

## Stabilité de l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas

Walid Fakhfakh<sup>a</sup>, Slim Kaddeche<sup>a,\*</sup>, Ali Abdennadher<sup>a</sup>,  
Daniel Henry<sup>b</sup>, Hamda Ben Hadid<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Institut national des sciences appliquées et de technologie, unité de recherche matériaux, mesures et applications,  
INSAT, B.P. 676, 1080 Tunis cedex, Tunisie

<sup>b</sup> Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR CNRS 5509, Université Claude-Bernard / École centrale de Lyon / INSA de Lyon,  
ECL, 36, avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully cedex, France

Reçu le 6 mars 2006 ; accepté le 14 mars 2006

Présenté par René Moreau

### Résumé

Nous étudions numériquement l'influence d'un champ magnétique vertical, du nombre de Reynolds et d'une stratification de température sur la stabilité de l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas. Pour  $Pr = 0,001$  et  $Ha \leq 2,5$ , nos résultats montrent que le champ magnétique stabilise aussi bien les modes transverses oscillatoires progressifs ( $T$ ) que les modes longitudinaux stationnaires ( $L$ ). Quant à la stratification de température, elle est à l'origine d'une déstabilisation de l'écoulement de Hartmann par rapport au cas isotherme et de l'apparition des modes ( $L$ ) inexistants dans le cas  $Ra = 0$ . On note aussi que l'étendue du domaine des valeurs de  $Re$  où les modes transverses ( $T$ ) sont les plus dangereux se rétrécit lorsque  $Ha$  augmente et qu'elle s'élargit quand  $Ra$  augmente à  $Ha$  donné. Quant à l'étendue du domaine des valeurs de  $Re$  où les modes ( $L$ ) prévalent, elle augmente quand  $Ha$  croît. **Pour citer cet article :** W. Fakhfakh et al., *C. R. Mécanique* 334 (2006).

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Stability of the Hartmann flow heated from below.** A numerical study is conducted in order to determine the influence of a vertical magnetic field, the Reynolds number and a temperature stratification on the instabilities occurring in the Hartmann flow heated from below. For  $Pr = 0.001$  and  $Ha \leq 2.5$ , the results show that the vertical magnetic field has a stabilizing effect on both transverse oscillatory travelling waves ( $T$ ) and longitudinal stationary rolls ( $L$ ). The temperature stratification is responsible of a destabilization of the transverse ( $T$ ) modes and the appearance of longitudinal ( $L$ ) modes non-existent for the isothermal Hartmann flow. Moreover, the extent of the domains of  $Re$  where the transverse modes ( $T$ ) prevail is found to narrow when  $Ha$  increases and to widen when  $Ra$  increases for a given value of  $Ha$ . On the other hand, for the ( $L$ ) modes, the extent of the domains of  $Re$  where they prevail increases when  $Ha$  grows. **To cite this article:** W. Fakhfakh et al., *C. R. Mécanique* 334 (2006).

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

**Mots-clés :** Mécanique des fluides ; Magnétohydrodynamique ; Stabilité

**Keywords:** Fluid mechanics; Magneto hydrodynamics; Stability

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [slimkaddeche@yahoo.fr](mailto:slimkaddeche@yahoo.fr) (S. Kaddeche).

## Abridged English version

### Introduction

The stability of the Poiseuille flow heated from below (Poiseuille–Rayleigh–Bénard) has been extensively investigated in several previous studies in regard to its importance in various engineering applications, such as material processing technologies (CVD), cooling electronic components and nuclear thermal power stations. A comprehensive synthesis of the large available experimental, theoretical and numerical results obtained by different research groups on the problem of Poiseuille flow heated from below is given in the paper of Nicolas [1]. In the general framework of magnetohydrodynamics, only the isothermal Hartmann flow (without temperature stratification,  $Ra = 0$ ) had received interest, and a relatively moderate number of studies was devoted to estimate the influence of a magnetic field on the instabilities of such a flow. Forty years after the work of Lock [2], and two decades after the investigations of Potter et al. [3], Takashima [4] has included the effect of the magnetic Prandtl number to generalize Lock's [2] investigations and bring some corrections to the boundary conditions considered in the work of Potter et al. [3]. More recently, Lingwood et al. [5] have conducted a numerical investigation to study the effect of a magnetic field of arbitrary direction on the stability of the Hartmann layer. Their results for weak magnetic Prandtl numbers are in good agreement with those of Takashima [4] in the case of sufficiently high  $Ha$  and when the magnetic field is transverse with respect to the fluid layer. Furthermore, Jédidi et al. [6] have treated directly the general problem of three-dimensional instabilities of the isothermal Hartmann flow without using the classical Squire approximation. They show that sufficiently accurate results can be derived from the Squire approximation only when  $Ha$  is weak and when the front wave is slightly deviated from the streamwise direction. Nevertheless, in spite of the significant studies related to the Poiseuille flow heated from below and those dedicated to the influence of a magnetic field on the isothermal Hartmann flow, the problem of the temperature stratified Hartmann flow, has not received, to our knowledge any work devoted to evaluate the effects of both temperature stratification ( $Ra$ ) and magnetic field ( $Ha$ ) on the critical thresholds beyond which the flow becomes unstable. Consequently, we dedicate this work to study these aspects, namely, to evaluate the effect of both  $Ra$  and  $Ha$ , and also  $Re$  on the critical thresholds beyond which the Hartmann flow heated from below becomes unstable.

### Results

The conducted numerical simulations, based on linear stability, show that a vertical magnetic field has a stabilizing effect on both oscillatory transverse ( $T$ ) and stationary longitudinal ( $L$ ) instabilities occurring in the stratified Hartmann flow as illustrated in Fig. 1. From this figure, for the transverses modes, it is clear that the trend of the curves obtained with a vertical magnetic field is globally similar to that of the case  $Ha = 0$  (corresponding to the Poiseuille flow heated from below). For a given  $Ha$ , the critical Rayleigh number  $Ra_c$  first increases with  $Re$  to reach a maximum which strongly grows with  $Ha$ , then decreases sharply when  $Re$  is further increased. Such a decrease of the  $Ra_c$  values is more significant when  $Ha$  is increased. From Fig. 1, we can also notice for  $Ha \lesssim 2.5$  and  $Re > Re^*(Ha)$ , where the ( $T$ ) modes prevail, that  $Re_c$  decreases when  $Ra$  is increased indicating that the temperature stratification is responsible of a destabilization of the Hartmann flow. Moreover, this decrease of the  $Re_c$  values when  $Ra$  grows is attenuated when  $Ha$  increases confirming the stabilizing effect of the magnetic field. For the longitudinal modes ( $L$ ) which do not exist for the isothermal Hartmann flow ( $Ra = 0$ ) and are consequently induced by the temperature stratification ( $Ra > 0$ ), the thresholds  $Ra_c$  are found to slightly increase with  $Ha$ , but remain independent of  $Re$  for all the investigated values of  $Ha$ . However, the domain of  $Re$  where these modes are the most dangerous, widens slightly when  $Ha$  grows. At the same time, as detailed in Table 1, the value of  $\Delta Re(Ha) = Re_c(Ha) - Re^*(Ha)$  ( $Re_c(Ha)$  is the critical Reynolds number for the isothermal Hartmann flow,  $Ra = 0$ ) which is a measure of the extent of the  $Re$  domain over which the ( $T$ ) modes are the most dangerous decreases when increasing  $Ha$  and for a fixed  $Ha$  increases from 0 for  $Ra = 0$  (where  $Re_c(Ha)$  is the only critical value of  $Re$  corresponding to an unstable ( $T$ ) mode for the isothermal Hartmann flow) to  $\Delta Re(Ha)$  for  $Ra = Ra^*(Ha)$ . In Fig. 2, are displayed the neutral stability curves in the ( $Ra, h$ ) plane, for  $Re = 2000$  and various values of  $Ha$ . The neutral curves which present a single minimum for  $Ha \lesssim 1.5$ , change gradually, and a second minimum appears since  $Ha \gtrsim 2$ . However this local minimum does not become a global minimum in the range of the investigated values of  $Ha$  and consequently should never become the most critical unstable mode. According to Fig. 3, one can observe that the wave number  $h_c$  is a decreasing function

of  $Re$  except at the end of the curves for  $Ha \gtrsim 1.5$ , and more precisely beyond  $Re = 13\,000$ ,  $11\,600$  and  $11\,100$  for respectively  $Ha = 1.5$ ,  $2$  and  $2.5$ , where the curves start a phase of growth. This atypical behavior corresponds to a shortening of the travelling transverse rolls length. Note that in the first part of the curves, the wave number  $h_c$  grows as  $Ha$  is increased, but for  $Re \gtrsim 50$ , it becomes a decreasing function of  $Ha$ . In Fig. 4, where is displayed the variation of the wave speed  $c_c$  as a function of  $Re$  for several values of  $Ha$ , one can notice that for  $Re \gtrsim 100$ ,  $c_c$  becomes a strongly decreasing function of  $Re$  ( $c_c \sim Re^{-5/3}$ ). However, for a fixed value of  $Re$ ,  $c_c$  increases when  $Ha$  grows.

## 1. Introduction

L'étude des instabilités se développant au sein de l'écoulement de Poiseuille chauffé par le bas (Poiseuille–Rayleigh–Bénard qui représente un cas particulier de l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas avec  $Ha = 0$ ), a été abondamment abordée dans la littérature, notamment pour l'intérêt qu'elle présente dans le domaine des dépôts chimiques en phase vapeur (CVD), ainsi que dans le domaine du refroidissement des composants électroniques et des installations nucléaires. Une revue bibliographique exhaustive des travaux expérimentaux, théoriques et numériques, relative au problème des instabilités de l'écoulement de Poiseuille chauffé par le bas, est présentée dans l'article de Nicolas [1] qui regroupe les résultats de 154 références. Dans le cadre de la magnétohydrodynamique, c'est l'écoulement de Hartmann isotherme (sans stratification de température,  $Ra = 0$ ) qui a suscité l'intérêt de la communauté scientifique. Un certain nombre d'études se sont principalement intéressées à évaluer l'effet d'un champ magnétique sur les instabilités se développant au sein de l'écoulement de Hartmann. Une quarantaine d'années après les premiers travaux de Lock [2], et un peu plus de deux décades après les investigations de Potter et al. [3], Takashima [4] a intégré l'effet du nombre de Prandtl magnétique afin de généraliser les travaux de Lock [2] et a apporté des corrections visant à rectifier des conditions aux limites non appropriées relevées dans les travaux de Potter et al. [3]. Plus récemment, Lingwood et al. [5] ont parachevé une étude numérique afin d'évaluer l'effet d'un champ magnétique de direction quelconque sur les instabilités de la couche de Hartmann. Dans le cadre des faibles nombres de Prandtl magnétique et des grands nombres de  $Ha$ , leurs résultats concordent avec ceux de Takashima [4] pour un champ magnétique transverse à la couche fluide. Par ailleurs, Jédidi et al. [6] ont traité le problème plus général des instabilités tridimensionnelles de l'écoulement de Hartmann par une approche globale évitant le recours à l'approximation de Squire. Il a été montré que l'approximation de Squire donnait des résultats satisfaisants tant que le front de l'onde critique n'était que faiblement dévié par rapport à la direction de l'écoulement de Hartmann et que  $Ha$  demeurerait relativement faible. Cependant, en dépit de ce nombre significatif de travaux dédiés à l'étude des instabilités de l'écoulement de Poiseuille soumis à une stratification de température, ainsi qu'à l'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement de Hartmann isotherme, à notre connaissance, le problème des instabilités de l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas n'a pas encore été abordé en dépit de l'intérêt qu'il peut susciter, notamment dans le domaine du refroidissement des composants électroniques et des installations nucléaires. L'objectif de cette étude est donc de déterminer l'influence d'une stratification de température ( $Ra$ ) et d'un champ magnétique vertical ( $Ha$ ), ainsi que du nombre de Reynolds ( $Re$ ) sur les seuils critiques au delà desquels l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas devient instable.

## 2. Modèle mathématique

L'étude de stabilité linéaire sur laquelle repose notre travail, consiste à suivre l'évolution d'une perturbation infinitésimale ( $\vec{v}$ ,  $p$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) des champs respectifs de vitesse, de pression, de température, et de potentiel électrique. L'évolution de ces grandeurs est gouvernée par le système d'équations linéarisées, constitué par les équations de Navier–Stokes d'un fluide newtonien, électriquement conducteur, obéissant à la loi de Boussinesq :  $\rho = \rho_0 (1 - \beta(T - T_0))$  et contenu entre deux plans horizontaux infinis séparés par une distance  $H$  et soumis à une différence de température verticale  $\Delta T$ , les équations de Navier–Stokes étant couplées à l'équation de conservation de la masse, de l'énergie et de la charge. D'après Moreau [7], pour des expériences MHD réalisées avec des métaux liquides à l'échelle du laboratoire, les nombres de Reynolds magnétiques sont suffisamment petits pour nous permettre de négliger le champ magnétique induit  $\vec{b}$  devant le champ extérieur  $\vec{B}_0$ . Dans le cadre de cette hypothèse, et en utilisant les grandeurs de référence  $H/2$ ,  $U_{\max}$ ,  $H/2U_{\max}$ ,  $Q_0 U_{\max}^2$ ,  $\Delta T$  et  $B_0 U_{\max} H/2$  respectivement pour les longueurs, la vitesse, le temps, la pression, la température et le potentiel électrique, ce système d'équations normalisées s'écrira :

Tableau 1  
Caractéristiques des modes (T) et (L)

Table 1  
Characteristics of the modes (T) and (L)

| Ha  | Re*(Ha)  | Re <sub>c</sub> (Ha) | ΔRe(Ha) | Ra*(Ha) | k <sub>c</sub> | Ra <sub>c,max</sub> (Ha) |
|-----|----------|----------------------|---------|---------|----------------|--------------------------|
| 0,0 | 5490,31  | 5772,22              | 281,91  | 1707,76 | 1,55818        | 9432,64                  |
| 0,5 | 6449,77  | 6689,23              | 239,46  | 1713,89 | 1,56021        | 11 390,68                |
| 1,0 | 9793,93  | 9932,56              | 138,63  | 1732,21 | 1,56629        | 22 573,63                |
| 1,5 | 16712,65 | 16772,01             | 59,36   | 1762,55 | 1,57622        | 79 005,17                |
| 2,0 | 28369,94 | 28398,31             | 28,37   | 1804,63 | 1,58970        | 328 256,23               |
| 2,5 | 43962,66 | 43975,47             | 12,81   | 1858,10 | 1,60636        | 1 169 890,59             |

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{V}_0 \cdot \nabla) \vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{V}_0 = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v} + \frac{Ra}{8Re^2 Pr} \theta \vec{e}_z + \frac{Ha^2}{Re} \vec{j} \times \vec{e}_{B_0} \tag{1}$$

$$\vec{j} = -\nabla \phi + \vec{v} \times \vec{e}_{B_0} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_{B_0} = \frac{\vec{B}_0}{B_0} = \vec{e}_z \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V}_0 \cdot \nabla \theta + \vec{v} \cdot \nabla T_0 = \frac{1}{Re Pr} \nabla^2 \theta \tag{4}$$

$$\nabla^2 \phi = \vec{e}_{B_0} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \tag{5}$$

où les nombres sans dimension  $Re = HU_{\max}/2\nu$ ,  $Ra = g\beta\Delta TH^3/\nu\kappa$ ,  $Pr = \nu/\kappa$  et  $Ha = B_0 \frac{H}{2} \sqrt{\sigma_e/\rho_0\nu}$ , désignent respectivement les nombres de Reynolds, de Rayleigh, de Prandtl et de Hartmann. La solution du problème stationnaire s'écrit :

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_0(z) = \frac{\cosh(Ha) - \cosh(Haz)}{\cosh(Ha) - 1} \vec{e}_x \tag{6}$$

$$T_0 = T_0(z) = \frac{1-z}{2} \tag{7}$$

A cette solution de base est superposée une perturbation  $(\vec{v}, p, \theta, \phi)$ . Cette perturbation est considérée comme une onde plane :  $(\vec{v}, p, \theta, \phi) = (\vec{v}(z), p(z), \theta(z), \phi(z))e^{i(hx+ky)+\omega t}$  où  $h$  et  $k$  sont les nombres d'onde selon la direction transversale et longitudinale et  $\omega$  la pulsation complexe. Le système d'équations (1)–(5) est discrétisé en utilisant la méthode spectrale de TAU faisant appel aux polynômes de Chebyshev comme fonctions de base. Les différentes composantes des perturbations fonctions de  $z$  sont donc décomposées sur un nombre de polynômes de Chebyshev dépendant de la valeur de  $Ha$ . Dans ces conditions, le système d'équations (1)–(5) se ramène à un système aux valeurs propres :  $L(Re, Ra, Pr, Ha, h, k)X = \omega MX$  où  $L(Re, Ra, Pr, Ha, h, k)$  est un opérateur linéaire dépendant de  $Re, Ra, Pr, Ha, h$  et  $k$ ,  $M$  est un opérateur linéaire constant et  $X = (\vec{v}(z), p(z), \theta(z), \phi(z))$ . On définit le nombre de Rayleigh critique, qu'on notera  $Ra_c$  et qui correspond au plus petit nombre de Rayleigh au delà duquel l'écoulement de base devient instable, comme :  $Ra_c = \text{Inf}_{(h,k) \in \mathbb{R}^2} Ra_0(Re, Pr, Ha, h, k)$  où  $Ra_0$  est la valeur de  $Ra$  correspondant au cas où la première des valeurs propres associées à l'opérateur  $L(Re, Ra, Pr, Ha, h, k)$  possède une partie réelle nulle. Par ailleurs, si on s'intéresse au nombre de Reynolds critique  $Re_c$  pour des valeurs de  $Ra, Ha$  et  $Pr$  données, aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire. En effet, si le seuil critique  $Ra_c = f(Re, Pr, Ha)$ , alors  $Re_c = f^{-1}(Ra, Pr, Ha)$  et par conséquent toutes les figures présentées tout au long de ce travail peuvent être lues à  $Re$  ou  $Ra$  constants pour s'intéresser soit aux effets de l'écoulement ( $Re$ ) soit à ceux dus au chauffage par le bas ( $Ra$ ) sur les valeurs des seuils critiques.

### 3. Résultats

Les résultats numériques issus de l'étude de stabilité linéaire montrent clairement que le champ magnétique stabilise l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas en augmentant le seuil critique  $Ra_c$ , tout en conservant, aussi bien pour les modes transverses ( $T$ ), que pour les modes longitudinaux ( $L$ ), l'allure générale des courbes en comparaison avec le cas  $Ha = 0$  (cas de l'écoulement de Poiseuille chauffé par le bas). Par ailleurs, d'après la Fig. 1, on voit

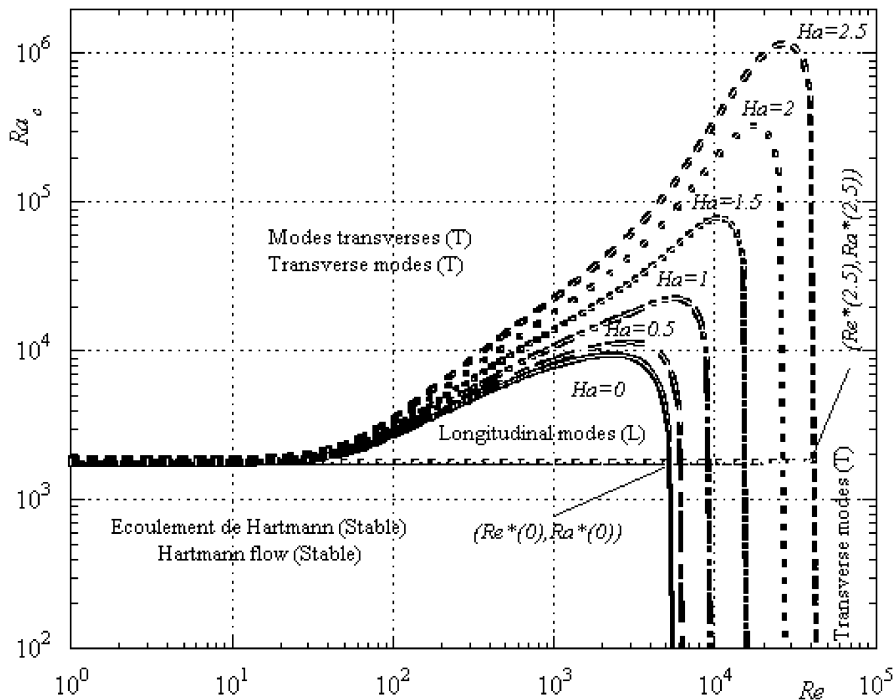


Fig. 1. Variation de  $Ra_c$  en fonction de  $Re$  pour les modes (T) et (L),  $Pr = 0.001$  et différentes valeurs de  $Ha$ .

Fig. 1. Variation of  $Ra_c$  versus  $Re$  for modes (T) and (L),  $Pr = 0.001$  and different values of  $Ha$ .

clairement que l'évolution de  $Ra_c$  pour les modes (T) se fait en deux phases successives, et ce, suivant la valeur de  $Re$ . Lors de la première phase,  $Ra_c$  croît avec  $Re$  jusqu'à atteindre un maximum  $Ra_{c,max}(Ha)$  (cf. Tableau 1) pour une valeur de  $Re$  dépendant de  $Ha$ . La seconde phase se caractérise par une décroissance de  $Ra_c$  d'autant plus marquée que  $Ha$  est grand. Les modes longitudinaux (L), quant à eux, restent indépendants de  $Re$  et leur variation en fonction de  $Ha$  est relativement modérée. Par ailleurs, la Fig. 1 montre aussi pour  $Re > Re^*(Ha)$  où les modes (T) prévalent que  $Re_c$  décroît quand  $Ra$  augmente. En effet, la valeur du nombre de Reynolds critique passe de  $Re_c(Ha)$  pour  $Ra = 0$  à  $Re^*(Ha)$  pour  $Ra = Ra^*(Ha)$  (cf. Tableau 1) prouvant que le chauffage par le bas est responsable d'une déstabilisation de l'écoulement de Hartmann par rapport au cas isotherme. Cependant, cette décroissance est d'autant plus modérée que la valeur de  $Ha$  est grande, preuve que le champ magnétique atténue les effets de déstabilisation inhérents au chauffage par le bas. Par ailleurs, le chauffage par le bas est responsable d'une modification majeure qui affecte la nature des instabilités se développant au sein de l'écoulement de Hartmann. En effet, pour un tel écoulement non chauffé par le bas ne peuvent se développer que des instabilités soit transverses qui demeurent les plus critiques, soit obliques, mais jamais longitudinales comme cela a été mentionné dans les travaux de Jédidi et al. [6]. Il s'avère désormais pour  $Ra \gtrsim Ra^*(Ha)$  et  $Re \lesssim Re^*(Ha)$ , que le chauffage par le bas est à l'origine de l'apparition d'un second type d'instabilités pour l'écoulement de Hartmann. Ces instabilités se présentant sous la forme de rouleaux longitudinaux (les modes (L)) étaient inexistantes pour le cas isotherme. Par ailleurs, les seuils critiques de ces instabilités  $Ra^*(Ha)$  sont comme cela a été déjà mentionné indépendants de  $Re$  et égaux aux seuils critiques du système de Rayleigh–Bénard sous champ magnétique vertical. On note aussi, en augmentant la valeur de  $Ha$ , que  $\Delta Re(Ha) = Re_c(Ha) - Re^*(Ha)$  qui mesure l'étendue en terme de  $Re$  du domaine où les modes (T) prévalent, diminue comme mentionné dans le Tableau 1. Par ailleurs, pour une valeur donnée de  $Ha$ , l'augmentation de  $Ra$  provoque un élargissement de ce domaine dont l'étendue varie de 0 pour  $Ra = 0$  ( $Re_c(Ha)$  est la seule valeur critique de  $Re$  correspondant à l'écoulement de Hartmann isotherme) à  $\Delta Re(Ha)$  pour  $Ra = Ra^*(Ha)$  (cf. Tableau 1). Il apparaît donc, par rapport à l'écoulement de Poiseuille–Rayleigh–Bénard ( $Ha = 0$ ), que l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas, favorise l'apparition des modes stationnaires longitudinaux (L) au détriment des modes oscillatoires transverses (T). C'est en sachant que les modes (T) peuvent être préférés par rapport aux modes (L), ou le contraire, et

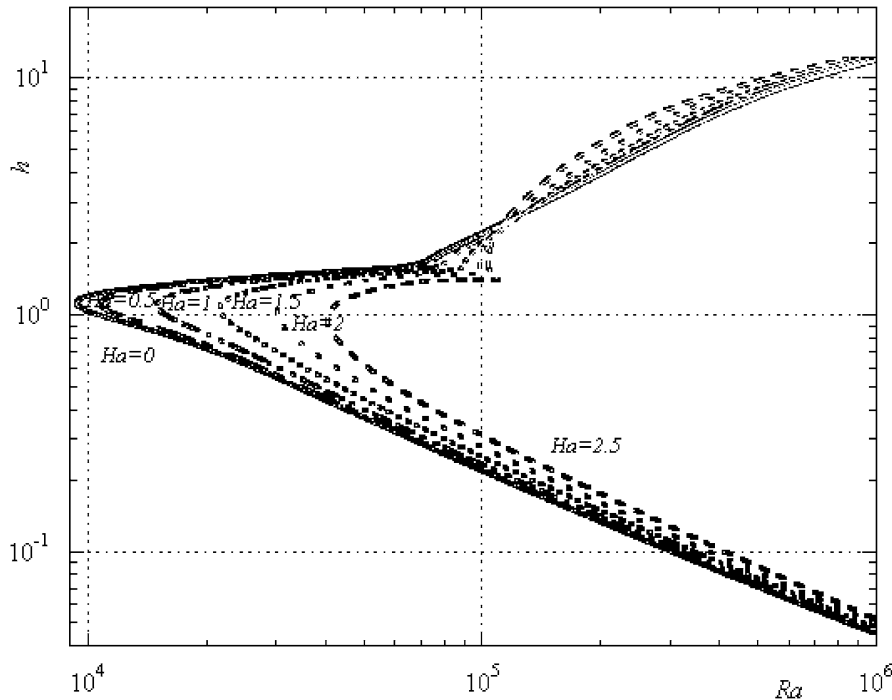


Fig. 2. Courbe de neutralité pour  $Re = 2000$ ,  $Pr = 0,001$  et différentes valeurs de  $Ha$ .

Fig. 2. Neutral stability curves for  $Re = 2000$ ,  $Pr = 0.001$  and different values of  $Ha$ .

ce, afin d'optimiser les éventuels transferts de masse et/ou de chaleur mis en jeu lors d'une application industrielle dans laquelle est impliqué un écoulement de Hartmann soumis à une stratification de température, qu'on réalise toute l'importance d'un tel contrôle des instabilités par application d'un champ magnétique vertical. Notons sur la Fig. 2, que les courbes de stabilité neutre correspondant à  $Re = 2000$  et  $Ha \leq 1,5$  ne présentent qu'un seul minimum qui correspond aux valeurs critiques représentées sur la Fig. 1. Cependant, dès lors que  $Ha \geq 2$ , on observe la formation progressive d'un deuxième minimum local lorsque  $Re$  augmente. Ce deuxième minimum, comme mentionné dans les travaux de Fujimura et al. [8] dans le cas  $Pr = 1$  et  $Ha = 0$ , peut donner naissance à une deuxième branche instable qui est susceptible de devenir la plus critique pour les modes ( $T$ ) si jamais ce minimum local venait à devenir un minimum absolu. Cependant, pour la situation considérée dans le cadre de ce travail, il ne le devient jamais et n'est donc pas mentionné sur la Fig. 1. Sur la Fig. 3 illustrant l'évolution du nombre d'onde critique  $h_c$  des modes ( $T$ ) en fonction de  $Re$ , on constate pour  $Re \rightarrow 0$ , que seuls les effets thermiques jouent un rôle important et le nombre d'onde critique  $h_c$  augmente avec  $Ha$ . Par contre, au delà d'une valeur de  $Re \sim 50$ ,  $h_c$  diminue lorsque  $Ha$  augmente traduisant un allongement des cellules marginales du champ perturbé avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique. Par ailleurs, on note sur la Fig. 3, que l'application du champ magnétique préserve l'allure générale des courbes qui décroissent lorsque  $Re$  augmente indiquant un allongement des cellules marginales à l'instar du cas relatif à l'écoulement de Poiseuille chauffé par le bas et correspondant à  $Ha = 0$ . Cependant, pour l'écoulement de Hartmann soumis à une stratification de température, dès lors que  $Ha \geq 1,5$ , cette évolution en fonction de  $Re$  n'est plus monotone et présente un minimum, autour de  $Re = 13\,000$  pour  $Ha = 1,5$ ,  $11\,600$  pour  $Ha = 2$  et  $11\,100$  pour  $Ha = 2,5$ . Au-delà de ces valeurs, le nombre d'onde critique se met à croître avec  $Re$  indiquant un effet atypique de rétrécissement des cellules marginales jusque là inconnu pour l'écoulement de Poiseuille chauffé par le bas et qui est donc spécifique à l'écoulement de Hartmann soumis à une stratification de température dès lors que  $Ha \geq 1,5$ . Le comportement de la célérité des ondes  $c_c$  des modes transverses ( $T$ ) illustré sur la Fig. 4 montre que  $c_c$  augmente avec  $Ha$  et ce d'autant plus que  $Re$  est faible. Au-delà de  $Re \sim 100$ ,  $c_c$  devient une fonction fortement décroissante de  $Re$ . Sur une large gamme de valeur de  $Re$  ( $100 \leq Re \leq 5000$ ), le comportement de la célérité critique des ondes approche la loi  $c_c \sim Re^{-5/3}$  obtenue dans le cas  $Ha = 0$ . Elle s'en écarte légèrement en fin de courbe ou lorsque la valeur de  $Ha$  augmente.

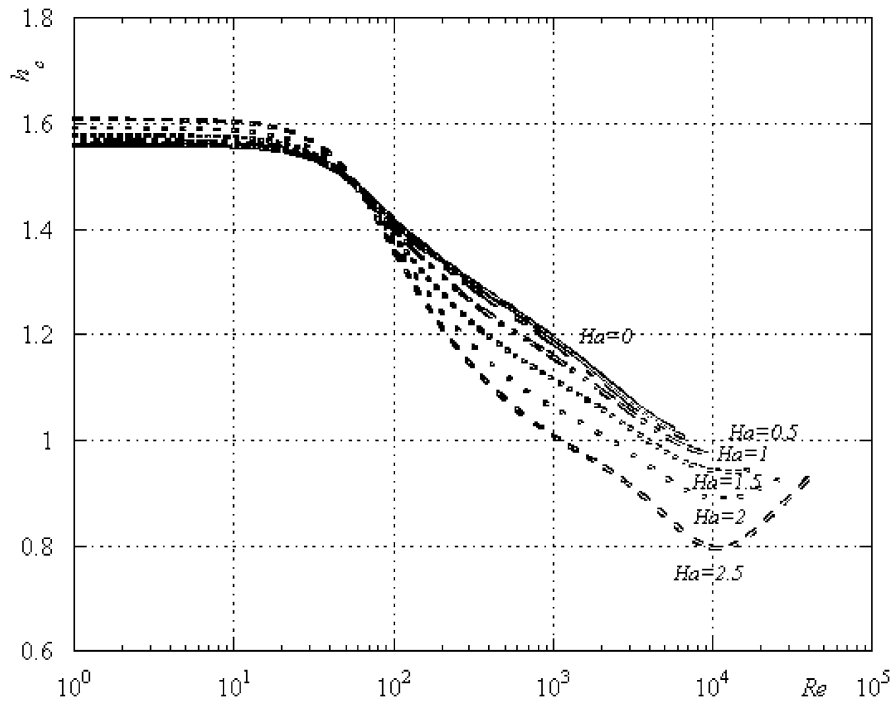


Fig. 3. Évolution du nombre d'onde  $h_c$  en fonction de  $Re$  pour  $Pr = 0,001$  et différentes valeurs de  $Ha$ .  
 Fig. 3. Evolution of the wave number  $h_c$  as a function of  $Re$  for  $Pr = 0.001$  and different values of  $Ha$ .

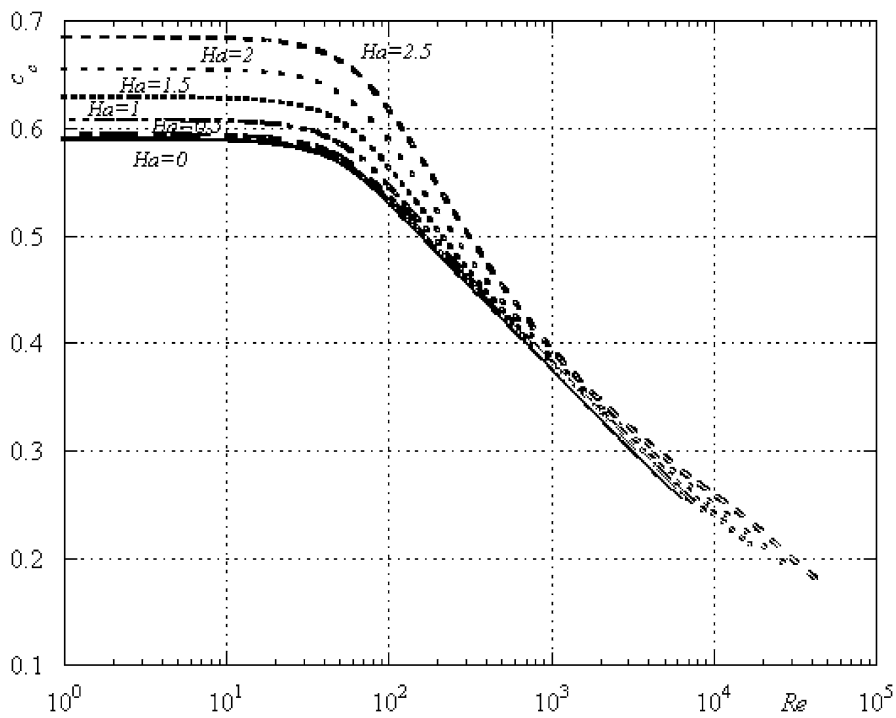


Fig. 4. Évolution de  $c_c$  en fonction de  $Re$  pour  $Pr = 0,001$  et différentes valeurs de  $Ha$ .  
 Fig. 4. Evolution of  $c_c$  as a function of  $Re$  for  $Pr = 0.001$  and different values of  $Ha$ .

#### 4. Conclusion

Ce travail dédié à l'étude de la stabilité de l'écoulement de Hartmann chauffé par le bas a montré que l'action d'un champ magnétique vertical s'est révélée globalement plus significative sur les modes ( $T$ ) qu'elle ne l'est sur les modes ( $L$ ). Par ailleurs, l'apparition des modes ( $L$ ) inexistantes pour le cas isotherme ( $Ra = 0$ ) est inhérente au chauffage par le bas imposé à l'écoulement de Hartmann. Leur seuil critique  $Ra_c = Ra^*(Ha)$  est indépendant de  $Re$  et ne varie que très légèrement avec les valeurs considérées de  $Ha$  ( $Ha \lesssim 2,5$ ). Cependant, il a été constaté que l'étendue du domaine où elles prévalent s'étalant de  $Re = 0$  à  $Re = Re^*(Ha)$  s'élargit avec le nombre de Hartmann. Par ailleurs, pour  $Re > Re^*(Ha)$  où les modes ( $T$ ) prévalent, l'augmentation de  $Ra$  est responsable d'une déstabilisation de l'écoulement de Hartmann se traduisant par une baisse de  $Re_c$ . Cette baisse de  $Re_c$  est d'autant plus modérée que  $Ha$  est grand, attestant de l'effet stabilisant du champ magnétique vertical vis à vis des modes ( $T$ ). Quant à l'étendue  $\Delta Re(Ha)$  du domaine où de tels modes prévalent, il diminue assez sensiblement quand  $Ha$  augmente. On peut donc conclure qu'un champ magnétique vertical favorise l'apparition des modes longitudinaux ( $L$ ) au détriment des modes transverses ( $T$ ). Concernant la célérité des ondes  $c_c$ , le champ magnétique modifie peu leur comportement par rapport au cas  $Ha = 0$ , en préservant globalement leur évolution avec  $Re$ . En revanche, l'évolution des nombres d'ondes critiques  $h_c$  est significativement affectée par l'application du champ magnétique vertical, qui pour  $Ha \gtrsim 1,5$  est responsable d'un rétrécissement des cellules marginales, phénomène jusque là inexistant pour l'écoulement de Poiseuille–Rayleigh–Bénard ( $Ha = 0$ ).

#### Références

- [1] X. Nicolas, Bibliographical review on the Poiseuille–Rayleigh–Bénard flows: the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below, *Internat. J. Thermal Sci.* 41 (2002) 961–1016.
- [2] R.C. Lock, The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field, *Proc. Roy. Soc. London A* 233 (1955) 105.
- [3] M.C. Potter, J.A. Kutchey, Stability of plane Hartmann flow subject to a transverse magnetic field, *Phys. Fluids* 16 (1973) 1848–1851.
- [4] M. Takashima, The stability of the modified plane Poiseuille flow in the presence of a transverse magnetic field, *Fluid Dynam. Res.* 14 (1996) 293–310.
- [5] R.J. Lingwood, T. Alboussière, On the stability of the Hartmann layer, *Phys. Fluids* 11 (1999) 2058–2068.
- [6] M. Jédidi, S. Kaddeche, A. Abdennadher, A. Gharbi, D. Henry, H. Ben Hadid, C. R. Mécanique 333 (2005) 447–451.
- [7] R. Moreau, *Magneto hydrodynamics*, Kluwer, Dordrecht/Norwell, MA, 1990.
- [8] F. Fujimura, R.E. Kelly, Interaction between longitudinal convection rolls and transverse waves in unstably stratified plane Poiseuille flow, *Phys. Fluids* 7 (1995) 68–79.