

Nouvelle approche pour la discrétisation de flux diffusifs en volumes finis à forte obliquité

Yves Marcel Ahipo, Philippe Traore *

Université de Poitiers, laboratoire d'études aérodynamiques, boulevard Marie et Pierre Curie,
BP 30179, 86962 Futuroscope, Chasseneuil cedex, France

Reçu le 19 janvier 2006 ; accepté après révision le 28 mars 2006

Disponible sur Internet le 16 mai 2006

Présenté par Marcel Lesieur

Résumé

Nous proposons une nouvelle approche pour la discrétisation des flux diffusifs sur un maillage non orthogonal basé sur la 'Deferred correction' introduite par Peric. Cette nouvelle méthode est appliquée avec succès à la résolution du problème de Poisson dans un domaine en forme de parallélogramme maillé avec des volumes de contrôle à obliquité sévère sans que l'ordre de précision des schémas mis en œuvre ne soit dégradé. L'étude comparative de la valeur du rayon spectral des matrices d'itération nous a permis d'expliquer pourquoi notre approche de *Deferred correction* est meilleure que l'ancienne approche de Peric, qui diverge en présence de forte obliquité. **Pour citer cet article :** *Y.M. Ahipo, Ph. Traore, C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

We propose a new approach for the discretization of diffusive flux on a non orthogonal mesh based on the *Deferred correction* introduced by Peric. This new method is applied successfully to the solution of a Poisson problem in quadrangular domains meshed with very distorted control volumes. The interest of this approach lies in the fact that the precision of the used schemes is conserved despite meshes distortion level. The comparative study of the value of the spectral radius of iteration matrix enables us to explain why our *Deferred correction* approach is better than that of Peric, which diverges on highly skewed meshes. **To cite this article:** *Y.M. Ahipo, Ph. Traore, C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Volumes finis ; Flux diffusif ; Équation de Poisson ; Deferred correction ; Forte obliquité

Keywords: Computational fluid mechanics; Finite volume; Diffusive flux; Poisson equation; Deferred correction; Strong skewness

Abridged English version

In complex geometries, the approximation of diffusive flux is a current problem in finite volume method. A new strategy, based on *Deferred correction* [3] is presented and tested on a Poisson problem.

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : philippe.traore@univ-poitiers.fr (Ph. Traore).

Mathematical formulation: A Poisson problem with Dirichlet boundary conditions can be written as follows:

$$\Delta f = g \quad \text{in } \Omega, \quad f = f_b \quad \text{in } \partial\Omega \tag{1}$$

where g, f_b are given functions. It is common to express (1) in its conservative form in order to use the Green–Ostrogradsky theorem [7]:

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f), \quad \int_{V_P} \nabla \cdot (\nabla f) \, dv = \int_{S_P} (\nabla f) \cdot \vec{n} \, ds = \int_{V_P} g \, dv$$

By using the middle point rule which has a second order precision, the Poisson problem on control volume p can be written in the following form with the notations of Fig. 1:

$$\sum_{k=e,n,o,s} S_k^P (\nabla f)_k^P \cdot \vec{n}_k^P = (g)_P \cdot V_P \tag{2}$$

where V_P is the volume of the control volume p .

The new Deferred correction approach: By using the decomposition of vector \vec{n}_k^P illustrated in Fig. 2:

$$\vec{n}_k^P = \lambda_k^P \vec{\xi}_k^P + \beta_k^P \vec{\tau}_k^P$$

the expression (2) can be written as follows

$$T_{\vec{\xi}}^P(f) = SM_P - T_{\vec{\tau}}^P(f)$$

with

$$T_{\vec{\xi}}^P(f) = \sum_{k=e,n,o,s} \lambda_k^P S_k^P (\nabla f)_k^P \cdot \vec{\xi}_k^P, \quad T_{\vec{\tau}}^P(f) = \sum_{k=e,n,o,s} \beta_k^P S_k^P (\nabla f)_k^P \cdot \vec{\tau}_k^P, \quad SM_P = (g)_P \cdot V_P \tag{3}$$

When we use the *Deferred correction* process at this stage, we have:

$$T_{\vec{\xi}}^P(f^m) = SM_P - T_{\vec{\tau}}^P(f^{m-1})$$

Numerical test: In the case of quadrangular domains, the spectral radius of the matrix $(T_{\vec{\xi}}^P)^{-1} T_{\vec{\tau}}^P$ is always less than 1 for our new *Deferred correction* approach, whereas this spectral radius of the former approach is greater than 1 when the skewness is greater than 40°. Then, our approach represents a convergent and accurate alternative for diffusive flux discretization in any partial differential equation in domains where skewness is strong.

1. Introduction

La forte obliquité des éléments de maillage pose des problèmes de consistance dans la discrétisation des termes de dérivées secondes ou de flux diffusifs. En effet, dans une stratégie de type volumes finis, faire l’approximation de ces flux diffusifs pour une quantité ϕ à travers une surface, revient à trouver une approximation d’une intégrale de type :

$$\int_{S_P} (\nabla \phi) \cdot \vec{n} \, ds \tag{1}$$

Avec S_P désignant la surface entourant le volume de contrôle V_P et \vec{n} la normale à cette surface. En utilisant la règle du point milieu, on peut ramener l’approximation de (1) à l’évaluation, sur chaque face k du volume de contrôle p , de la quantité :

$$S_k^P (\nabla \phi)_k \cdot \vec{n}_k^P \tag{2}$$

où S_k^P et \vec{n}_k^P représentent respectivement la surface de la face k et le vecteur unitaire normale à cette face et ce pour chacune des faces entourant ce volume de contrôle p . Tout le problème revient donc à trouver une discrétisation consistante de $(\nabla \phi)_k \cdot \vec{n}_k^P$.

L’utilisation de maillages admissibles proposés par R. Herbin [1], dans lesquels \vec{n}_k^P est toujours colinéaire au vecteur unitaire $\vec{\xi}_k^P$ joignant les deux nœuds situés de part et d’autre de la face k , offre la possibilité d’utiliser des schémas

simples pour évaluer la quantité $(\nabla\phi)_k \cdot \vec{n}_k^P$. Cependant, dans la pratique, il n'est pas toujours facile de construire des maillages dits admissibles et cette difficulté est renforcée dans le cas de maillages structurés. Dans ses travaux, Y. Coudière [2] s'est intéressé à des maillages beaucoup plus généraux. Il propose une approche voisine dans l'écriture de celle que nous proposons. Contrairement à nous, il propose une formulation faisant intervenir non seulement les centres des volumes de contrôle mais aussi les sommets de ces volumes. L'introduction de variables supplémentaires, présente une difficulté dont nous souhaitons nous affranchir car, elle nécessite à son tour des interpolations supplémentaires qui accroissent les temps de calculs tout en générant des imprécisions additionnelles.

Voilà pourquoi l'idée introduite par Peric [3] nous a paru intéressante. Cet auteur propose de traiter le problème de l'évaluation de (2) au moyen d'un schéma itératif appelé '*Deferred correction*'. Il introduit un processus itératif m qui doit converger vers l'expression de $(\nabla\phi)_k \cdot \vec{n}_k^P$:

$$(\nabla\phi)_k^m \cdot \vec{n}_k^P \rightarrow (\nabla\phi)_k \cdot \vec{n}_k^P, \quad m \rightarrow \infty \quad (3)$$

Dans la littérature, il n'existe aucun résultat de convergence de la *Deferred correction* proposé par [3]. De plus certains auteurs [4] ont suggéré certaines restrictions à l'utilisation de la *Deferred correction*, notamment la condition d'avoir des maillages avec une faible obliquité. Toutes ces raisons expliquent notre intérêt à formuler une nouvelle approche de la *Deferred correction*.

La confrontation de l'ancienne et de la nouvelle approche de la *Deferred correction* au problème de Poisson a deux sources de motivation. La première est que ce problème présente l'avantage d'avoir des solutions analytiques très faciles à déterminer par construction et donc ainsi d'envisager une étude numérique sur l'ordre ou sur la dégradation supposée ou réelle de l'ordre en fonction de certains paramètres du problème dont notamment l'obliquité des mailles. La seconde source de motivation provient du fait que cette équation de Poisson est présente dans de nombreux problèmes de physique. En ce qui nous concerne, pour la résolution des équations de Navier–Stokes en écoulements incompressibles, nous utilisons la méthode de projection [5,6] pour le couplage vitesse/pression, ce qui nous conduit inévitablement à résoudre un problème de Poisson sur la pression. Le problème est donc d'actualité pour la résolution des équations de Navier–Stokes sur des maillages non orthogonaux en géométries complexes.

L'objectif de notre étude est donc de proposer une nouvelle version de la *Deferred correction* plus efficace sur des maillages à obliquité sévère et dont la convergence s'appuie sur des éléments théoriques.

2. Formulation mathématique

L'équation de Poisson avec conditions de Dirichlet dans un domaine Ω s'écrit :

$$\Delta f = g \quad \text{dans } \Omega \quad (4)$$

$$f = f_b \quad \text{dans } \partial\Omega \quad (5)$$

g, f_b sont des fonctions données.

Il est commun d'exprimer (4) sous sa forme conservative afin de pouvoir appliquer le théorème de Green–Ostrogradky [7].

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f)$$

$$\int_{V_P} \nabla \cdot (\nabla f) \, dv = \int_{S_P} (\nabla f) \cdot \vec{n} \, ds = \int_{V_P} g \, dv$$

En utilisant ensuite la règle du point milieu précise à l'ordre 2, le problème de Poisson sur un volume de contrôle p donné, peut s'écrire sous la forme suivante avec les notations de la Fig. 1 :

$$\sum_{k=e,n,o,s} S_k^P (\nabla f)_k^P \cdot \vec{n}_k^P = (g)_P \cdot V_P \quad (6)$$

V_P désigne le volume du *volume de contrôle* p .

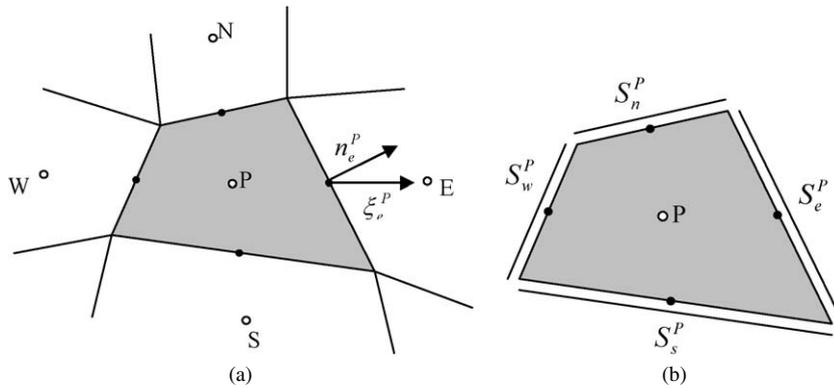


Fig. 1. Illustration des notations utilisées. (a) Le volume de contrôle \$p\$ et ses voisins, (b) notations utilisées pour les surfaces entourant le volume de contrôle \$p\$.

2.1. Ancienne approche de deferred correction

La *Deferred correction* proposée par [3] consiste à introduire un processus itératif, caractérisé par les itérations \$m\$, dont la formulation est la suivante :

$$\sum_{k=e,n,o,s} S_k^P (\nabla f)_k^m \cdot \vec{\xi}_k^P = (g)_P \cdot V_P - \sum_{k=e,n,o,s} S_k^P (\nabla f)_k^{m-1} \cdot (\vec{n}_k^P - \vec{\xi}_k^P) \quad (7)$$

Le membre de gauche de l'expression (7) peut être approché facilement par une formule centrée d'où le choix du vecteur \$\vec{\xi}_k^P\$. Quant au deuxième terme du membre de droite, il peut être calculé explicitement, vu que justement il ne dépend que de l'itération précédente, au moyen d'une formule de quadrature pour le gradient :

$$(\nabla f)_P^j \approx \frac{\sum_{k=e,n,o,s} S_k^P f_k \vec{n}_k^P \cdot \vec{i}_j}{V_P} \quad (8)$$

\$\vec{i}_j\$ désignant le vecteur unitaire de la \$j\$ème direction des coordonnées cartésiennes.

2.2. Nouvelle approche de deferred correction

La clé de cette nouvelle approche repose sur la décomposition de \$\vec{n}_k^P\$ que nous faisons de la façon suivante :

$$\vec{n}_k^P = \lambda_k^P \vec{\xi}_k^P + \beta_k^P \vec{\tau}_k^P \quad (\text{Fig. 2}) \quad (9)$$

avec

$$\lambda_k^P = \frac{1}{\cos(\theta_k^P)}, \quad \beta_k^P = \tan(\theta_k^P), \quad \theta_k^P = (\vec{n}_k^P, \vec{\xi}_k^P)$$

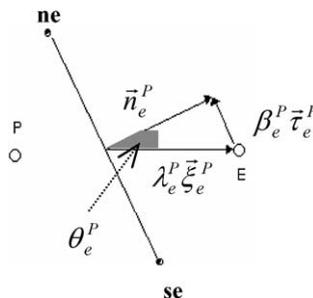


Fig. 2. Décomposition de la normale à la face \$e\$, \$\vec{n}_e^P\$ en deux vecteurs.

L'expression (6) devient donc :

$$\sum_{k=e,n,o,s} \lambda_k^P S_k^P (\nabla f)_k \cdot \vec{\xi}_k^P = (g)_P \cdot V_P - \sum_{k=e,n,o,s} \beta_k^P S_k^P (\nabla f)_k \cdot \vec{\tau}_k^P \quad (10)$$

ou encore

$$\sum_{k=e,n,o,s} \lambda_k^P S_k^P (\nabla f)_k \cdot \vec{\xi}_k^P = (g)_P \cdot V_P - \sum_{k=e,n,o,s} S_k^P (\nabla f)_k \cdot (\vec{n}_k^P - \lambda_K^P \vec{\xi}_k^P) \quad (11)$$

Dans la suite des développements il sera plus simple de ramener (11) sous l'écriture réduite :

$$T_{\vec{\xi}}^P(f) = SM_P - T_{\vec{\tau}}^P(f) \quad (12)$$

avec

$$T_{\vec{\xi}}^P(f) = \sum_{k=e,n,o,s} \lambda_k^P S_k^P (\nabla f)_k \cdot \vec{\xi}_k^P, \quad T_{\vec{\tau}}^P(f) = \sum_{k=e,n,o,s} \beta_k^P S_k^P (\nabla f)_k \cdot \vec{\tau}_k^P, \quad SM_P = (g)_P \cdot V_P$$

Introduisons à ce stade le processus de *Deferred correction* :

$$T_{\vec{\xi}}^P(f^m) = SM_P - T_{\vec{\tau}}^P(f^{m-1}) \quad (13)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=e,n,o,s} \lambda_k^P S_k^P (\nabla f)_k \cdot \vec{\xi}_k^P = (g)_P \cdot V_P - \sum_{k=e,n,o,s} S_k^P (\nabla f)_k^{m-1} \cdot (\vec{n}_k^P - \lambda_K^P \vec{\xi}_k^P) \quad (14)$$

Dans le cas de maillage avec de faibles obliquités, c'est-à-dire :

$$\theta_k^P \approx 0, \quad \text{on a donc } \lambda_k^P \approx 1, \quad \forall k, \forall P \quad (15)$$

En utilisant (15) dans (14) on retrouve l'ancienne formulation (7).

Dans toute la suite nous désignerons par $T_{\vec{\xi}}^P$ et $T_{\vec{\tau}}^P$ les opérateurs dérivant de l'utilisation $T_{\vec{\xi}}^P$ et $T_{\vec{\tau}}^P$ respectivement sur l'ensemble de tous les volumes de contrôle.

2.3. Explicitation des opérateurs $T_{\vec{\xi}}^P$ et $T_{\vec{\tau}}^P$

La détermination des opérateurs $T_{\vec{\xi}}^P$ et $T_{\vec{\tau}}^P$ passe par l'approximation de $T_{\vec{\xi}}^P$ et $T_{\vec{\tau}}^P$ respectivement. Avec l'utilisation d'une discrétisation centrée pour les dérivées premières, $T_{\vec{\xi}}^P(f)$ s'exprime alors de la manière suivante :

$$T_{\vec{\xi}}^P(f) = \left[\frac{\lambda_e^P S_e^P}{d(P, E)} (f_E - f_P) + \frac{\lambda_n^P S_n^P}{d(P, N)} (f_E - f_N) + \frac{\lambda_w^P S_w^P}{d(P, W)} (f_W - f_P) + \frac{\lambda_s^P S_s^P}{d(P, S)} (f_S - f_P) \right] \quad (16)$$

L'explicitation de $T_{\vec{\tau}}^P$ repose sur l'utilisation de la formule de quadrature (8) pour le gradient et aussi par une interpolation linéaire entre gradients de deux volumes de contrôle voisins :

$$T_{\vec{\tau}}^P(f) = \sum_{k=e,n,o,s} \beta_k^P S_k^P [(1 - \alpha_K^P) (\nabla f)_P^P + \alpha_K^P (\nabla f)_K^P] \cdot \vec{\tau}_k^P \quad (17)$$

α_K^P représentant le coefficient d'interpolation linéaire entre les deux nœuds voisins P et K .

Condition de convergence : Soit A égale $(T_{\vec{\xi}}^P)^{-1} T_{\vec{\tau}}^P$, la matrice d'itération correspondant au processus (13). Ce processus converge si et seulement si $\rho(A) < 1$ où $\rho(A)$ représente le rayon spectral de la matrice A .

3. Tests numériques

Nous avons considéré un domaine en forme de parallélogramme que nous allons successivement déformer en accroissant l'angle θ de 11° à 76° (Fig. 3).

L'équation de Poisson :

$$\Delta f = 6x + 2 \quad \text{dans } \Omega$$

$$f = x^3 + y^2 + xy \quad \text{sur } \partial\Omega$$

possédant la solution exacte $f = x^3 + y^2 + xy$, est résolue sur différents domaines obtenus en faisant varier l'angle θ . Pour chacune des deux méthodes mises en jeu, nous vérifions si le critère de convergence $\rho(A) < 1$ est satisfait, en calculons le rayon spectral des matrices d'itération grâce à Matlab. Cela nous permet de faire une étude comparative de la convergence des deux méthodes et donc d'étudier leur sensibilité relative à l'obliquité du maillage défini par θ .

Dans le cas particulier résolu, pour estimer l'influence de l'obliquité sur l'ordre de la solution, nous traçons l'évolution du rapport T , défini dans ce qui suit, en fonction de la déformation :

$$T = \frac{\ln(err1/err2)}{\ln 2}$$

où $err1$ et $err2$ désignent les erreurs commises pour des maillages 40×40 et 80×80 respectivement.

En examinant la Fig. 4 nous observons que, le rayon spectral de la matrice d'itération de la méthode de Peric est supérieur à 1 quand θ se rapproche de 40° , et il continue de croître quand θ dépasse 40° . La matrice d'itération de notre

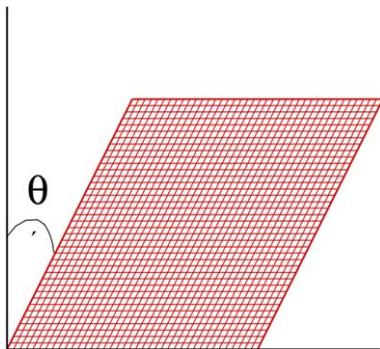


Fig. 3. Angle θ représentant le paramètre de déformation du domaine considéré.

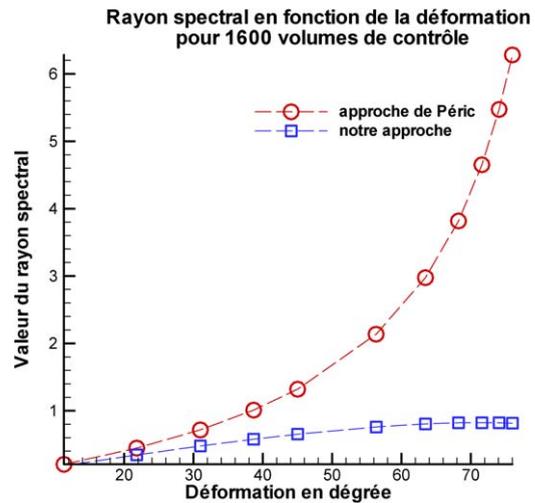


Fig. 4. Etude comparative de la valeur du rayon spectral.

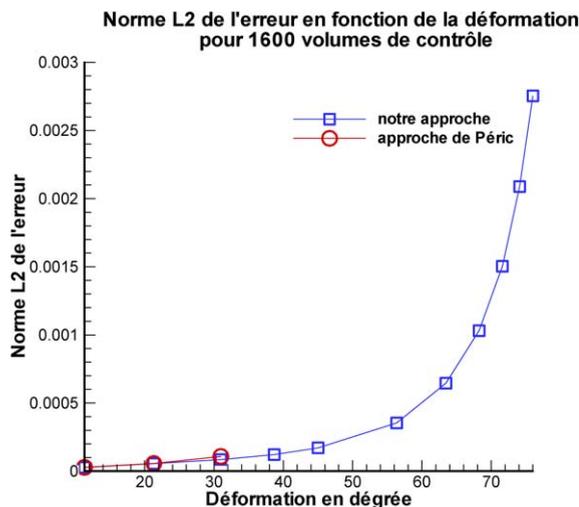


Fig. 5. Variation de la norme L2 de l'erreur.

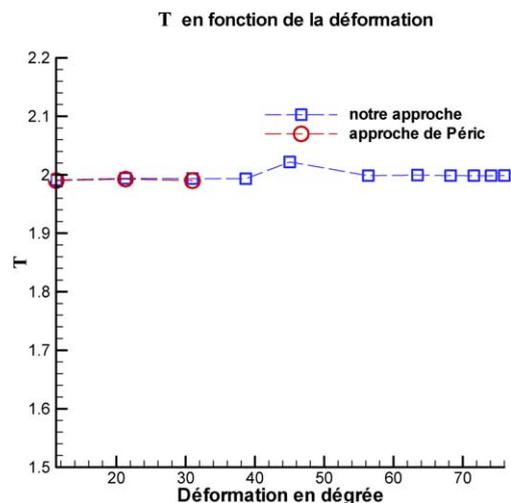


Fig. 6. Variation de T en fonction de la déformation.

approche, par contre, a un rayon spectral toujours inférieur à 1 quelque soit la déformation considérée. En conclusion, notre approche convergera quelque soit la déformation considérée alors que la méthode de Peric ne convergera que pour des déformations inférieure à 40° . C'est ce que l'on constate au niveau de la Fig. 5. En effet dans cette figure, on voit qu'à partir de 38° seule notre approche converge et fournit des solutions avec une erreur satisfaisante. La Fig. 6 nous révèle que, pour θ inférieur à 40° , les solutions obtenues par chacune des deux méthodes sont bien d'un ordre 2. Au delà de 40° , cet ordre 2 se conserve, dans le cas de notre approche alors que l'ancienne approche diverge.

4. Conclusion

Une analyse basée sur la détermination de la valeur du rayon spectral de la matrice d'itération est présentée pour la première fois. D'une part, elle permet de comprendre la convergence de la *Deferred correction* dans certains cas. D'autre part, pour les cas que nous avons considérés, elle justifie la supériorité de notre méthode sur celle de Peric à travers la possibilité de traiter des obliquités sévères supérieures à 45° alors que l'approche de Peric diverge dans ces cas. De plus, sur l'exemple que nous avons considéré, nous avons constaté que l'ordre de précision théorique des schémas n'était pas dégradé par l'augmentation de l'obliquité.

Ainsi les défauts de précision parfois observés sur des maillages non structurés, à base de triangles notamment, ne peuvent être imputés à la nature topologique des volumes de contrôle mais plutôt à la façon dont les opérateurs sont approchés sur ces volumes de contrôle.

La nouvelle approche que nous avons présentée est intéressante dans le sens où elle nous évite d'avoir recours, en géométries complexes, à des maillages admissibles [1] ou à toutes autres stratégies de maillage concurrentes [8] difficiles à réaliser. En ce qui nous concerne, cette étude nous a permis d'obtenir une meilleure discrétisation du problème de Poisson intervenant dans l'algorithme de projection pour la résolution des équations de Navier–Stokes en géométries complexes.

Références

- [1] R. Eymard, R. Herbin, A cell-centered finite volume scheme on general meshes for Stokes equations in two spaces dimensions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337 (2003) 125–128.
- [2] Y. Coudière, J.P. Vila, P. Villedieu, Convergence rate of a finite volume scheme for a two dimensional convection–diffusion, 2000, in preparation.
- [3] J.H. Ferziger, M. Peric, Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin/New York, 2002.
- [4] S. Muzaferija, Adaptative finite volume method for flow prediction using unstructured meshes and multigrid approach, PhD thesis, 1994.
- [5] J.L. Guermond, J. Shen, Quelques résultats nouveaux sur les méthodes de projection, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001) 1111–1116.
- [6] M. Fortin, R. Peyret, R. Temam, Résolution numérique des équations de Navier–Stokes pour un fluide incompressible, J. Mécanique 10 (1971) 3.
- [7] S.V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing, 1980.
- [8] P. McCorquodale, Ph. Colella, D.P. Grote, J.L. Vay, A node-centered local refinement algorithm for Poisson's equation in complex geometries, J. Comput. Phys. 201 (2004) 34–60.