation, than the exponential one ($\sim e^{\gamma t}$). The equations of motion of an fluid in the gravity field, which connect the flow velocity, $\mathbf{u}$, pressure, p, density, ρ, and entropy s, related to a unit of fluid mass, and the gravity potential φ, are formulated in the form (1). The evolution equations for spectral amplitudes are given by (6) and (7). We consider the special case of mode interactions that satisfy the conditions $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 = 0$ when the values q_j are in a domain $q_j^2 \simeq s^2$. In this case, the 'resonance' condition $\Re\dot{\Gamma}(\mathbf{q}_1) + \Re\dot{\Gamma}(\mathbf{q}_2) + \Re\dot{\Gamma}(\mathbf{q}_3) = 0$, is satisfied automatically. This is a phenomenon of the generation of three waves from 'vacuum'. The dimensionless problem for amplitudes is reduced to (9). A solution of (9) for the particular case $|\mathbf{q}_j| = q$, is given by

$$b_q(t) = b_q(1)\exp\bigl(-\nu_q(t-1)\bigr)\left[1 - b_q(1)U_q\int_1^t \mathrm{d}t'\,F(t')\exp\bigl(-\nu_q(t'-1)\bigr)\right]^{-1}$$

The expression obtained is discussed, and shows the features of an evolution of the modes: (i) the instability is 'switched' on, when initial amplitude $b_q(1)$ satisfies the condition $U_q b_q(1) > \nu_q$. Thus there is a threshold of the effect; instable fluctuations participating in the process are selected by this criterium; (ii) a fluctuation magnitude becomes infinitely large when $t \to t_c < \infty$, if $U_q b_q(1) > C^{te} \sim 1$ and dissipation does not prevent this phenomenon; (iii) the energy of instable waves is derived from the gravity field of the system. In order to apply the results of the analyse to the cosmological problem, the characteristic times, t_0 (matter homogeneisation time), t_c (singularities formation time) must be less than the age of the Univers, which is give by H_0^{-1}, i.e., $0 < t_0 < t_c \ll H_0^{-1}$. For this reason, the initial magnitude of velocity fluctuations cannot be very small.

1. Introduction

Le but principal de cette Note est de montrer la possibilité d'une *instabilité non linéaire* spécifique dans un milieu *non stationnaire* se trouvant dans un champ de force *auto-accordé*. Un exemple d'un milieu avec de telles propriétés est *notre Univers en expansion* dont le mouvement sur les grandes échelles[1] peut être décrit dans le cadre de l'hydrodynamique classique, non relativiste (voir les indications sur ce sujet dans les travaux [1–3]). Notons qu'une telle approche peut être appliquée à l'Univers parce que le principe de la relativité (de l'homogénéité) le permet (voir ce qui suit). Dans ce qui suit, nous n'abordons les aspects cosmologiques *que* du point de vue du problème acoustique de l'interaction de modes, dans un milieu où l'équilibre statique de base n'existe pas. Pour un tel système, nous considérons l'évolution de perturbations des champs « acoustiques » ($\rho, \mathbf{u}$, etc.) ; nous supposons que les variations de ρ, $\rho_1 = \rho - \rho_0$, sont relativement petites, tandis que les vitesses peuvent être arbitraires. Nos calculs conduisent à l'identification d'instabilités dans le fluide dues aux couplages entre modes, phénomène relativement connu en mécanique–acoustique non linéaire ou en physique des plasmas mais moins exploré en cosmologie. Nous montrons qu'un type spécifique d'instabilité acoustique non linéaire peut apparaître, *l'instabilité explosive*, qui est plus rapide, $\sim \ln[(t_0 - t)^{-1}]$ pour des fluctuations de densité, qu'une instabilité habituelle (exponentielle, $\sim e^{\gamma t}$).

Le problème de la formation des grandes structures dans l'Univers, reste un des plus délicat de la cosmologie. Il existe un point de vue suivant lequel, dans l'Univers en expansion, les structures comme les galaxies ou les clusters de

[1] Sur de trés grandes échelles, les amas de galaxies sont les principaux éléments des grandes structures de l'univers. Leurs échelles peuvent s'étendre de 1 Mpc $\simeq 10^{24}$cm à quelque centaines de Mpc. Comparé aux échelles de ces structures gigantesques, même les halos de galaxies ayant une taille moyenne de quelques dizaines, voir quelques centaines de Kpc, peuvent être considérés commes des concentrations de matières localisées. D'un autre côté, ces échelles en question sont tout de même beaucoup plus petites que les dimensions du domaine accessible $a \sim c_0 H_0^{-1} \sim 10^4$ Mpc. Ici, $a(t)$ est le facteur d'échelle décrivant la dimension de l'Univers, c_0 est la célérité de la lumière, H_0 est le paramètre d'expansion.

galaxies ont été formées à partir de perturbations de densité volumique qui se seraient amplifiées, condensées, grâce à un mécanisme de base appelé instabilité gravitationnelle. La version traditionnelle du traitement de l'instabilité gravitationnelle est donnée par l'increment d'instabilité, $\gamma \sim \sqrt{4\pi G\rho_0}$, qui est de l'ordre de l'âge de l'Universe, $\sim H_0^{-1}$. Intuitivement, il est claire que le temps caractéristique de formation de ces structures doit être beaucoup plus bref. La considération qui suit, est motivée également par la découverte récente de la galaxie massive HUDF-JD2[2] dont les dimensions sont huit fois plus grandes que notre galaxie, mais, dont l'âge est paradoxalement petit, de l'ordre de 800 million d'années, ce que est bien évidemment beaucoup plus petit que l'âge de l'Univers. Cette découverte remet en question l'existence d'un mécanisme d'instabilité plus rapide que le mécanisme traditionnel d'instabilité gravitationnelle. Ce mécanisme doit être mis en oeuvre pour expliquer la formation de telle structure, et c'est ce que nous nous proposons de traîter dans ce travail.

Rappelons quelques faits historiques (voir par exemple [4]) évidemment connus pour un astrophysicien mais naturellement moins connus pour un mécanicien acoustique. En 1922, A. Friedmann énonce les solutions des équations de base, de Gilbert–Einshtein, de la relativité générale qui décrivent l'Univers en expansion.[3] En 1927, ces solutions sont redécouvertes indépendamment par G. Lemaitre, qui les associes aux « vitesses de récession » des galaxies, observées et incomprises depuis la fin du siècle précèdent. G. Lemaitre révèle une relation linéaire entre ces vitesses et les distances des galaxies, sous la forme $\mathbf{u} = H_0\mathbf{x} + \cdots$. Ici, H_0 est un paramètre de proportionnalité (appelé taux d'expansion ou « constante de Hubble »), $|\mathbf{x}| = r$ est la distance entre les galaxies. Cette même loi est redécouverte empiriquement deux ans plus tard par E. Hubble. La relation de proportionnalité, $|\mathbf{u}| = H_0 r$, reste vérifiée jusqu'à plusieurs milliards d'années-lumière. Selon les mesures actuelles,[4] H_0 est de l'ordre de 60–70 (km/s)/(mégaparsec), soit une valeur de $H_0 = u/r \simeq 2 \times 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$. La grandeur $H_0^{-1} \sim 0{,}5 \times 10^{+18}\ \mathrm{s} \sim 10^2$ milliard d'années donne une échelle de l'âge de l'Univers. Cette estimation n'est pas en contradiction avec l'âge des étoiles ($\sim$1 à 10 milliard d'années). Des comptages statistiques d'objets distants comme les galaxies (dans des directions différentes), aussi bien que (c'est plus important) les mesures de l'intensité du rayonnement électromagnétique de fond (rayonnement fossile) [4], confirme le caractère *isotropique* de l'expansion et indirectement, *l'uniformité* de l'Univers moyennée sur les grandes échelles. La densité moyenne de la matière (pour laquelle la composante appelée *matière sombre* est prédominante) de l'Univers est le sujet de violentes discussions, les estimations donnent des valeurs qui varient de 2×10^{-31} à $10^{-29}\ \mathrm{g/cm^3}$.

[2] Des astrophysiciens du *Space Telescope Science Institute* (Baltimore, USA) ont annoncé la semaine passée (septembre 2005) la découverte, grâce aux deux télescopes spatiaux, Spitzer et Hubble, d'une galaxie, née dans « l'enfance de l'Univers », huit fois plus massive que notre galaxie, la Voie Lactée. La masse importante et la maturité de cette galaxie baptisée HUDF-JD2 au moment où l'Univers—dont l'âge est estimé selon certaines estimations à 13,5 milliards d'années—*n'avait que 800 millions d'années*, ont surpris la communauté de cosmologie. Cette galaxie a été découverte aux distances les plus éloignées, dans un petit coin du ciel appelé le « Champ ultra profond de Hubble » (Hubble's Ultra Deep Field—UDF), là où les autres galaxies déjà découvertes sont jeunes et petites. Des indications montrent que cette galaxie est remarquablement développée et beaucoup plus massive, ce qui est une grande surprise. Jusque là, on estimait que les premières galaxies formées dans les débuts de l'Univers, contenaient beaucoup moins d'étoiles que celles créées plus tard, comme notre Voie Lactée. Cette découverte tend à montrer qu'une grande partie des galaxies s'est formée beaucoup plus tôt que le prédisent les théories actuelles. La galaxie HUDF-JD2 est un objet très révélateur : si la mesure de la distance de cet objet est confirmée, cela indiquera que l'activité galactique était beaucoup plus intense dans une période encore plus reculée de l'histoire de l'Univers.

[3] L'expansion, ainsi que la présence du rayonnement fossile (dont les caractéristiques spectrales correspondent à celui du corps noir absolu) extrapolées dans le passé, conduisent à l'image du « Big-bang ». Immédiatement après le « Big-bang », l'Univers primitif ne contenait aucune étoile et aucune galaxie, mais juste un mélange de quarks, et plus tard, de nucléons, d'électrons, neutrinos et de rayonnement, le tout en équilibre thermique. Les premiers noyaux d'hélium se sont formés à la nucléosynthèse au bout des trois premières minutes après le « Big-bang ». La matière neutre s'est formée 3×10^5 années plus tard quand les électrons libres ont commencer à se combiner aux noyaux pour former les atomes neutres. En effet, à mesure que l'expansion adiabatique de l'Univers s'est poursuivie, le plasma primitif s'est refroidi. Quand sa température est tombée à $T_m \sim 3 \times 10^3$ K (selon les estimations, au bout d'environ 3×10^5 ans), un niveau suffisamment bas pour que les électrons perdent leur liberté, ils se combinèrent alors aux noyaux atomiques. Les photons ont commencé à se propager quasi-librement, et l'Univers est devenu transparent pour le rayonnement électromagnétique (et d'autres formes du rayonnement). A partir de cette étape, l'évolution de la matière commence à être gouvernée par ses propres lois indépendement de la présence du rayonnement électromagnétique.

[4] Récemment, la valeur de $H_0 \simeq 55$–70 km/s Mpc a été acceptée (voir [6]). Dans Kundic [5], la valeur suivante a été indiquée : $H_0 \simeq 64 \pm 13$ km/s Mpc. Pour $H_0 = 64$ km/s Mpc, la densité critique $\rho_{\mathrm{cr}0} = 3H_0^2/8\pi G \simeq 8 \times 10^{-30}\ \mathrm{g/cm^3}$. Sur le site internet http://map.gsfc.nasa.gov/m_uni/, il est indiqué que de récents résultats obtenus par le satellite WMAP, donne une valeur de $H_0 = 71|^{+0{,}04}_{-0{,}03}$ km/s Mpc (par caractérisation des fluctuations du rayonnement de fond). Dans le même site, il est noté qu'une récente synthèse statistique de la littérature déjà publiée, conduit à une valeur entre 66 et 82 km/s Mpc.

L'analyse qui suit, sera faite pour des perturbations qui sont modèlisées par l'approximation de milieu continu [7a], i.e., nous supposons[5] que l'approche hydrodynamique est applicable.

La considération hydrodynamique esquissée ci-dessous, est appliquée (voir note 3) à la période où la température du rayonnement électromagnétique avait chutée en dessous de $T_m \sim 3 \times 10^3$ K, à cause de la dilatation adiabatique de l'Univers. A partir de cette étape, le rayonnement n'intéragissait pratiquement plus avec la matière. Dans ce qui suit, ce champ intense du rayonnement fossile (photons, neutrionos, etc., ...) est supposé *uniforme*, i.e., indépendant des coordonnées et ce n'est que la pression du gaz non uniforme qui est prise en compte pour la description des phénomènes liés aux fluctuations de densité volumique ρ. On considére donc l'évolution de petites perturbations de la densité volumique dans l'intervalle de temps $t_r \sim 10^6$ ans $< t < t_e \sim 10^9$ ans quand, selon [9], les premières étoiles et galaxies se sont formées.

Les équations du mouvement d'un fluide (essentiellement de la matière sombre) dans le champ de gravitation, reliant la vitesse de l'écoulement, $\mathbf{u}$, la pression, p, la densité, ρ, l'entropie, s, rapportées à l'unité de masse du fluide, et le potentiel φ, sont

$$\partial_t \rho = -\partial_i \rho u_i, \quad \partial_t s = -u_j \partial_j s, \quad \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i = -\rho^{-1} \partial_i p - \partial_i \varphi, \quad p = p(\rho, s), \quad \Delta\varphi = 6\alpha\rho \tag{1}$$

Ici, les notations sont traditionnelles. La dernière équation du système (1) donne la forme du potentiel de gravitation φ, créé par une distribution de masse ρ, où $6\alpha = 4\pi G$ et G est la constante de gravitation. Le système (1) est complet et *auto-accordé* : l'évolution de ρ est déterminée par la vitesse $\mathbf{u}$ qui est, à son tour, gouvernée par le potentiel de gravitation φ dont l'évolution est gouvernée, via l'équation de Poisson, par ρ : une variation de l'un de ces paramètres aura forcément une conséquence sur les autres.

Une question se pose immédiatement : Eqs. (1) décrivent-elles l'expansion observée de l'Univers ? La réponse est positive : on voit facilement que l'état dans lequel le fluide, de densité volumique et d'entropie constantes, $\rho = C^{te}$, $s = C^{te}$, est au repos, $\mathbf{u} = 0$, n'est pas satisfait par Eqs. (1). En effet, dans ce cas, les deux première équations du système (1) sont verifiées. Pour $\rho = C^{te}$, la dernière équation de (1) nous donne une solution non nulle, divergente, $\varphi \sim r^2 \neq 0$, mais qui a quand même un sens physique[6] En ce qui concerne la troisième équation (1), sa partie gauche

[5] Bien que la nature de la matière noir (CDM) n'aie pas encore été identifiée, tout les candidats au titre de particules de CDM ont des masses extrêmement petites. Leur concentration attendue dans l'Univers est de moins de 10^{50} particules par Mpc^3 (voir E.W. Kolb, M.S. Turner [8]). Dans cette situation où le nombre de particules $N \gg 1$, les effets individuels sont négligeables, et la matière noir (CDM) dont les particules ne subissent pas de collisions, obéit à l'équation de Vlasov pour une fonction de distribution dans l'espace des phases. C'est l'équation maîtresse, de laquelle l'approche hydrodynamique est déduite et par conséquent, de laquelle les calculs de l'instabilité gravitationnelle sont dérivés. Cette équation est difficile à résoudre analytiquement, étant donné que c'est une équation non linéaire aux derivées partielles, non locale, impliquant sept variables. La non localité est induite par le fait que le potentiel de gravitation dépend, par le biais de l'équation de Poisson, de l'intégrale de la fonction de distribution par rapport aux impulsions. Cependant, en pratique nous ne sommes généralement pas interessé par la résolution dans tout l'espace des phases, mais seulement par l'évolution de la distribution spatiale. Cela peut être obtenu de manière correcte en prenant les moments dynamiques de la fonction de répartition. Le moment d'ordre zéro établit simplement le rapport entre la densité de particules dans l'espace des phases et la densité de masse locale. Les moments d'ordres supérieurs, définissent la vitesse péculaire et le tenseur des contraintes, σ_{ij}. L'évolution du moment d'ordre zéro donne l'équation de continuité, qui décrit la conservation de la masse. En prenant le moment d'ordre un, on obtient l'équation d'Euler, qui décrit la conservation de la quantité de mouvement. Notons que l'équation de continuité couple la densité (moment d'ordre zéro) au moment d'ordre un (vélocité) de la fonction de distribution, et que l'équation d'Euler, couple le moment de première ordre (vélocité) au moment de second ordre (contrainte). Pour la cloture de la chaine d'équations, on propose une structure phénomènologique pour le tenseur des contraintes σ_{ij}, i.e., l'équation d'état du fluide cosmologique. Par exemple, la mécanique des fluides standard [7] donne $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta(\partial_j u_i + \partial_i u_j) + \eta'(\partial_l u_l)\delta_{ij}$, ou p est la pression et η et η' sont des coefficients de viscosité. Notons de cette définition que, le premier terme (pression) représente la contribution dominante. Parfois, on utilise l'approximation $\sigma_{ij} \simeq 0$, en supposant [12] que, du moins dans les premiers stades de l'instabilité gravitationnelle, les structures n'ont pas encore eu le temps de se condenser.

[6] En effet, supposons qu'outre un observateur A *attaché* à un référentiel R, il y ait un observateur B *attaché* à un autre référentiel R', qui se déplace par rapport à R avec la vitesse $H(t)\mathbf{x}_0(t)$. Soit $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \mathbf{x}'(t)$ la coordonnée d'une particule fluide M dans R et $\mathbf{u} = H(t)\mathbf{x}_0(t) + \mathbf{u}'$ la vitesse de cette particule dans R. Alors la coordonnée de M dans R' peut s'exprimée comme suit : $\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \int_t \mathrm{d}t^* H(t^*)\mathbf{x}_0(t^*)$. L'Universealité du temps dans les deux repères dans le cadre de l'approche classique, $t = t'$, nous conduits à, $\mathrm{d}/\mathrm{d}t = \mathrm{d}/\mathrm{d}t'$, puisqu'il n'y a pas de rotation (il est facile de verifier cette égalité en remarquant que $\partial_t = \partial'_t - H(t)x_{0j}(t)\partial'_j$), nous avons aussi $\partial_k = \partial'_k$. Reportons ces résultats dans la troisième équation de (1) et écrivons l'équation du mouvement exprimée dans le référentiel R' (voir [7b]) $\mathrm{d}_{t'}u'_i \equiv \partial_{t'}u'_i + u'_j\partial'_j u'_i = \rho^{-1}\partial'_i p - \partial'_i\varphi - w_i(t)$. Ici, l'accélération du repère R' par rapport au repère R,$\mathbf{w}(t)$ est calculée selon $\mathbf{w}(t) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(H(t)\mathbf{x}_0(t)) = \dot{H}(t)\mathbf{x}_0(t) + H^2(t)\mathbf{x}_0(t)$. Rappelons que le potentiel de gravitation exprimé dans le repère R' est $\varphi = \alpha\rho r'^2 + 2\alpha\rho(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}_0) + \alpha\rho r_0{}^2$. De ce fait comme $\nabla = \nabla'$, on a l'expression du champ de gravitation exprimée dans R', donné par $-\nabla'\varphi = -2\alpha\rho\mathbf{x}' - 2\alpha\rho\mathbf{x}_0 = -\nabla'\varphi' - 2\alpha\rho\mathbf{x}_0$, l'équation précédente s'écrit alors $\mathrm{d}_{t'}u'_i = \rho^{-1}\partial'_i p - \partial'_i\varphi' - x_{0i}(2\alpha\rho + \dot{H}(t) + H^2(t))$. Pour que cette équation ait la même forme que la troisième équation de (1) et que les phénomènes

est nulle, et sa partie droite ne l'est pas. On voit donc que les hypothèses initiales, $\rho = C^{te},\ s = C^{te}$, ainsi que le fluide au repos, $\mathbf{u} = 0$, nous conduisent à l'impossibilité que l'état de repos de l'Univers homogène soit réalisé. En observant l'homogénéité aux grandes échelles de la répartition de la matière et la fuite des galaxies, on peut donc chercher l'état non perturbé de base, sous la forme :

$$\rho = \rho(t), \quad p = p(t), \quad s = C^{te}, \quad \mathbf{u} = H(t)\mathbf{x}, \quad \varphi = \alpha\rho(t)r^2 \tag{2}$$

En injectant (2) dans (1), on trouve que ρ et H ne sont pas constantes ($\rho \neq C^{te},\ H \neq 0$), i.e.,

$$\dot{\rho} = -3H\rho, \quad \dot{H} + H^2 = -2\alpha\rho \tag{3}$$

Ces équations sont équivalentes aux équations de Friedmann pour l'Univers homogène, isotrope et rempli de matière.

Intéressons nous maintenant au principe de relativité. L'essence même de ce principe est que *toutes* les lois de la Nature sont les mêmes en tout instant et en tout point de l'Univers : deux observateurs situés en deux endroits différents de l'Univers doivent observer les mêmes lois physiques. Une question se pose donc : Eqs. (1), correspondent-elles à l'idée que l'Univers infini, est homogène en moyenne, dans le sens où tous les phénomènes de la Nature qui se réalisent dans un endroit quelconque de l'Univers, sont identiques à ceux qui se réalisent dans un autre endroit ? La réponse est également positive (voir [9]).

Une des premières tentatives de l'application de l'approche hydrodynamique au problème de l'évolution des perturbations acoustiques pour l'Univers *statique* appartient à J. Jeans (1902). Un excellent exposé sur ce sujet et des questions contigües sont donnés dans [9]. Malgré des difficultés évidentes (l'Univers *statique* n'est pas réalisable parce que le terme avec ρ_0 n'est pas compensé dans l'équation de Poisson), le modèle de Jeans a permis d'établir quelques résultats *qualitatifs* importants. Ces résultats sont : (a) les composantes spectrales des perturbations avec de grandes échelles spatiales $l \sim k^{-1}$: petit k ($k^2 \ll 4\pi G\rho_0 c^{-2}$, c est la célérité du son dans le milieu) sont instables (en croissance exponentielle), $\sim \exp\gamma t$, et ont pour incrément d'instabilité $\gamma \simeq \sqrt{4\pi G\rho_0}$; (b) les composantes avec de grands k ($k^2 \gg 4\pi G\rho_0 c^{-2}$), évoluent comme des ondes « acoustiques », $\sim \exp(\pm \mathrm{i}\gamma t)$, où $\gamma \simeq ck$. Il y a donc, selon J. Jeans, une valeur critique du nombre d'onde, et une échelle spatiale correspondante, auxquelles $\gamma = 0$, séparant la région des instabilités gravitationnelles de la région acoustique. Ces valeurs sont respectivement appelées nombre d'onde de Jeans et échelle spatiale de Jeans, et leur valeurs sont définies par : $k_J = \sqrt{4\pi G\rho_0}/c$; $\lambda_J = 2\pi/k_J = 2\pi c/\sqrt{4\pi G\rho_0}$.

L'approximation *linéaire* de l'instabilité de perturbations de densité, dans l'Univers en expansion, a été discutée en détail dans [9] (voir aussi [3] et les travaux originaux [10,11]). Une littérature abondante est consacrée au problème de l'instabilité gravitationelle dans le contexte traditionnel. Des informations utiles sur ce sujet peuvent être trouvée par exemple dans les revues [12,13]. Pour le cas simple de l'Univers « plat » correspondant à $\rho_0 = (6\pi Gt^2)^{-1}$ et $H = (2/3)t^{-1}$, la densité et le mode survivant évoluent selon la loi $\rho(\mathbf{x}, t) = (6\pi Gt^2)^{-1}[1 + C_1 t^{2/3}\delta_+(\mathbf{x}/L)]$, avec δ_+ arbitraire, i.e., plus lentement qu'une exponentielle.

2. Non linéarité et instabilité dans l'Univers en expansion

Le traitement correct du problème consiste donc à chercher les solutions de (1) sous la forme :

$$\rho = \rho_0(t)[1 + \delta_1], \quad \mathbf{u} = H(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}_1, \quad \varphi = \alpha\rho_0 r^2 + \varphi_1 \tag{4}$$

avec les fonctions $\rho_0(t)$ et $H(t)$ satisfaisants les Éqs. (3) et où $|\mathbf{x}| = r$. Décomposons les champs (perturbations) en intégrale de Fourier selon les expression

$$\rho_1 = (2\pi)^{-3}\rho_0 \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, \delta_{\mathbf{q}} \exp(\mathrm{i}\Phi_{\mathbf{q}}), \quad \mathbf{u}_1 = (2\pi)^{-3}L^{-1} \int \mathrm{d}\mathbf{q}\, \mathrm{i}\mathbf{q}\psi_{\mathbf{q}} \exp(\mathrm{i}\Phi_{\mathbf{q}}) \tag{5}$$

où l'on pose que $\dot{\mathbf{q}} = 0$, i.e., $\mathbf{q}$ est indépendant du temps et est sans dimension. Le point signifie la dérivée par rapport au temps. La phase est $\Phi_{\mathbf{q}} = L^{-1}\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}$; $L = L(t)$ est l'échelle caractéristique dépendant du temps : physiquement parlant, cela signifie que la longueur d'onde d'un mode de perturbation donné est croissante durant l'expansion,

hydrodynamiques soient donc les mêmes dans une région de l'Univers choisie arbitrairement, il faut que $\dot{H}(t) + H^2(t) + 2\alpha\rho = 0$, i.e., que l'accélération $\mathbf{w}(t)$ du repère R' (« chute libre ») par rapport au repère R compense parfaitement le terme du champ de gravitation qui dépend aussi linéairement de $\mathbf{x}_0$. Cette équation n'est rien d'autre que la seconde équation (3) qui repésente la loi d'évolution du paramètre H, elle est donc tout le temps verifiée. L'observateur B observe donc les mêmes phénomènes hydrodynamiques que l'observateur A.

proportionnellement à une certaine échelle $L(t)$, « l'étendue de l'Univers ». Cette échelle est liée à $H(t)$ par l'équation $-L^{-1}\dot{L}+H=0$. La composante $\rho_{\mathbf{q}}$ est la transformée de Fourier de ρ_1. Dans l'équation du mouvement linéarisée, prenons la forme de l'équation d'état la plus simple : $-\rho^{-1}\nabla p$, notamment $-\rho_0{}^{-1}\nabla p_1=-\rho_0{}^{-1}c^2\nabla\rho_1$. Posons dans les Éqs. (1), les expressions (4) et (5), où $\mathbf{u}_q=\mathrm{i}L^{-1}\mathbf{q}\psi_{\mathbf{q}}$ et, $\rho_{\mathbf{q}}=\rho_0\delta_{\mathbf{q}}$, avec $\dot{\rho_0}+3H\rho_0=0$ et où ρ_0, $\delta_{\mathbf{q}}$ et, $\psi_{\mathbf{q}}$, dépendent du temps. Nous obtenons

$$L^2\partial_t\delta_{\mathbf{q}}-q^2\psi_{\mathbf{q}}=(2\pi)^{-3}\iint \mathrm{d}\mathbf{q}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}''\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}'')\delta_{\mathbf{q}'}\psi_{\mathbf{q}''}\delta^{(3)}(\mathbf{q}'+\mathbf{q}''-\mathbf{q}) \tag{6}$$

$$L^2\partial_t\psi_{\mathbf{q}}+L^2\big[c^2-4\pi G\rho_0L^2q^{-2}\big]\delta_{\mathbf{q}}=\big(2(2\pi)^3\big)^{-1}\iint \mathrm{d}\mathbf{q}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}''\,(\mathbf{q}'\cdot\mathbf{q}'')\psi_{\mathbf{q}'}\psi_{\mathbf{q}''}\delta^{(3)}(\mathbf{q}'+\mathbf{q}''-\mathbf{q}) \tag{7}$$

Dans l'approximation linéaire, $\delta_{\mathbf{q}}\sim\varepsilon$, $\psi_{\mathbf{q}}\sim\varepsilon$, $\varepsilon\ll 1$, on néglige les termes non linéaires dans la partie droite du système (6), (7) qui sont de l'ordre de ε^2. On pose dans ce cas $\delta_{\mathbf{q}}=A_{\mathbf{q}}\exp(-\mathrm{i}\Gamma(t))$, $\psi_{\mathbf{q}}=B_{\mathbf{q}}\exp(-\mathrm{i}\Gamma(t))$, où les amplitudes $A_{\mathbf{q}}$ et $B_{\mathbf{q}}$ sont constantes. On substitue les expressions pour $\delta_{\mathbf{q}}$, $\psi_{\mathbf{q}}$ dans les Éqs. (6) et (7) et on obtient un système algèbrique d'équations sur $A_{\mathbf{q}}$, $B_{\mathbf{q}}$, qui n'admet de solutions non nules que si son déterminant est nul, soit $-\dot{\Gamma}^2+L^{-2}q^2(c^2-4\pi G\rho_0L^2q^{-2})=0$. Il y a donc deux solutions : $\dot{\Gamma}^{(1)}\equiv\omega=cL^{-1}|\sqrt{q^2-s^2}|[\theta(q^2-s^2)+\mathrm{i}\theta(s^2-q^2)]$ et $\dot{\Gamma}^{(2)}=-\omega$, pour chaque $\mathbf{q}$ fixé. Ici, $s^2=4\pi G\rho_0L^2c^{-2}$, $\theta(z)$ est la fonction de Heavyside. Si $q\gg s$, tout se passera comme s'il s'agissait d'ondes acoustiques habituelles se propageant avec une célérité c définit par l'équation d'état (1). On peut alors écrire $\delta_{\mathbf{q}}=A^+_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma}+A^-_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Gamma}$, $\psi_{\mathbf{q}}=(-\mathrm{i})L^2q^{-2}\omega[A^+_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Gamma}-A^-_{\mathbf{q}}\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\Gamma}]$, où $\dot{\Gamma}=\omega$.

Prenons en compte les termes non linéaires. Les phénomènes qui nous intéressent, étant suffisamment rapides sur l'échelle temporelle cosmologique, $\sim H_0^{-1}$, c'est pourquoi nous négligerons les variations temporelles de L, ρ_0 et c sur l'intervalle de temps correspondant aux interactions non linéaires.

Afin de saisir le sens du phénomène et d'obtenir une solution analytique, nous considérons maintenant *l'interaction de trois modes spectralement étroites* qui sont initialement localisés au voisinage de $q^2\simeq s^2$. Dans le cas consideré, le second terme dans l'Éq. (7) disparaît et l'équation devient purement nonlinéaire. Toutefois, cette équation non linéaire admet une solution analytique particulière.

Posons $\psi_{\mathbf{q}}(t)=\sum_{j=1}^3 a_j(t)\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}_j)$, $q_j^2=s^2$. On obtient le système

$$L^2\partial_ta_c=\big(2(2\pi)^3\big)^{-1}\sum_s\sum_{a,b}(\mathbf{q}_c\cdot\mathbf{q}_b)a_{\mathbf{q}_a}a_{\mathbf{q}_b}\lim_{\Delta\to 0}\exp[\mathrm{i}\Delta] \tag{8}$$

où $\mathbf{q}_a+\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_c=0$, $\Delta=\Gamma_c-\Gamma_a-\Gamma_b$, où $\Gamma_l\equiv\Gamma(q_l^2)=\int_{t_0}^t\mathrm{d}t'\sqrt{c^2L^{-2}q_l^2-4\pi G\rho_0}\to 0$ dans notre cas.

Le cas « classique » de l'interaction de trois ondes, bien présenté dans la littérature scientifique (voir par exemple [14]), correspond à $\Im\Gamma_j=0$, et $\Re\Gamma_j\neq 0$, i.e., $q^2>s^2$. Dans ce cas, l'interaction la plus intense des amplitudes *ondulatoires*, quand $\Im\Gamma_j=0$, aura lieu si Γ_j et $\mathbf{q}_j$ satisfont la condition de « résonance » pour des processus de « fission » et « fusion » d'ondes, $\pm\Re\dot{\Gamma}_c\pm\Re\dot{\Gamma}_a-\Re\dot{\Gamma}_b=0$ et $\pm\mathbf{q}_a\pm\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_c=0$.

Nous considerons maintenant le cas plus intéressant de l'interaction de modes, vérifiant la condition $\mathbf{q}_1+\mathbf{q}_2+\mathbf{q}_3=0$, quand les valeurs de q_j vérifient la condition $q_j^2=s^2$. Dans ce cas, la condition de « résonance » temporelle $\Re\dot{\Gamma}(\mathbf{q}_1)+\Re\dot{\Gamma}(\mathbf{q}_2)+\Re\dot{\Gamma}(\mathbf{q}_3)=0$, est satisfaite automatiquement. Il s'agit dans ce cas d'un phénomène exotique d'une génération de trois ondes « depuis le vide ». En réalité, cela signifie simplement qu'il existe une région de l'espace $q^2\leqslant s^2$ où $\dot{\Gamma}^2(\mathbf{q})$ peut devenir négative en vertu des conditions spécifiques du système, qui est dans ce domaine instable. Si $\Re\Gamma_j=0$, i.e., $q^2=s^2$, le facteur $\exp[\mathrm{i}(\Gamma_c-\Gamma_a-\Gamma_b)]=1$. Nous supposons qu'à l'instant $t_0>0$ les fluctuations des amplitudes a_q sont apparues spontanément sur la répartition homogène de la matière. La dimension de a est : $[a]=(\text{longueur})^2(\text{temps})^{-1}$: choisissons donc $a\to L_0^2t_0^{-1}b$, le temps sera adimensionné, $t\to t/t_0$. L'instant initial, à partir duquel des fluctuations se développent, correspond à $t=1$. Si nous y ajoutons une faible dissipation caracterisée par des décrements ν_j, mésurée en unités de t_0, les équations pour $b_j=|b_j|\exp\mathrm{i}\alpha_j$ deviendront

$$\partial_tb_1+\nu_1b_1=U_{23}Fb_2^*b_3^*,\quad \partial_tb_2+\nu_2b_2=U_{31}Fb_3^*b_1^*,\quad \partial_tb_3+\nu_3b_3=U_{12}Fb_1^*b_2^* \tag{9}$$

où $U_{ij}=(2\pi)^{-3}(\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j)$, avec $\mathbf{q}_i\cdot\mathbf{q}_j=q_iq_j\cos\theta_{ij}$. Dans ce cas exotique de génération de trois ondes « depuis le vide », $\theta_{ij}=4\pi/6$, alors $U_{ij}=-q_iq_j/8(2\pi)^3$. Pour simplifier la considération, on pose que $q_1=q_2=q_3\equiv q$ et que la dissipation est caractérisée par le même décrement d'amortissement, $\nu_j=\nu_q$. Fixons les phases $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$.

On obtient l'équation d'amplitude $\partial_t b_q + \nu_q b_q = U_q F b_q^2$, avec $U_q = q^2/2(2\pi)^3$. Les équations ont une solution non nulle, pour les amplitudes $b_q(t)$, $|\mathbf{q}| = q$, donnée par l'expression

$$b_q(t) = b_q(1)\exp\bigl(-\nu_q(t-1)\bigr)\left[1 - b_q(1)U_q \int_1^t \mathrm{d}t'\, F(t')\exp\bigl(-\nu_q(t'-1)\bigr)\right]^{-1} \tag{10}$$

Si $\nu \to 0$, on obtient $b_q(t) \to b_q(1)t_c/(t_c - t)$ avec $t_c = [b_q(1)U_q]^{-1}$, i.e., $\psi_{\mathbf{q}} = b(1)L_0^2 t_0^{-1}[t_c/(t_c - t)]\sum_j \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}_j)$. A son tour, l'Éq. (6) pour $\delta_{\mathbf{q}}$ devient

$$L^2\partial_t\delta_{\mathbf{q}} - q^2\tau_q(\tau_q - t)^{-1}\psi_{\mathbf{q}}^0 = (2\pi)^{-3}\tau_q \iint \mathrm{d}\mathbf{q}'\,\mathrm{d}\mathbf{q}''\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{q}'')\delta_{\mathbf{q}'}(\tau_{q''} - t)^{-1}\psi_{\mathbf{q}''}^0\delta^{(3)}(\mathbf{q}' + \mathbf{q}'' - \mathbf{q}) \tag{11}$$

Elle peut être traitée dans une approche perturbative, i.e., $\delta_{\mathbf{q}}(t) = -q^2L^{-2}\tau_q\psi_{\mathbf{q}}^0 \ln[\tau_q(\tau_q - t)^{-1}] + \cdots$.

Les expressions (10) et (11) montrent les particularités de l'évolution d'un mode critique $q^2 = s^2$ et permettent de faire quelques conclusions : (i) L'instabilité démarre si la magnitude initiale $b_q(1)$ vérifie la condition $U_q b_q(1) > \nu_q$. Il y a donc un seuil de l'effet, et les fluctuations instables participant au processus, sont sélectionnées par ce critère ; (ii) La magnitude de $b_q(t)$, pour $t \ll t_c$, est une fonction linéairement croissante ; (iii) La magnitude de la fluctuation devient infiniment grande au bout d'un temps fini quand $t \to t_c$, si la magnitude initiale $b_q(1) > b_{\mathrm{cr}\,q} \equiv \nu_q U_q^{-1}$ et aucune dissipation ne peut empécher ce fait (une telle instabilité, où la fonction se développe *plus rapidement* que l'instabilité « normale » $\sim \exp\varepsilon t$, est appelée *instabilité explosive*) ; (iv) La formation de singularités de densité volumique a lieu même pour une condition initiale $\delta_q(0) = 0$; (v) L'énergie des ondes instables est empruntée de l'énergie gravitationnelle du système.

Dans le cadre de l'analyse faite avec des paquets spectralement étroits, « l'explosion » des modes se produit simultanément dans tout l'espace. En fait, toute inhomogénéité spatiale des conditions initiales conduira à des « explosions » et à une formation de singularités des champs dans de petites régions localisées.

Références

[1] Ya.B. Zel'dovich, I.D. Novikov, The Structure and Evolution of the Universe, Univ. of Chicago, Chicago/London, 1983.
[2] W.B. Bonnor, Mon. Not. R. Astron. Soc. 117 (1957) 104.
[3] P.J.E. Peebles, The large Scale Structure of the Universe, Princeton University, Princeton, NJ, 1980.
[4] (a) G. Gamow, The creation of the Universe, rev. ed., 1961;
(b) S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, Wiley, New York, 1972;
(c) Ya.B. Zel'dovich, I.D. Novikov, in: G. Steigman (Ed.), Structure of the Universe, Chicago Univ. Press, 1977.
[5] T. Kundic, et al., Astrophys. J. 482 (1997) 75.
[6] V. Ginzburg, Physics Uspekhi (UFN) 169 (4) (1999) 428.
[7] (a) L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Physique théorique VI, Mécanique des fluides, Mir, Moscou, 1971 ;
(b) L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Physique théorique I, Mécanique, Mir, Moscou, 1969.
[8] E.W. Kolb, M.S. Turner, The Early Universe, Addison–Wesley, Reading, MA, 1993.
[9] Ya.B. Zel'dovich, Hydrodynamics of the Universe, Annu. Rev. Fluid Mech. (1977).
[10] E.M. Lifshitz, J. Phys. USSR Acad. Sci. 10 (1946) 116.
[11] E.M. Lifshitz, I.M. Khalatnikov, Sov. Phys. Usp. 6 (1963) 522.
[12] F. Bernardeau, S. Colombi, E. Gaztanaga, R. Scoccimarro, Large-scale structure of cosmological perturbation theory, Phys. Rep. 367 (1) (2002) 1–309.
[13] S.F. Shandarin, Ya.B. Zeldovich, The large-scale structure of the Universe : Turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium, Rev. Mod. Phys. 61 (1989) 185–220.
[14] J. Weiland, H. Wilhelmsson, Coherent Non Linear Interaction of Waves in Plasmas, Pergamon Press, 1977.