

## Simulation numérique des détonations à double structure cellulaire

Vianney Guilly\*, Boris Khasainov, Henri-Noël Presles, Daniel Desbordes

*Laboratoire de combustion et de détonique, UPR 9028 CNRS, ENSMA, BP 40109, 86961 Futuroscope, France*

Reçu le 26 septembre 2005 ; accepté après révision le 2 mai 2006

Présenté par Sébastien Candel

---

### Résumé

Nous présentons les résultats de simulations numériques bidimensionnelles de structures cellulaires de détonations dans le cas où l'énergie chimique est libérée de manière non-monotone, selon un modèle simple comprenant deux étapes exothermiques successives. L'influence du taux de réaction chimique de la deuxième étape sur la structure cellulaire de détonation a été étudiée. Nos simulations sont les premières à reproduire une structure cellulaire de détonation constituée de deux réseaux de cellules de tailles très différentes où de petites cellules remplissent entièrement les plus grandes comme cela a été observé expérimentalement.

*Pour citer cet article : V. Guilly et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Numerical simulation of detonations with double cellular structure.** We present the results of numerical two-dimensional simulations of detonation cellular structures under non-monotonous heat release provided by a chemical reaction comprising two successive exothermic steps. The influence of the rate of the second step of chemical reaction on the detonation cellular structure has been investigated. Our simulations are the first that reproduce a cellular structure composed of two clearly distinct sets of cells with different characteristic sizes where fine cells completely fill up larger ones, as has been observed experimentally. *To cite this article: V. Guilly et al., C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Milieux réactifs ; Détonation ; Structure cellulaire

*Keywords:* Reactive media; Detonation; Cellular structure

---

### Abridged English version

Presles et al. [1] observed a detonation cellular structure composed of two sets of cells with different characteristic sizes (a secondary structure being contained in the main one) in pure gaseous nitromethane and nitromethane–oxygen mixtures. Joubert et al. [2] made similar observations in mixtures where  $\text{NO}_2/\text{N}_2\text{O}_4$  was the oxidizer, the fuel being

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [guilly@lcd.ensma.fr](mailto:guilly@lcd.ensma.fr) (V. Guilly).

$H_2$ ,  $CH_4$  or  $C_2H_6$  (Fig. 1—in all figures, detonation propagates from left to right). Lamoureux et al. [3] numerically studied the detonation reaction zone in these mixtures in the framework of the steady 1D ZND model using a detailed scheme for the chemical kinetics. Comparing their results with experiments, they showed that two level-cell structures most likely exist when the chemical energy is released in two steps of very different characteristic times. Moreover, Desbordes et al. [4] recently observed low velocity detonation regimes in lean  $H_2$ - $NO_2/N_2O_4$  mixtures only supported by the chemical energy of the first exothermic step.

In this Note, we present a two-dimensional unsteady numerical study of detonation cellular structure under non-monotonous heat release provided by a chemical reaction comprising two successive exothermic steps:  $A \rightarrow B \rightarrow C$ . Considering here that the same amount of energy is released by each reaction we varied the second reaction kinetics. Three kinds of numerical cellular structures were then obtained:

- if the second reaction is very fast, the detonation cell pattern is controlled by the first reaction and is similar to that observed with monotonous heat release (Fig. 3);
- if the second reaction is very slow, all its energy does not support the detonation until it has run over a long distance. Consequently, the detonation characteristic velocity and pressure are significantly lower than in the previous case. The detonation comprises quite large cells along with nearly 10 times smaller ones filling the beginning of larger cells (Fig. 4). This fine cell structure could be of the type explained by Manzhalei [5];
- for an intermediate second reaction rate, one can clearly see (Figs. 5 and 6) that there are two distinct detonation cell structures. In agreement with experimental observations, large cells are entirely filled with smaller ones and the size of the finer cells increases within the large ones in the direction of detonation propagation.

## 1. Introduction

Presles et al. [1] ont observé expérimentalement que la détonation du nitrométhane (NM) ainsi que des mélanges  $NM-O_2$  présente—sur un certain domaine de richesse—un double réseau de cellules de tailles très différentes. Dans des études ultérieures, Joubert et al. [2] ont mis en évidence l'existence de structures similaires dans des mélanges avec pour oxydant  $NO_2/N_2O_4$  et pour combustible  $H_2$ ,  $CH_4$  ou  $C_2H_6$ . La Fig. 1 illustre ce double réseau cellulaire où chaque grande cellule contient des cellules de tailles caractéristiques beaucoup plus petites (sur toutes les figures, la détonation se propage de la gauche vers la droite). Les calculs stationnaires de la zone de réaction de détonation menés par Lamoureux et al. [3] au moyen d'un schéma détaillé de cinétique chimique confortent l'hypothèse [1] selon laquelle le double réseau apparaît comme conséquence d'une libération d'énergie en deux étapes exothermiques successives associées à deux longueurs d'induction chimique différant d'au moins un ordre de grandeur.

Par ailleurs, Desbordes et al. [4] ont récemment observé des détonations basse-vitesse dans des mélanges  $H_2-NO_2/N_2O_4$  pauvres. Pour une richesse  $\phi = 0,3$  et un tube à détonation de diamètre intérieur 52 mm, la célérité de la détonation autonome et stationnaire est inférieure d'environ 20% à celle prévue par la théorie Chapman–Jouguet, et la pression est corrélativement de 40% inférieure à  $P_{CJ}$ . De plus, la taille caractéristique de la structure cellulaire de ce régime de détonation est beaucoup plus grande (environ 1 ordre de grandeur) que celle de la détonation quasi-CJ

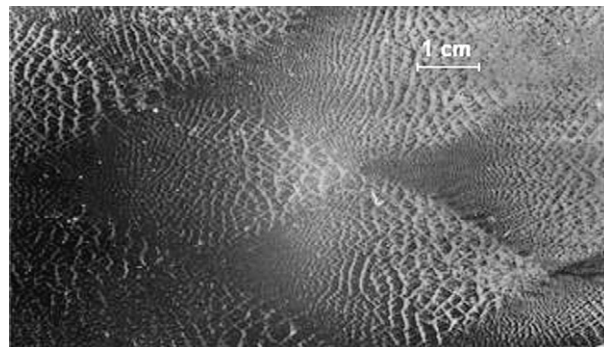


Fig. 1. Enregistrement de la double structure cellulaire de la détonation du mélange  $H_2 + 0,25(NO_2/N_2O_4)$ .

Fig. 1. Soot traces record of the double cellular structure in the detonation of  $H_2 + 0.25(NO_2/N_2O_4)$  mixture.

du même mélange. Ils expliquent ces résultats par le fait que la détonation n'est plus entretenue que par l'énergie libérée par la première réaction exothermique. Tous ces travaux ont clairement défini l'oxydant  $\text{NO}_2$ —mélangé avec un combustible ou inclus dans une molécule réactive (monergol)—comme étant à l'origine de la double structure.

La simulation numérique de détonations à libération d'énergie non monotone présente de grandes difficultés liées au caractère multi-échelles des processus associés. Gamezo et al. [6] sont parvenus à reproduire numériquement en géométrie bidimensionnelle trois niveaux de cellules de détonation de taille très différentes dans les supernovae de type Ia, à partir de simulations prenant en compte de multiples réactions thermonucléaires. Cependant, leur étude négligeait l'interaction de ces trois structures et ne permettait donc pas leur observation simultanée.

Des études analytiques et numériques des modes linéaires gouvernant les instabilités dans les détonations gazeuses ont également été menées. Daou et Clavin [7] en particulier se sont intéressés au cas d'une libération d'énergie classique monotone comprenant une zone d'induction et une zone de libération d'énergie en une étape : ils ont montré la possibilité de l'existence d'une double structure cellulaire lorsque la durée du dégagement de l'énergie est significativement plus courte que le temps d'induction, ou lorsque le taux de libération d'énergie dépasse une certaine valeur.

L'objet de cette Note est de montrer nos résultats de modélisation bidimensionnelle instationnaire de détonation dans le cas où l'énergie chimique est libérée en deux étapes exothermiques successives, ce qui correspond à une libération d'énergie non monotone.

## 2. Influence de la cinétique chimique sur la structure cellulaire de détonation

Nos simulations numériques bidimensionnelles de détonation se propageant dans une conduite plane ont été effectuées en résolvant les équations d'Euler avec la technique Flux Corrected Transport (FCT) développée par Oran et Boris [8] en utilisant la procédure d'adaptation du maillage décrite par Khasainov et al. [9]. Le domaine de calcul est de  $2000 \times 800$  mailles, lesquelles ont une dimension minimale de  $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = 5 \times 10^{-5}$  m. Le maillage reste uniforme et de dimension minimale sur une distance de 5 cm suivant le front de détonation (1000 mailles), ce qui permet de modéliser correctement toute la zone subsonique. Derrière cette zone uniforme, la dimension longitudinale  $\Delta x$  augmente progressivement. Le nombre de Courant maximum est fixé à 0,4.

Pour simuler le caractère non monotone de la libération d'énergie, nous avons admis qu'elle s'effectuait en deux étapes exothermiques successives  $A \rightarrow B \rightarrow C$  de temps caractéristiques très différents induisant un profil de température ayant l'allure du schéma de la Fig. 2. La température augmente de  $T_{\text{ZND}}$  juste après le choc à  $T_{1/2}$  au cours de la première étape (l'indice 1/2 se réfère aux conditions de fin de la première étape), puis de  $T_{1/2}$  à  $T_{\text{CJ}}$  au cours de la seconde. Le taux de réaction de chaque étape est modélisé par une loi d'Arrhenius  $K_i = Z_i \rho^{n_i} \exp(-\frac{E_i}{RT})$  avec  $i = 1, 2$ , où  $Z_i$  est le facteur préexponentiel,  $\rho$  la masse volumique,  $n_i$  l'ordre de la réaction et  $E_i$  l'énergie d'activation. Dans toute l'étude présentée ici, nous n'avons cependant fait varier que le paramètre  $Z_2$ . Les paramètres  $n_i$  et  $E_i$  sont maintenus constant et leurs valeurs sont de plus identiques pour les deux réactions :  $n_1 = n_2 = 1$  et  $E_1 = E_2 = 250 \text{ kJ mol}^{-1}$ . On fait l'hypothèse simplificatrice que capacité calorifique et masse molaire ne varient

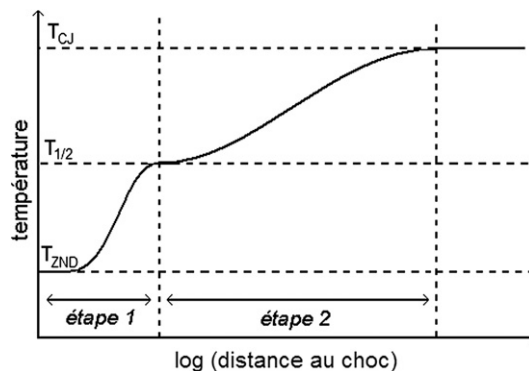


Fig. 2. Schéma du profil de température dans le zone de réaction dans les conditions de notre modèle.

Fig. 2. Sketch of temperature profile within the reaction zone in the frame of our model.

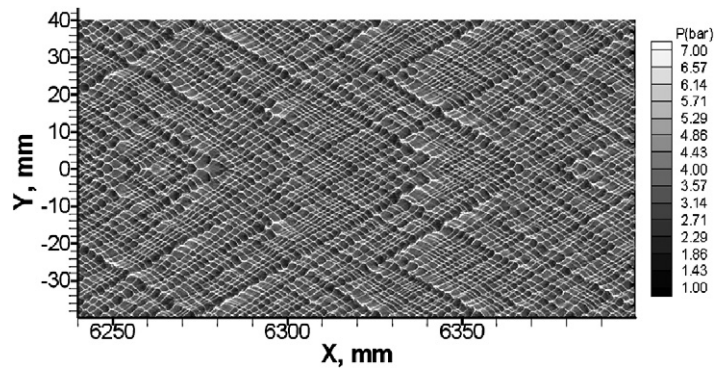


Fig. 3. Simulation numérique de la structure cellulaire dans le cas d'une seconde réaction rapide :  $Z_2 = 7,5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Fig. 3. Numerical registration of the cellular structure in the case of fast second reaction:  $Z_2 = 7,5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

pas durant tout le processus et valent respectivement  $C_v = 1097,6 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$  et  $M = 30,3 \text{ g mol}^{-1}$ . Les conditions thermodynamiques initiales sont :  $T_0 = 293 \text{ K}$  et  $P_0 = 0,05 \text{ bar}$ . Dans ces conditions, célérité de détonation Chapman–Jouguet est  $D_{CJ} = 2271 \text{ m s}^{-1}$ .

Nous considérons dans cette première étude que les deux réactions  $A \rightarrow B$  et  $B \rightarrow C$  libèrent la même quantité d'énergie. En effet, les doubles structures cellulaires observées expérimentalement par les auteurs précités correspondent à la détonation de mélanges pour lesquels l'énergie est répartie en proportions comparables entre les deux étapes réactionnelles exothermiques [3]. Nous fixons la cinétique de la première réaction ( $Z_1 = 4,5 \times 10^{11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ) et faisons varier celle de la seconde. Trois types de structures cellulaires de détonation apparaissent en fonction de la valeur attribuée à  $Z_2$ . Pour déterminer les longueurs d'inductions (distance séparant le choc du maximum de libération d'énergie) pour chaque réaction, des calculs monodimensionnels stationnaires de la zone de réaction ont également été menés.

Pour les grandes valeurs de  $Z_2$  (deuxième réaction très rapide), la structure cellulaire calculée est composée d'un seul réseau de cellules de petites tailles comme le montre la Fig. 3 ( $Z_2 = 7,5 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ ). La taille caractéristique  $\lambda_1$  des cellules est d'environ 2 mm. Dans ces conditions, la deuxième étape est très rapide et, si la totalité de l'énergie supporte la détonation, le résultat obtenu est comparable à celui observé dans le cas où l'énergie chimique est libérée de manière monotone en une seule étape. Le résultat de la Fig. 3 correspond à  $L_i = 5,5 \times 10^{-4} \text{ m}$  ( $L_i \approx 11 \Delta x_{\text{min}}$ ). La célérité de détonation calculée est proche de la valeur théorique Chapman–Jouguet  $D_{CJ} = 2271 \text{ m s}^{-1}$  ( $P_{CJ} = 1,42 \text{ bar}$ ). La structure cellulaire est irrégulière, ce qui est le cas des détonations pour lesquelles l'énergie d'activation réduite est telle que  $E/RT_{\text{choc}} > 6$  (critère de Manzhalei [5]). Dans ce cas de calcul,  $E/RT_{\text{choc}} \approx 14$ .

Au contraire, pour une valeur de  $Z_2$  très petite, la seconde réaction est lente ( $K_2/K_1 \ll 1$ ) et la détonation doit se propager sur une grande distance pour que toute l'énergie chimique soit libérée. Ainsi, la détonation transite progressivement d'un régime pour lequel la chaleur de réaction libérée correspond à celle contenue dans la première étape ( $D_{1/2} = 1606 \text{ m s}^{-1}$ ) vers le régime stationnaire idéal Chapman–Jouguet où l'énergie relative aux deux réactions est entièrement libérée ( $D_{CJ} = 2271 \text{ m s}^{-1}$ ). Ce phénomène de transition de régime est similaire à celui décrit dans les mélanges contenant une suspension de particules d'aluminium [10]. La Fig. 4, présente un résultat correspondant à  $Z_2 = 3,0 \times 10^5 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$  à une distance pour laquelle  $D \approx 1635 \text{ m s}^{-1}$ . A cet instant, on a bien  $D_{1/2} < D < D_{CJ}$  et seule une faible partie de l'énergie contenue dans la deuxième étape est libérée et contribue à la propagation de la détonation. Ainsi, la structure que l'on observe sur la Fig. 4 ne correspond qu'à la première étape, mais pour une célérité de détonation significativement inférieure à  $D_{CJ}$ . La pression moyenne est de plus visiblement plus faible que dans le cas précédent et ainsi la Fig. 4 est plus sombre que la Fig. 3 (l'échelle est identique pour les Figs. 3 à 6). Cette situation est comparable au cas des détonations basse-vitesses observées expérimentalement [4] où l'essentiel de l'énergie contenue dans la seconde réaction est perdue aux parois. Néanmoins, notre modèle ne considérant aucun phénomène de perte, la détonation atteindra inéluctablement l'état CJ après la période de transition.

Dans ces conditions, la structure de la détonation (Fig. 4) est constituée de cellules de taille caractéristique d'environ 40 mm, de même origine que celles obtenues dans le calcul précédent, mais beaucoup plus grandes. Certaines grandes cellules contiennent en leur début un sous réseau de cellules d'un ordre de grandeur plus petit.

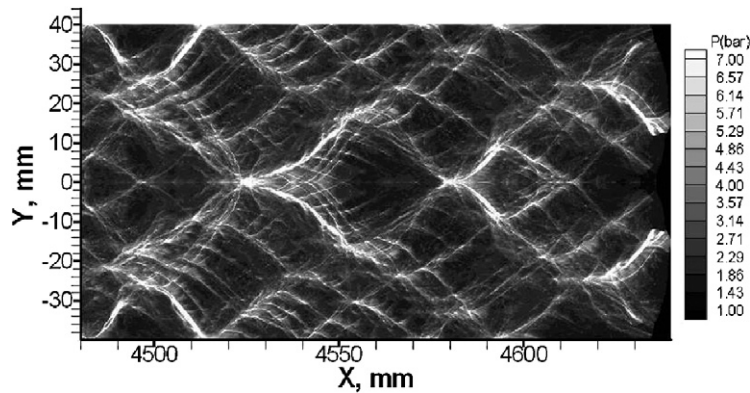


Fig. 4. Enregistrement numérique de la structure cellulaire dans le cas d'une seconde réaction lente :  $Z_2 = 3,0 \times 10^5 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Fig. 4. Numerical registration of the cellular structure in the case of slow second reaction:  $Z_2 = 3,0 \times 10^5 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

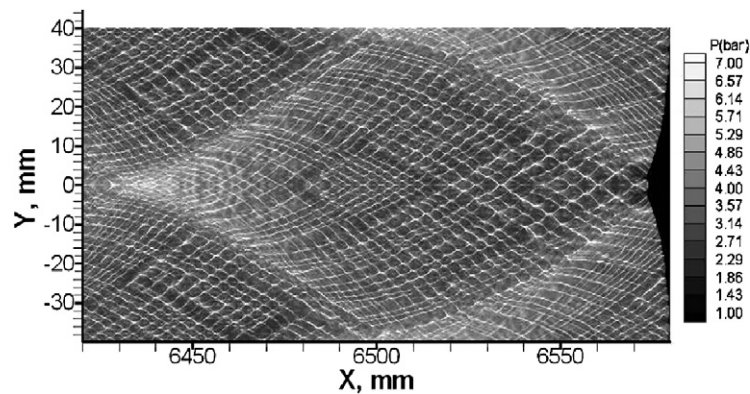


Fig. 5. Enregistrement numérique d'une double structure cellulaire :  $Z_2 = 3,0 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Fig. 5. Numerical registration of a double cellular structure:  $Z_2 = 3,0 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

Ce phénomène—clairement visible en  $X = 4490 \text{ mm}$  et  $X = 4530 \text{ mm}$ —n'est pas une conséquence du caractère non monotone de la libération d'énergie. En effet, une telle structure est couramment observée dans les mélanges combustible-oxygène dont l'énergie d'activation respecte le critère de Manzhalei précité. Dans ce cas de calcul,  $E_1/RT_{\text{choc}} \approx 24$ . Si la sous structure n'apparaît pas à la Fig. 3, on peut supposer que c'est en raison du maillage qui n'est pas assez fin. Ainsi, il semble que le modèle comprenant deux réactions exothermiques successives puisse être utile pour interpréter les détonations basse-vitesse observées dans les gaz.

Finalement, la Fig. 5 est le résultat d'un calcul mené avec une valeur de  $Z_2$  intermédiaire :  $Z_2 = 3,0 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Dans ces conditions, les deux étapes exothermiques peuvent être associées à deux longueurs d'inductions correspondant à deux maxima successifs du taux de libération d'énergie :  $L_{i,1} = 5,3 \times 10^{-4} \text{ m}$  pour la première étape et  $L_{i,2} = 6,0 \times 10^{-3} \text{ m}$  pour la seconde. On a  $L_{i,1}/L_{i,2} \approx 0,1$ , ce qui correspond approximativement au rapport

$$K_2/K_1 = (Z_2/Z_1) \times (\rho_{1/2}/\rho_{\text{ZND}}) \times \exp[E/R \times (1/T_{\text{ZND}} - 1/T_{1/2})]$$

Quand le régime autonome et stationnaire est atteint ( $D$  proche de  $D_{\text{CJ}}$ ), on observe distinctement deux réseaux de cellules de tailles différentes : de grandes cellules de taille caractéristique  $\lambda_2 = 80 \text{ mm}$  contiennent des cellules beaucoup plus petites ( $\lambda_1$  de l'ordre de quelques mm). On constate qu'au milieu des grandes cellules—où  $D \approx D_{\text{CJ}}$ —on a  $\lambda_1/\lambda_2 \approx 0,05$ , ce qui est proche du rapport des longueurs d'inductions  $L_{i,1}/L_{i,2} \approx 0,1$ . Contrairement au cas de la Fig. 4, les petites cellules remplissent entièrement chaque grande. Conformément aux résultats obtenus expérimentalement,  $\lambda_1$  croît au sein des grandes structures suivant le sens de propagation de la détonation. Au début des grandes cellules, les calculs donnent cependant un réseau secondaire où  $\lambda_1$  est supérieure aux valeurs observées

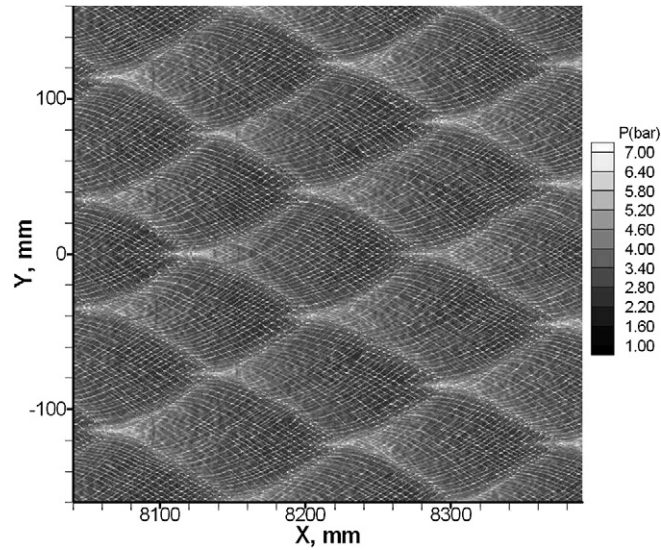


Fig. 6. Enregistrement numérique d'une double structure cellulaire :  $Z_2 = 3,0 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$  et  $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = 10^{-4} \text{ m}$ .

Fig. 6. Numerical registration of a double cellular structure:  $Z_2 = 3.0 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$  and  $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = 10^{-4} \text{ m}$ .

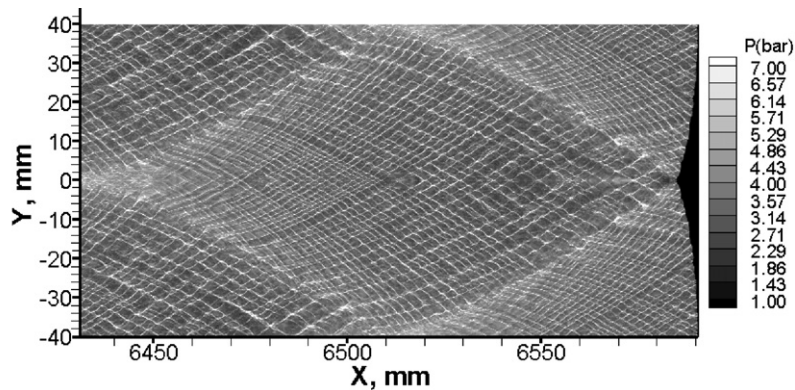


Fig. 7. Enregistrement numérique d'une double structure cellulaire :  $Z_2 = 3,0 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$  et  $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = 3,75 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

Fig. 7. Numerical registration of a double cellular structure:  $Z_2 = 3.0 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-1}$  and  $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = 3.75 \times 10^{-5} \text{ m}$ .

expérimentalement (Fig. 1). Cela est dû au fait que le maillage utilisé ne permet pas de rendre compte des échelles trop petites. En effet, la détonation est localement forte au début de chaque grande cellule, ce qui implique une importante diminution de  $L_{i,1}$ . La Fig. 6 correspond à la même cinétique mais avec une maille numérique deux fois plus grande ( $\Delta x_{\min} = \Delta y_{\min} = 10^{-4} \text{ m}$ ), ce qui a permis de mener le calcul dans un canal plus large : 160 mm (1600 mailles selon  $y$ ) au lieu de 40 mm. On remarque également que la taille des grandes cellules sont assez régulière, bien que  $E_a/RT_{1/2} \approx 8$ . Dans la seconde moitié des grandes cellules,  $\lambda_1$  ne semble pas affecté par le changement de résolution numérique par rapport au cas de la Fig. 5. En revanche, dans leurs premières moitiés, la résolution numérique n'est pas suffisante pour rendre compte des plus petites structures et l'augmentation de  $\lambda_1$  en leurs seins est moins manifeste. Des calculs présentés sur la Fig. 7 ont été menés avec un maillage 50% plus fin que celui de la Fig. 5 ( $\Delta x_{\min} = \Delta y = 3,75 \times 10^{-5} \text{ m}$ ) : le résultat est comparable aux précédents, mais  $\lambda_1$  semble légèrement inférieur.

Malgré la difficulté de modélisation des plus petites cellules, les calculs montrent sans ambiguïté qu'une détonation à deux niveaux de structure cellulaire liée à une libération d'énergie non-monotone produite par deux réactions successives peut être reproduite numériquement.

### 3. Conclusions

Nos simulations numériques menées dans le cas d'une libération d'énergie non-monotone (2 étapes exothermiques successives) sont parvenues à reproduire qualitativement les résultats expérimentaux relatifs à la structure cellulaire de détonation du nitrométhane gazeux et des mélanges Combustible- $\text{NO}_2/\text{N}_2\text{O}_4$ .

L'influence de la cinétique de la deuxième étape réactionnelle sur la structure cellulaire de détonation a été mise en évidence et trois types de structures ont pu être obtenus :

- si la deuxième réaction est très rapide, la structure cellulaire de détonation est uniquement contrôlée par la première réaction et le résultat obtenu est comparable à celui observé dans le cas où l'énergie chimique est libérée de manière monotone ;
- si la deuxième réaction est très lente, toute l'énergie chimique correspondante ne contribue pas à la propagation de la détonation tant que celle-ci ne s'est pas propagée sur une grande distance. La détonation est alors non idéale et ses caractéristiques sont inférieures aux valeurs théoriques. La taille de la structure cellulaire calculée dans ces conditions est beaucoup plus grande que celle où les deux étapes exothermiques sont très proches. Ces cellules contiennent dans leur première moitié une sous structure qui n'est pas due à la libération non monotone de l'énergie mais plutôt au fait que la valeur de l'énergie d'activation réduite respecte le critère de Manzhalei, c'est-à-dire  $E/RT_{\text{ZND}} > 6$  ;
- pour certaines vitesses intermédiaires de la deuxième réaction, les calculs montrent que l'onde de détonation engendre une double structure cellulaire constituée d'un réseau dont les cellules principales sont remplies entièrement par une structure secondaire constituée de très petites cellules. Conformément aux observations expérimentales, la taille des cellules de la structure secondaire croît au sein des grandes cellules suivant le sens de propagation de la détonation.

### Références

- [1] H.N. Presles, D. Desbordes, M. Guirard, G. Gueraud, Gaseous nitromethane and nitromethane–oxygen mixtures: a new detonation structure, *Shock Waves* 6 (1996) 111–114.
- [2] F. Joubert, D. Desbordes, H.N. Presles, Structure de la détonation des mélanges  $\text{H}_2\text{--NO}_2/\text{N}_2\text{O}_4$ , *C. R. Mécanique* 331 (2003) 365–372.
- [3] N. Lamoureux, C. Matignon, M.O. Sturtzer, D. Desbordes, H.N. Presles, Interprétation de la double structure observée dans l'onde de détonation du nitrométhane gazeux, *C. R. Acad. Sci. Paris* 329 (2001) 1–6.
- [4] D. Desbordes, H.N. Presles, F. Joubert, C. Gbagdo Douala, Etude de la détonation de mélanges pauvres  $\text{H}_2\text{--NO}_2/\text{N}_2\text{O}_4$ , *C. R. Mécanique* 332 (2004) 993–999.
- [5] V.I. Manzhalei, Fine structure of the leading front of a gas detonation, *Fiz. Gorenia i Vzryva* 13 (3) (1977) 470–472.
- [6] V.N. Gamezo, J.C. Wheeler, A.M. Khokhlov, E.S. Oran, Multi-level structure of cellular detonations in type Ia supernovae, *The Astrophysical Journal* 512 (1999) 827–842.
- [7] R. Daou, P. Clavin, Instability threshold of gaseous detonations, *Journal of Fluid Mechanics* 482 (2003) 181–206.
- [8] E.S. Oran, J.P. Boris, *Numerical Simulation of Reactive Flow*, Elsevier Science Publishing Co., Inc., Amsterdam, 1987.
- [9] B. Khasainov, H.N. Presles, D. Desbordes, P. Demontis, P. Vidal, Detonation diffraction from circular tubes to cones, *Shock Waves* 14 (2005) 187–192.
- [10] B. Khasainov, B. Veysière, Initiation of detonation regimes in hybrid two-phase mixtures, *Shock Waves* 6 (1996) 9–15.