

Corrélations de vitesse lagrangienne et échelle intégrale temporelle en simulation des grandes échelles

Guoxin Wei, Ivana Vinkovic *, Liang Shao, Serge Simoëns

LMFA, UMR CNRS 5509, Université de Lyon I, École Centrale de Lyon, 69131 Ecully Cedex, France

Reçu le 19 octobre 2005, accepté après révision le 14 mars 2006

Présenté par Sébastien Candel

Résumé

Les temps de corrélation de vitesse lagrangienne sont étudiés numériquement en simulation numérique directe (DNS) et en simulation des grandes échelles (LES) couplée avec un modèle stochastique lagrangien, dans une turbulence homogène et isotrope. Un modèle de Langevin est utilisé pour déterminer la composante sous-maille de la vitesse des particules fluides. Les corrélations lagrangiennes en deux temps et le déplacement des particules fluides sont présentés. Ces grandeurs sont calculées car elles jouent un rôle crucial dans le mélange turbulent ou la dispersion turbulente de scalaires. *Pour citer cet article : G. Wei et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Lagrangian velocity correlations and timescales by a large-eddy simulation. Velocity correlations and Lagrangian timescales are studied numerically by means of a direct numerical simulation (DNS) and a large-eddy simulation (LES) coupled with a subgrid Lagrangian stochastic model, in the case of a homogeneous and isotropic turbulence. A Langevin model is used to determine the subgrid component of the velocity of fluid particles. Numerical results of Lagrangian velocity correlations and timescales are presented. These quantities play an important role in turbulent mixing and scalar dispersion. *To cite this article: G. Wei et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Corrélation lagrangienne ; Échelle intégrale ; Modèle stochastique ; LES

Keywords : Fluid mechanics; Lagrangian correlation; Integral timescales; Stochastic model; LES

Abridged English version

Velocity correlations and Lagrangian timescales are studied numerically by means of DNS and LES. These quantities play an essential role in passive or reactive scalar dispersion. We consider the case of a homogeneous, isotropic

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : ivana.vinkovic@ec-lyon.fr (I. Vinkovic).

turbulence in a cubic box. The mean flow is zero, $U_i = 0$, and only the fluctuating part u_i , is considered. The LES can compute only the filtered, large-scale part of the flow \tilde{u}_i (Eq. (2)). Chemical reactions, turbulent mixing and diffusion, mostly take place at a scale smaller than the grid of the LES. Even though LES is a powerful tool for simulating turbulent flows, physical phenomena that take place below the grid should be modelled additionally. In this study, the LES is coupled with Lagrangian tracking of fluid particles. The velocity of each fluid particle $v_i(t)$, is considered to have a large-scale part $\tilde{v}_i(t)$ and a subgrid scale part $v'_i(t)$ (Eq. (3)). The large scale part is directly computed by the LES while $v'_i(t)$ is obtained by a Lagrangian stochastic model, Eq. (4). Details about the coupling between the LES and the stochastic model may be found in Vinkovic et al. [1]. With the stochastic model, the subgrid velocity fluctuations of the fluid particles, that are otherwise unknown, can easily be computed. The parameters of the stochastic model are the subgrid dissipation $\tilde{\varepsilon}$, the subgrid velocity fluctuations $\sigma_{u'}$, the Kolmogorov constant C_0 [5] ($C_0 = 4.5$ in this study), and $\xi(t)$ an isotropic white noise with zero mean and variance dt . Velocity correlations $R_L(\tau)$, and the Lagrangian timescale T_L , are obtained by Eqs. (9) and (10), respectively. Fig. 1(a) shows the time evolution of $R_L(\tau)$ obtained by the DNS and the LES without the stochastic model. Differences appear at short times and they are more pronounced when the LES resolution is lower. This was previously noticed by He et al. [10]. Figs. 1(b), 1(c), 2(a) and 2(b) illustrate the time evolution of $R_L(\tau)$ for the LES coupled with the stochastic model. A significant improvement of the results can be seen as we introduce the stochastic model. Two different subgrid models for the LES have been tested: Chollet and Lesieur [3] (Figs. 1(b) and 2(a)) and Cui et al. [4] (Figs. 1(c) and 2(b)). The subgrid model does not have considerable impact on $R_L(\tau)$. However, at short times, the subgrid model of Cui et al. [4] seems to give results closer to the DNS profile. The Lagrangian timescale T_L is obtained on one hand by integrating $R_L(\tau)$ (Eq. (10)), and on the other by the approximation $T_L = 2\sigma_u^2/(C_0\varepsilon)$ (Eq. (5)). The values obtained by these two ways from the LES with two different subgrid models and with the stochastic model are compared with the DNS results in Tables 1 and 2. An improvement in the prediction of T_L can be noticed as we introduce the stochastic model in the LES. This improvement increases as the LES resolution is lower. Finally, the fluid particle displacement $\overline{X}(t)$ (Eq. (11)) is computed. The time evolution of $\overline{X}(t)$ is illustrated on Fig. 2(c). Good agreement is achieved between the computed values of $\overline{X}(t)$ and the classical predictions [8], namely, $\overline{X}(t) \rightarrow \sigma_v t$ for $t \ll T_L$ and $\overline{X}(t) \rightarrow \sigma_v \sqrt{2T_L t}$ for $t \gg T_L$, where $\sigma_v^2 = \sigma_u^2 = \sigma_u^2 + \sigma_{u'}^2$. For short times, $\overline{X}(t)$ is not influenced by the introduction of the stochastic model. However, as time increases, the stochastic model allows a better approximation of $\overline{X}(t)$. The coupling of the LES with the stochastic model gives a better estimation of Lagrangian velocity correlations and timescales. These improvements could lead to a better prediction of passive or reactive scalar dispersion, which is the topic of our current research.

1. Introduction

Ce travail consiste en l'étude numérique du comportement des échelles intégrales temporelles de vitesse à l'aide de la LES. Les échelles temporelles ont un rôle prépondérant dans la dispersion ou le mélange turbulent de scalaire passif ou réactif. En LES, le champ de vitesse est séparé suivant la taille des tourbillons à l'aide d'un filtre. On résout directement les équations qui gouvernent les grosses structures. L'effet des petites structures est pris en compte par un modèle de sous-maille. Cette approche nous offre la possibilité de connaître en détail les grandes structures turbulentes de l'écoulement. Cependant, pour les problèmes de mélange turbulent, cette technique de simulation rencontre des difficultés, car l'essentiel des phénomènes physiques se passent dans les petites échelles non résolues. Cela se mesure en particulier au travers de la capacité du modèle à reproduire correctement l'évolution des corrélations lagrangiennes et donc des échelles intégrales temporelles de vitesse.

Dans la présente étude, une approche numérique mixte, eulérienne pour la résolution du champ de vitesse des grandes échelles et lagrangienne pour le suivi des particules fluides, est adoptée. Afin de tenir compte plus finement des petites échelles, une fluctuation de vitesse sous-maille est introduite. Cette fluctuation est modélisée par une équation stochastique de Langevin. On trouvera les détails de cette formulation dans Vinkovic et al. [1]. L'influence de cette modélisation sur les grandeurs telles que les corrélations de vitesse lagrangienne ou l'échelle intégrale temporelle, est étudiée. Les résultats de la LES couplée avec le modèle stochastique de sous-maille sont comparés à ceux d'une DNS avec le suivi lagrangien de particules fluides.

2. Équations de base

On considère une turbulence homogène, isotrope et stationnaire dans une boîte cubique. La méthode numérique utilisée est de type pseudo-spectrale, car elle présente une faible diffusion numérique et permet d'utiliser une modélisation véritablement physique des effets petite échelle [2]. Les conditions de périodicité sont appliquées dans les trois directions spatiales. La vitesse moyenne est nulle, $U_i = 0$. Dans la suite, on ne considère que la partie de fluctuation de vitesse, u_i . Par la DNS, on obtient directement la vitesse eulérienne u_i . Dans la LES, le champ de vitesse u_i , est filtré par une taille de maille spatiale, et se décompose suivant :

$$u_i = \tilde{u}_i + u'_i \quad (1)$$

où \tilde{u}_i représente la partie grande échelle, et u'_i la partie petite échelle, du champ de vitesse. La LES ne résout que les équations de Navier–Stokes filtrées, données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{u}_i \tilde{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \end{cases} \quad (2)$$

où τ_{ij} est le tenseur de contraintes de sous-maille. Les modèles de sous-maille de Chollet et Lesieur [3] et de Cui et al. [4] sont utilisés séparément aux fins de comparaison dans ce travail. Pour tenir compte d'inhomogénéités spatiales, ce qui est un des objectifs de cette étude, et de leurs influences sur le mélange turbulent, il est plus cohérent pour nous d'utiliser le modèle de Cui et al. [4]. Celui-ci est une extension du modèle [3] aux cas inhomogènes. Il nous paraît cependant judicieux de conserver la comparaison avec le modèle [3] qui représente une référence.

Dans un écoulement turbulent, la vitesse lagrangienne d'une particule fluide dans la direction x_i peut être écrite sous la forme suivante :

$$v_i(t) = \tilde{v}_i(t) + v'_i(t) \quad (3)$$

A un instant t donné, la partie grande échelle, $\tilde{v}_i(t)$, est égale à la vitesse eulérienne du fluide à la position de la particule fluide $x_{p_i}(t)$, $\tilde{v}_i(t) = \tilde{u}_i(x_{p_i}(t), t)$. Cette vitesse est directement obtenue par la LES. Il manque maintenant la partie petite échelle de la vitesse lagrangienne, $v'_i(t)$. C'est la raison pour la quelle nous introduisons l'équation de Langevin :

$$\frac{dv'_i}{dt} = -\frac{C_0 \tilde{\epsilon}}{2\sigma_{u'}^2} v'_i + \sqrt{C_0 \tilde{\epsilon}} \xi(t) \quad (4)$$

Les paramètres dans cette équation sont : $\tilde{\epsilon}$ la dissipation sous-maille, $\sigma_{u'}$ l'intensité des fluctuations sous-maille, C_0 la constante de Kolmogorov [5] ($C_0 = 4.5$ dans ce travail), et $\xi(t)$ un bruit blanc gaussien isotrope de moyenne nulle et de variance dt . On peut en déduire, par analogie à la relation classique [6], une échelle intégrale temporelle lagrangienne \tilde{T}_L qui sera modélisée par [1,7] :

$$\tilde{T}_L = \frac{2\sigma_{u'}^2}{C_0 \tilde{\epsilon}} \quad (5)$$

En turbulence homogène isotrope, les moyennes par maille peuvent être remplacées par des moyennes sur tout le domaine. Dans l'espace spectral, à grand nombre de Reynolds, l'énergie cinétique turbulente de sous-maille $\tilde{E} = 3/2\sigma_{u'}^2$, peut être estimée par :

$$\tilde{E} = \int_{K_c}^{K_\eta} E(K) dK \sim \frac{3}{2} (K_c^{-2/3} - K_\eta^{-2/3}) \quad (6)$$

où K_η est le nombre d'onde de Kolmogorov, et K_c le nombre d'onde de coupure du filtre. En vue d'applications en turbulence inhomogène, dans l'espace physique, \tilde{E} peut être obtenue également par [2] :

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}_j \tilde{E})}{\partial x_j} = -\tau_{ij} \tilde{S}_{ij} - C_1 \frac{(\tilde{E})^{3/2}}{\Delta} + C_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Delta \sqrt{\tilde{E}} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (7)$$

où $C_1 = 1,0$, et $C_2 = 0,1$ sont deux constantes positives, Δ est la taille du filtre et S_{ij} est le tenseur de déformations. La dissipation sous-maille est donnée par $\tilde{\varepsilon} = C_\varepsilon(\tilde{E})^{3/2}/\Delta$ avec $C_\varepsilon \sim 1.3$.

3. Les corrélations et les échelles intégrales temporelles de vitesse lagrangienne

On considère ici les corrélations de la vitesse lagrangienne, définies par :

$$R_L(t_0, \tau) = \frac{\langle v(t_0)v(t_0 + \tau) \rangle}{\sqrt{\langle v(t_0)^2 \rangle} \sqrt{\langle v(t_0 + \tau)^2 \rangle}} \tag{8}$$

où $v(t_0)$ est la vitesse lagrangienne d'une particule fluide à l'instant initial t_0 , et $v(t_0 + \tau)$ est la vitesse lagrangienne sur la trajectoire de la même particule fluide à l'instant $t = t_0 + \tau$. Le caractère stationnaire de la turbulence homogène et isotrope implique que $R_L(t_0, \tau)$ ne dépend pas de l'instant initial t_0 , et ne dépend plus que de l'intervalle de temps τ . On peut donc simplifier $R_L(t_0, \tau)$ par $R_L(\tau)$:

$$R_L(\tau) = \frac{\langle v(0)v(\tau) \rangle}{\sqrt{\langle v(0)^2 \rangle} \sqrt{\langle v(\tau)^2 \rangle}} \tag{9}$$

et moyenné ainsi au sens de $\langle . \rangle$ toutes les particules p suivies, relâchées à des instants t_{0p} différents. De même, l'échelle intégrale temporelle lagrangienne T_L , se définit indépendamment de t_0 et s'écrit :

$$T_L = \int_0^\infty R_L(t) dt \tag{10}$$

Le temps initial à partir duquel sont prises en compte les particules est ainsi quelconque et ne dépend pas de la simulation. Le signe $\langle . \rangle$ représente la moyenne obtenue sur l'ensemble statistique de toutes les particules.

Les corrélations lagrangiennes en deux temps, obtenues par la DNS et la LES sans le modèle stochastique de sous-maille, sont présentées sur la Fig. 1(a). La DNS utilise un maillage de 128^3 avec un schéma pseudo-spectral [4]. La DNS et la LES ont été réalisées pour le même nombre de Reynolds. L'introduction du suivi des particules dans une DNS rend les calculs lourds. La validation des modèles LES par comparaison avec une DNS est donc limitée à de petits nombre de Reynolds [9]. Aux temps courts, une différence nette apparaît entre la DNS et la LES. La différence s'accroît quand la résolution de la LES diminue. Ce résultat est en accord avec une étude récente de He et al. [10]. L'importance de $R_L(\tau)$ dans le mélange turbulent est discutée dans [10].

Les Figs. 1(b), 1(c), 2(a) et 2(b) illustrent les corrélations lagrangiennes, obtenues avec la prise en compte des fluctuations de sous-maille par le modèle stochastique. On constate une nette amélioration du comportement aux temps courts, Figs. 2(a) et 2(b). Les résultats des Figs. 1(b) et 2(a) ont été obtenus avec le modèle de sous-maille de Chollet et Lesieur [3], alors que pour ceux des Figs. 1(c) et 2(b) nous avons utilisé le modèle de sous-maille de Cui et al. [4]. L'influence du modèle de sous-maille sur les quantités considérées est faible.

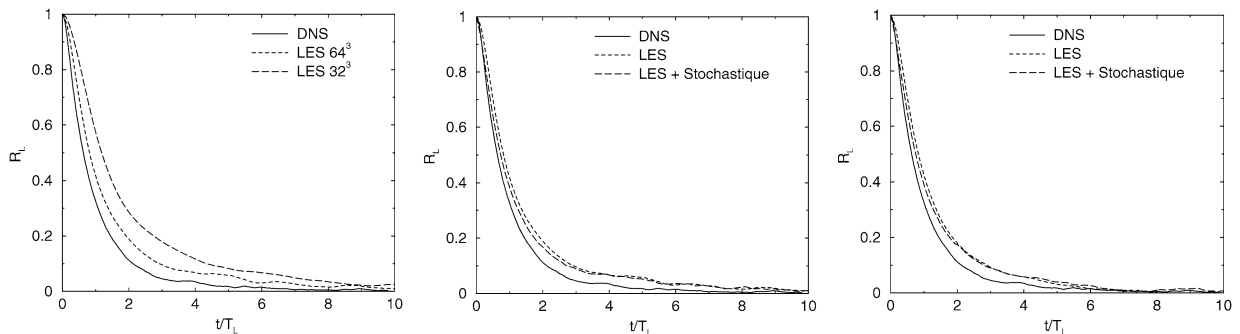


Fig. 1. Corrélation lagrangienne en deux temps, $Re_\lambda = 100$: (a) sans modèle stochastique avec modèle de sous-maille Chollet et Lesieur [3]; (b) modèle sous-maille de Chollet et Lesieur [3]; (c) modèle sous-maille de Cui et al. [4].

Fig. 1. Lagrangian velocity correlation with two time scales, $Re_\lambda = 100$: (a) without stochastic model, with subgrid model of Chollet and Lesieur [3]; (b) subgrid model of Chollet and Lesieur [3]; (c) subgrid model of Cui et al. [4].

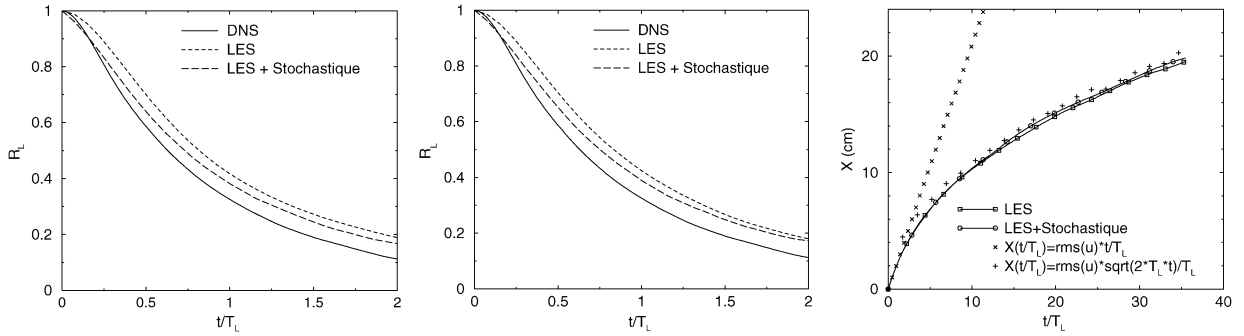


Fig. 2. Comportement aux temps courts des corrélations lagrangiennes en deux temps et déplacement moyen des particules, $Re_\lambda = 100$: (a) $R_L(\tau)$ avec modèle sous-maille de Chollet et Lesieur [3]; (b) $R_L(\tau)$ avec modèle sous-maille de Cui et al. [4]; (c) $\overline{X}(t)$.

Fig. 2. Behaviour of the Lagrangian velocity correlation at short times and average particle displacement, $Re_\lambda = 100$: (a) $R_L(\tau)$ with subgrid model of Chollet and Lesieur [3]; (b) $R_L(\tau)$ with subgrid model of Cui et al. [4]; (c) $\overline{X}(t)$.

Tableau 1

Les échelles intégrales temporelles lagrangiennes, $Re_\lambda = 100$. Résolution de la LES 64^3

Table 1

The Lagrangian integral times scales, $Re_\lambda = 100$. Resolution of the LES 64^3

	DNS	LES [3]	LES [4]	LES [3] + Stochastique	LES [4] + Stochastique
T_L (Éq. (10))	0,129	0,156	0,154	0,144	0,145
T_L (Éq. (5))	0,136	0,128	0,129	0,143	0,142

Tableau 2

Les échelles intégrales temporelles lagrangiennes, $Re_\lambda = 100$. Résolution de la LES 32^3

Table 2

The Lagrangian integral times scales, $Re_\lambda = 100$. Resolution of the LES 32^3

	DNS	LES [3]	LES [4]	LES [3] + Stochastique	LES [4] + Stochastique
T_L (Éq. (10))	0,129	0,206	0,172	0,177	0,153

Les échelles intégrales temporelles lagrangiennes sont données dans le Tableau 1, pour une résolution de 64^3 en LES. On constate que le modèle stochastique apporte une amélioration de 10% lorsque T_L est calculé par intégration (Éq. (10)). Cette amélioration apparaît moins nettement lorsque T_L est obtenu par l'Éq. (5), où σ_u' et $\tilde{\varepsilon}$ ont été remplacés par les quantités globales correspondantes. Dans le Tableau 2, les échelles intégrales lagrangiennes obtenues par intégration (Éq. (10)) pour une LES avec une résolution de 32^3 sont présentées. L'amélioration apportée par le modèle stochastique, quelque soit le modèle de sous-maille est dans ce cas autour de 25%. Le modèle stochastique apporte les fluctuations qui statistiquement représentent mieux le comportement des petites échelles et permet ainsi d'obtenir un temps intégral lagrangien plus faible et plus proche de la valeur calculée à partir de la DNS. L'amélioration apportée par le modèle stochastique est d'autant plus importante que la résolution de la LES est faible.

4. Déplacement des particules fluides

On s'intéresse, par ailleurs, au déplacement moyen des particules, défini par :

$$\overline{X}(t) = \sqrt{\langle (X(t; t_0, X(t_0)) - X(t_0))^2 \rangle} \tag{11}$$

où $X(t_0)$ et $X(t; t_0, X(t_0))$ sont la position initiale et la position à l'instant t des particules fluides.

Sur la Fig. 2(c), l'évolution en temps de $\overline{X}(t)$ est représentée. Nous pouvons constater que, aussi bien aux temps longs qu'aux temps courts, les résultats de notre LES reproduisent avec fidélité les prédictions classiques [8], à savoir, $\overline{X}(t) \Rightarrow \sigma_v t$ pour $t \ll T_L$ et $\overline{X}(t) \Rightarrow \sigma_v \sqrt{2T_L t}$ pour $t \gg T_L$, avec $\sigma_v^2 = \sigma_u^2 = \sigma_u^2 + \sigma_u^2$. Aux temps courts, les déplace-

ments moyens des particules fluides sont peu sensibles à la prise en compte du modèle stochastique en sous-maille. Il semblerait qu'aux temps longs, la modélisation stochastique permet de mieux approcher $\overline{X}(t) = \sigma_v \sqrt{2T_L t}$.

5. Conclusions

Nous avons étudié les corrélations et l'échelle intégrale temporelle de vitesse lagrangienne par une méthode LES pseudo-spectrale, couplée au modèle stochastique de sous-maille, en turbulence homogène, isotrope et stationnaire. Le couplage apporte une nette amélioration pour la prédiction de quantités telles que les corrélations de vitesse lagrangienne ou l'échelle intégrale temporelle. La meilleure prédiction des temps intégraux lagrangiens démontre une amélioration de la représentation du brassage aux petites échelles par la modélisation stochastique. Dans le cadre du mélange turbulent de scalaires réactifs cela est prépondérant car permet d'approcher plus précisément les temps caractéristiques relatifs au mélange ultime. Le défaut de la technique est démontré pour des temps très courts où le modèle stochastique choisi ne prend pas en compte les plus petites échelles et accélère la décorrélation initiale. Ce problème trouve sa solution dans des modèles à deux échelles de temps [11] qui permettent d'améliorer la dynamique turbulente des temps très courts. Malgré ce comportement aux temps très courts, l'amélioration reste importante par rapport à une modélisation classique de type sous-maille eulérien [3] pour la dynamique.

Références

- [1] I. Vinkovic, C. Aguirre, S. Simoëns, J.N. Gence, Couplage d'un modèle stochastique lagrangien sous-maille avec une simulation grandes échelles, C. R. Mécanique 333 (2005) 325–330.
- [2] P. Sagaut, Introduction à la simulation des grandes échelles pour les écoulements de fluide incompressible, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1998.
- [3] J.P. Chollet, M. Lesieur, Parameterisation for small scales of three dimensional isotropic turbulence using spectral closure, J. Atmos. Sci. 38 (1981) 2747–2757.
- [4] G. Cui, H. Zhou, Z. Zhang, L. Shao, A new dynamic subgrid eddy viscosity model with application to turbulent channel flow, Phys. Fluids 16 (2004) 2835–2842.
- [5] S. Du, B.L. Sawford, J.D. Wilson, Estimation of the Kolmogorov constant (C_0) for the Lagrangian structure function, using a second-order Lagrangian model of grid turbulence, Phys. Fluids 7 (1995) 3083–3090.
- [6] J.O. Hinze, Turbulence, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [7] I. Vinkovic, C. Aguirre, S. Simoëns, Large-eddy simulation and Lagrangian stochastic modeling of passive scalar dispersion in a turbulent boundary layer, J. Turbul., in press.
- [8] A.S. Monin, A.M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics, MIT Press, Cambridge, 1971.
- [9] V. Armenio, U. Piomelli, V. Fiorotto, Effect of the subgrid scales on particle motion, Phys. Fluids 11 (1999) 3030–3042.
- [10] G. He, R. Rubinstein, L. Wang, Effects of subgrid scale modeling on time correlations in large eddy simulation, Phys. Fluids 14 (2002) 2186–2193.
- [11] B.L. Sawford, Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion, Phys. Fluids 3 (1991) 1577–1588.