

Utilisation de la phase stationnaire pour localiser la provenance du bruit sur l'axe d'une structure élastique à symétrie de révolution

Dominique Brenot

EDF-R&D, 1, avenue du Général de Gaulle, BP 408, 92141 Clamart cedex, France

Reçu le 28 octobre 2005 ; accepté après révision le 29 mai 2006

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Soit le problème numéroté (1) dans le texte. Le long de l'axe, la solution peut s'exprimer à l'aide des modes propres à symétrie de révolution et eux seulement. Pour des nombres d'onde élevés, la méthode de la phase stationnaire permet de montrer que la contribution à la pression en un point de l'axe ne provient que des voisinages de certains parallèles. Généralement, seul celui constitué des points les plus proches du point concerné est à considérer. Pour les faibles indices azimutaux (notamment $n = 0$), la courbure a une grande influence sur les longueurs d'onde des modes propres de la structure dans le vide : la méthode de la phase stationnaire peut ainsi, dans les problèmes aéronautiques courants, s'appliquer dès le premier mode propre à symétrie de révolution de la structure et non pas seulement au-dessus de la fréquence de coïncidence. L'utilisation d'un résultat précédemment établi conduit à une expression simple de la pression sur l'axe d'une structure à symétrie de révolution. **Pour citer cet article : D. Brenot, C. R. Mecanique 334 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Use of the stationary phase method to localize the source of noise on the axis of an axisymmetric elastic structure. Consider the problem numbered (1) in the text. Along the axis, the pressure may be expressed as a combination of axisymmetric modes only. For high wave numbers, the method of stationary phase may be used to show that the pressure on the axis comes only from the vicinities of a few parallels. Generally, only the parallel constituting the points nearest to this axis point is to be considered. For low circumferential mode numbers (especially $n = 0$), the curvature greatly influences the wavelength of the modes of the structure in vacuo: thus, the method of stationary phase can be applied, for most aeronautical airborne structures, even from the first axisymmetric mode and not only above the coincidence frequency. Using an expression established earlier, we can give an expression for the pressure on the axis of an axisymmetric enclosure. **To cite this article: D. Brenot, C. R. Mecanique 334 (2006).** © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Acoustique ; Formulation intégrale ; Problème de Helmholtz intérieur ; Noyau de Green ; Phase stationnaire

Keywords : Acoustics; Integral formulation; Interior Helmholtz problem; Green kernel; Stationary phase

Adresse e-mail : dominique.brenot@edf.fr (D. Brenot).

Abridged English version

The solution of the problem (1), where u is the motion of an elastic axisymmetric structure, whose surface is S , closed by two parallel rigid ends F_1 and F_2 , and ζ is the acoustical impedance of the wall enclosure, which will be supposed to be purely real, verifies (2). In this expression, the Green kernel of an unlimited domain and its normal derivative remain constant when y runs on a same parallel of latitude and x is a point of the axis inside an axisymmetric enclosure. In consequence, the integrations in (2) can be transformed into integrations on the meridian line, which contain only the zero order azimuthal component of any integrand which are all 2π periodic function of the azimuth θ . Let us retain the same notation for the surface and the meridian line and use a capital letter for these zero order azimuthal components. When x is an axis point, (2) becomes (3) and, using [1], we obtain (4). Let α be a running parameter for the points $y(\alpha)$ of the meridian line. The integrals in expressions (3) and (4) have all the form $\int_M e^{ikd(\alpha)} \psi(\alpha) d\alpha$. When k tends to infinity, $e^{ikd(\alpha)}$ becomes highly oscillating outside the zones in which $d(\alpha)$ is stationary (derivative equal to zero). The left part of Fig. 1 shows this better than mathematical arguments. The represented structure is a truncated cone closed by two rigid ends. Its dimensions are indicated in meters. In this particular case, for each axis point, there is only one point $y(\alpha_0)$ where the distance $d(\alpha) = |x - y(\alpha)|$ is stationary (minimal). The real and imaginary parts of $e^{-ikd(\alpha_0)} e^{ikd(\alpha)}$ were plotted on the meridian curve for three frequencies (500, 1000, 3000 Hz). Stationary lobes clearly appear. It will be assumed that there is always a finite number of such stationary points α_j , thus defining J contributing zones μ_j . Another point to be noted is that, in expressions (3), and (4), some integrations are performed on $S \cup F_1 \cup F_2$, and others on S only. In fact the integration over $S \cup F_1 \cup F_2$ is not necessary since the problem (1) can easily be extended by symmetry. The process can be reiterated as many times as needed, which comes to pushing back the ends as far as wanted. Obviously, the integration has to be performed not only on the initial surface but also over all S_a surfaces (7). However, the stationary phase zones will stay at the same place on the edge of the new cavity, as shown by the plot of $e^{-ikd(\alpha_0)} e^{ikd(\alpha)}$ in Fig. 1 (right part). Hence we can legitimately neglect the effects of the ends F_1 and F_2 , most likely of the second order, which probably compensate for the contribution of the edges of the definition domain of parameter α , neglected up till now. Let therefore assume that the stationary phase method can be applied. One could use the formulae derived from this method, but it is not actually necessary. It is sufficient to recall that $|x - y(\alpha_j)| = d(\alpha_j)$ does not evolve inside each of the J stationary lobes so that Eqs. (3) and (4) can be written respectively as (8) and (9). There are two axis stationary phase points for the integration over $P^i(y, k, \zeta, \varepsilon)$. Nevertheless, as ζ is infinite valued on F_1 and F_2 , they have very weak contributions in expression (8) and tends effectively towards zero by pushing back F_1 and F_2 at infinity as mentioned above. When, for an axis point x , there is only one stationary phase point ($\alpha = \alpha_0$)—which is generally the case—the final expression is particularly simple because the contribution of wall acceleration only comes from one parallel of latitude. The integral expressions in Eq. (8) become a simple equality at the stationary point specified by α_0 [2], which can be introduced into (9) to give (10). However, Eq. (10) remains true when, for J distinct points $x^{j'}$ at least, the main contributions in each of the J corresponding equations (8) come from J parallels of latitude $\mu_j^{j'}$ of the surface S where the distance $|x^{j'} - y(\alpha_j^{j'})| = d(\alpha_j^{j'})$ is stationary. Indeed, using [2] as above but for each zone $\mu_j^{j'}$, Eq. (8) can be transformed into (11). If (12) is valid, the equality between pressure and wall acceleration can still be written locally as (13) and introduced in (9) to give again (10), which is equally (15). The end of this Note explains why the stationary phase method is applicable for most aeronautical airborne structures.

1. Position du problème

La solution p^i (pression acoustique) du problème

$$\begin{cases} \Delta p^i + k^2 p^i = 0 & \text{dans } V \\ \left(\frac{\partial p^i}{\partial n} - \frac{ik}{\zeta} p^i \right) \Big|_S = \rho \omega^2 (u, n), & \frac{\partial p^i}{\partial n} \Big|_{F_1 \cup F_2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où u est le mouvement d'une structure élastique de surface S à symétrie de révolution, fermée par deux fonds rigides F_1 et F_2 parallèles, et ζ est l'impédance acoustique de la paroi d'enceinte, qu'on supposera purement réelle et in finie sur F_1 et F_2 , vérifie :

$$\begin{aligned}
 p^i(x, k, \zeta, \varepsilon) = & - \int_{S \cup F_1 \cup F_2} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) P^i(y, k, \zeta, \varepsilon) dS(y) \\
 & + \int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho \omega^2(u(y, k, \varepsilon), n_y) dS(y)
 \end{aligned} \tag{2}$$

en appelant ε l'amortissement de la structure élastique. Dans l'expression ci-dessus, la dérivée normale du noyau de Green en domaine illimité $\left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)$ est :

$$\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \left[\left(ik - \frac{1}{|x-y|} \right) \frac{(y-x, n_y)}{|x-y|} \right]$$

Pour tout point x de l'axe d'une cavité à symétrie de révolution, la distance $|x-y|$ reste inchangée lorsque y parcourt un même parallèle, de même que le produit scalaire $(y-x, n_y)$. Ainsi $\left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial n_y} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}\right)$ sont constants sur ledit parallèle. Pour un tel point, les intégrales de surface de l'expression (2) se ramènent donc à des intégrations sur la ligne méridienne M :

$$\int_S f(y, \theta) dS(y, \theta) = \int_M \left(\int_{\theta=0}^{2\pi} f(y, \theta) d\theta \right) d\mu(y) = \int_M F(y) d\mu(y)$$

où $d\mu(y)$ est la mesure sur la ligne méridienne, y le point courant et θ l'azimut. $F(y)$ n'est autre que la composante azimutale d'ordre zéro de la fonction $f(y, \theta)$ qui, périodique de période 2π en θ , est décomposable en série azimutale $2\pi f(y, \theta) = F(y) + \sum_{l \neq 0} f_l(y) e^{il\theta}$. Pour un tel point, nous pouvons également utiliser les hypothèses et les résultats de [1], en adoptant, des majuscules pour les composantes azimutales, la même notation pour la surface et la ligne méridienne, et en omettant la convolution sur k , toujours implicite dans toutes les formules numérotées ci-dessous, ainsi que l'infiniment petit $\vartheta(1/\zeta, \xi)$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{S \cup F_1 \cup F_2} \left(1 - 2 \left(e^{-\frac{|x-y|}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})|x-y|} \right)^{-1} \right) \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) P^i(y, k, \zeta, \varepsilon) d\mu(y) \\
 & = \int_S \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho \omega^2(U(y, k, \varepsilon), n_y) d\mu(y)
 \end{aligned} \tag{3}$$

Cette expression, combinée à (2) dûment modifiée (pression et déplacement pariétaux en majuscules) donne :

$$p^i(x, k) = - \int_{S \cup F_1 \cup F_2} 2 \left(e^{-\frac{|x-y|}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})|x-y|} \right)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) P^i(y, k, \zeta, \varepsilon) d\mu(y) \tag{4}$$

2. Méthode de la phase stationnaire

Posons, en appelant α le paramétrage d'un point $y(\alpha)$ de la courbe méridienne, $|x-y(\alpha)| = d(\alpha)$, $d\mu(y(\alpha)) = \mu(\alpha) d\alpha$. Les intégrales des expressions (3) et (4) sont toutes de la forme $\int_M e^{ikd(\alpha)} \psi(\alpha) d\alpha$. Quand k tend vers l'infini (pratiquement dès que $k \geq 10$), $e^{ikd(\alpha)}$ devient fortement oscillant en dehors des zones correspondant à des valeurs α_0 du paramètre α pour lesquelles $d(\alpha)$ est stationnaire, c'est-à-dire $\left. \frac{\partial d(\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_0} = 0$. Mieux qu'une argumentation mathématique, la Fig. 1 (gauche) montre clairement les lobes de stationnarité dans le cas d'un tronc de cône dont les dimensions sont indiquées en mètres. Pour trois fréquences (500, 1000, 3000 Hz), sont représentées les parties réelles (a, b, c) et imaginaires (d, e, f) de $e^{-ikd(\alpha_0)} e^{ikd(\alpha)}$. Dans ce cas particulier, pour chaque point de l'axe, il n'y a qu'un point stationnaire $y(\alpha_0)$, pour lequel la distance $d(\alpha) = |x-y(\alpha)|$ stationne (minimum). On supposera qu'il n'y a qu'un nombre fini de tels point α_j , définissant ainsi J zones μ_j contribuant de façon significative à la pression en un point de l'axe, ce qui exclut le cas de la sphère pour laquelle il n'y a que des points stationnaires lorsque x est en son centre (toutes les dérivées successives $\frac{\partial^m d}{\partial \alpha^m}$ sont alors nulles quel que soit le point $y(\alpha)$, pour toute valeur de m).

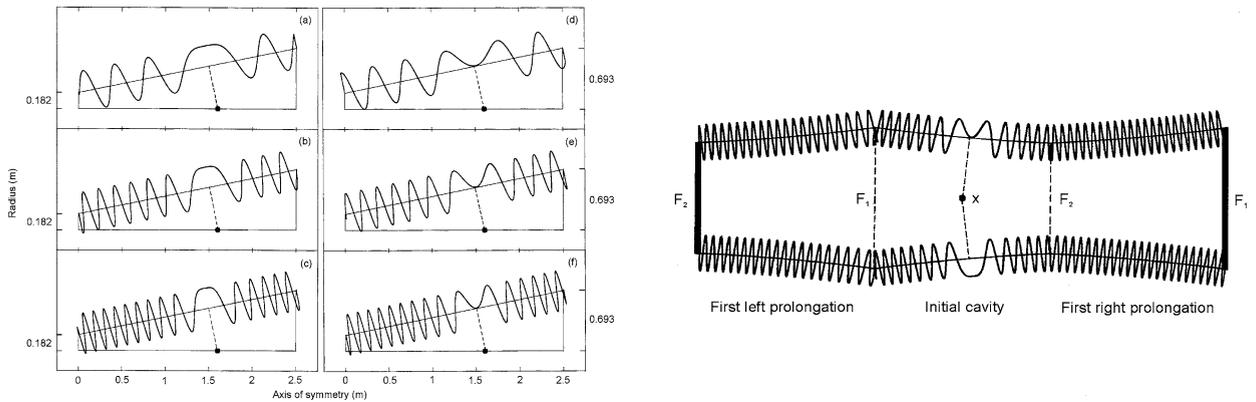


Fig. 1. (Gauche) Visualisation des lobes de stationnarité; (droite) après ajout de 2 cavités symétriques.

Fig. 1. (Left) Presence of stationary lobes; (right) after adding 2 symmetrical cavities.

Il faut également noter que, dans les expressions (3) et (4), certaines intégrations portent sur $S \cup F_1 \cup F_2$, d'autres sur S seulement. En fait la nécessité d'intégrer sur $S \cup F_1 \cup F_2$ n'est qu'apparente car le problème initial (1) peut se prolonger par symétrie par rapport aux fonds F_1 et F_2 . La Fig. 1 (droite) montre l'équivalent de la Fig. 1 (gauche) après ajout de deux cavités symétriques de part et d'autre du volume initial. La pression à l'intérieur de la cavité ne serait nullement modifiée si les fonds F_1 et F_2 étaient supprimés. En effet, comme tous les points x du volume initial sont externes aux cavités rajoutées, la relation de Green appliquée à celles-ci donne :

$$0 = - \int_{S_a^f} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) p^i(y, k) dS(y) + \int_{S_a} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho \omega^2(u(y, k), n_y) dS(y) \quad (5)$$

où S_a^f est le bord d'une cavité rajoutée constituée d'une surface S_a en tout point identique à S (mêmes conditions aux limites) et fermée par deux fonds rigides identiques à F_1 et F_2 . On peut ainsi écrire, en appelant \bigcup_a la réunion des surfaces initiale et rajoutées, en précisant que ζ est infini sur $F_1 \cup F_2$ et sur tous les fonds identiques (conditions aux limites de (1)),

$$p^i(x) = - \int_{\bigcup_a S_a^f} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) p^i(y, k) dS(y) + \int_{\bigcup_a S_a} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} (\rho \omega^2(u(y, k), n_y)) dS(y) \quad (6)$$

Les sommes sur deux côtés adjacents se détruisent, puisque les vecteurs normaux ont des signes opposés de part et d'autre d'un même fond, nous pouvons en fait écrire :

$$p^i(x, k, \zeta, \varepsilon) = - \int_{F_1 \cup (\bigcup_a S_a) \cup F_2} \left(\frac{\partial}{\partial n_y} - \frac{ik}{\zeta} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \right) p^i(y, k, \zeta, \varepsilon) dS(y) + \int_{\bigcup_a S_a} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho \omega^2(u(y, k, \varepsilon), n_y) dS(y) \quad (7)$$

Le processus peut être itéré autant de fois que souhaité, ce qui revient à rejeter les fonds à l'infini. Naturellement les intégrations portent sur toutes les surfaces S_a et pas seulement sur la surface initiale. Mais les zones où la phase est stationnaire sur la surface initiale restent des zones où la phase est stationnaire sur la frontière de la nouvelle cavité ainsi construite, comme le vérifie le tracé de $e^{-ikd(\alpha_0)} e^{ikd(\alpha)}$ sur la Fig. 1 (droite) (partie imaginaire en haut, partie réelle en bas). Il est légitime de négliger les contributions (terme de pression) des fonds F_1 et F_2 rejetés à l'infini (en $1/d$). Les points de raccord entre surfaces, même s'ils présentent des discontinuités de plans tangents, assurent la continuité du noyau de Green qui continue d'osciller fortement, alors que les fonctions par lesquelles il est multiplié sont continues ainsi, généralement, que leur dérivées premières (les conditions aux limites sur les bords des surfaces

sont reproduites à l'identiques d'une cavité à l'autre et sont généralement des structures encastrees). Les effets de bord dus aux frontieres de definition du parametre α sont donc eux aussi rejetes à l'infini : ils contribuent donc d'autant moins, alors qu'ils sont déjà par essence même d'ordre supérieur en $1/k$, cet ordre étant d'autant plus grand que les fonctions évoquées ci-dessus sont, en ces points, nulles ainsi que leurs dérivées premières [3].

Supposons donc applicable la méthode de la phase stationnaire. On pourrait utiliser les formules qui en dérivent mais cela n'est même pas nécessaire. Il suffit de rappeler que $|x - y(\alpha)| = d(\alpha)$ n'évolue pas à l'intérieur de chacun des J lobes de stationnarité, de telle sorte que les relations (3) et (4) peuvent s'écrire respectivement :

$$\begin{aligned} & \sum_j \left(1 - 2 \left(e^{-\frac{d(\alpha_j)}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})d(\alpha_j)} \right)^{-1} \right) \left(ik - \frac{1}{d(\alpha_j)} - \frac{ik}{\zeta} \right) \int_{\mu_j} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} P^i(y, k, \zeta, \varepsilon) d\mu(y) \\ & = \sum_j \int_{\mu_j} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho\omega^2(U(y, k, \varepsilon), n_y) d\mu(y) \end{aligned} \tag{8}$$

$$P^i(x, k, \zeta, \varepsilon) = - \sum_j 2 \left(e^{-\frac{d(\alpha_j)}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})d(\alpha_j)} \right)^{-1} \left(ik - \frac{1}{d(\alpha_j)} - \frac{ik}{\zeta} \right) \int_{\mu_j} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} P^i(y, k, \zeta, \varepsilon) d\mu(y) \tag{9}$$

Dans ces deux équations a été utilisé le fait que, pour un point stationnaire $y(\alpha) : \frac{\partial d}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_j} = 0, (y(\alpha_j) - x, n_{y(\alpha_j)}) = |x - y(\alpha_j)| = d(\alpha_j)$. Il y a, sur l'axe de symétrie, deux points de phase stationnaire pour l'intégration de $P^i(y, k, \zeta, \varepsilon)$. Néanmoins, comme ζ a une valeur infinie sur F_1 et F_2 , leurs contributions dans les expressions (8) sont toujours très faibles et tendent bien vers zéro quand les fonds F_1 et F_2 sont rejetés à l'infini par les prolongations évoquées ci-dessus. Quand, pour un point x de l'axe, il n'y a qu'un lobe de stationnarité ($\alpha = \alpha_0$)—ce qui est généralement le cas—l'expression finale est particulièrement simple parce que la contribution ne vient que d'un seul parallèle. En utilisant [2],

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikd(\alpha)} \psi(\alpha) d\alpha = \left(2\pi e^{i\frac{\pi}{2}} / k / \frac{\partial^2 d}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha_0} \right)^{1/2} \psi(\alpha_0) e^{ikd(\alpha_0)}$$

l'égalité obtenue localement à partir de (8) peut être reportée dans (9) pour donner, quand $\frac{\partial^2 d}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha_0} \neq 0$,

$$\begin{aligned} P^i(x, k, \zeta, \varepsilon) & = 2 \left(2 - \left(e^{-\frac{d(\alpha_0)}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})d(\alpha_0)} \right) \right)^{-1} \int_{\mu_0} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho\omega^2(U(y, k, \varepsilon), n_y) d\mu(y) \\ & = \int_{\cup_a S_a} 2 \left(2 - \left(e^{-\frac{|x-y|}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})|x-y|} \right) \right)^{-1} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho\omega^2(U(y, k, \varepsilon), n_y) d\mu(y) \end{aligned} \tag{10}$$

Mais l'Éq. (10) reste vraie quand, pour J points distincts $x^{j'}$ au moins, les contributions principales dans chacune des J équations (8) ainsi écrites proviennent de J parallèles $\mu_j^{j'}$ sur la surface S pour lesquels la distance $|x^{j'} - y(\alpha_j^{j'})| = d(\alpha_j^{j'})$ est stationnaire. En effet, en appliquant la relation issue de [2] déjà utilisée ci-dessus pour chacune des zones $\mu_j^{j'}$, l'Éq. (8) peut s'écrire

$$\begin{aligned} 0 & = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^{1/2} e^{i\pi/4} \sum_j \left(e^{ikd(\alpha_j^{j'})} \mu(\alpha_j^{j'}) / d(\alpha_j^{j'}) / \frac{\partial^2 d}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha_j^{j'}} \right)^{1/2} \left(\left(1 - \left(e^{-\frac{d(\alpha_j^{j'})}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})d(\alpha_j^{j'})} \right)^{-1} \right) \right. \\ & \quad \times \left. \left(ik - \frac{1}{d(\alpha_j^{j'})} - \frac{ik}{\zeta} \right) P^i(y(\alpha_j^{j'}), k, \zeta, \varepsilon) - \rho\omega^2(U(y(\alpha_j^{j'}), k, \varepsilon), n_{y(\alpha_j^{j'})}) \right) \end{aligned} \tag{11}$$

et si le déterminant de ce système d'équations n'est pas nul, soit

$$\left| e^{ikd(\alpha_j^{j'})} \mu(\alpha_j^{j'}) / d(\alpha_j^{j'}) / \frac{\partial^2 d}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha_j^{j'}}^{1/2} \right| \neq 0 \quad (12)$$

l'égalité entre la pression et l'accélération peut encore être écrite localement

$$\begin{aligned} & \left(1 - 2 \left(e^{-\frac{d(\alpha_j^{j'})}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})d(\alpha_j^{j'})} \right)^{-1} \right) \left(ik - \frac{1}{d(\alpha_j^{j'})} - \frac{ik}{\zeta} \right) P^i(y(\alpha_j^{j'}), k, \zeta, \varepsilon) \\ & = \rho \omega^2 (U(y(\alpha_j^{j'}), k, \varepsilon), n_{y(\alpha_j^{j'})}) \end{aligned} \quad (13)$$

et reportée dans (9) pour redonner (10) :

$$\begin{aligned} p^i(x, k, \zeta, \varepsilon) &= \sum_j 2 \left(2 - \left(e^{-\frac{d(\alpha_j)}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})d(\alpha_j)} \right) \right)^{-1} \int_{\mu_j} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho \omega^2 (U(y, k, \varepsilon), n_y) d\mu(y) \\ &= \int_{\bigcup_a S_a} 2 \left(2 - \left(e^{-\frac{|x-y|}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})|x-y|} \right) \right)^{-1} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho \omega^2 (U(y, k, \varepsilon), n_y) d\mu(y) \end{aligned} \quad (14)$$

3. Condition d'application de la méthode de la phase stationnaire

Il reste à déterminer quand la méthode de la phase stationnaire est applicable, c'est-à-dire quand les fonctions $\psi(y)$ (déformation de la structure et pression acoustique) des expressions de la forme $\int_M e^{ikd(\alpha)} \psi(\alpha) d\alpha$ peuvent être considérées comme lentement variables devant les oscillations de l'exponentielle complexe. Lorsque le nombre d'onde acoustique k tend vers l'infini, les longueurs d'onde des modes propres à symétrie de révolution des structures évoluent comme la puissance 1/2 de ce nombre d'onde acoustique et tendent donc à apparaître comme infiniment grandes devant la longueur d'onde associée aux oscillations de $e^{ikd(\alpha)}$. Quant aux modes acoustiques axisymétriques (de la cavité), ceux qui ne sont pas étouffés sont ceux qui épousent au mieux les déformations de la structure et sont fortement oscillants perpendiculairement à la paroi. Or la courbure a pour effet, pour la plupart des structures aéronautiques, de rendre les longueurs d'onde de leurs modes axisymétriques de structure supérieures aux longueurs d'onde acoustiques dès le premier de ces modes (qui constitue un filtre passe-haut) et bien avant la fréquence de coïncidence (définie pour une plaque plane). Ajoutons que la largeur des lobes de stationarité peut être du même ordre en k que les longueurs d'onde de la structure. Cela ne constitue pas un problème car la contribution en dehors des lobes de stationarité tend bien vers 0 quand k tend vers l'infini. Enfin, un prolongement par une cavité de part et d'autre de la cavité initiale suffit à fournir la pression en tout point de l'axe, y compris sur les fonds (dans l'exemple du tronc de cône, les deux points en question ont une phase doublement stationnaire).

4. Expression du bruit sur l'axe d'une structure à symétrie de révolution

Le bruit sur l'axe ne provient que de certains parallèles, en particulier celui constitué des points les plus proches du point considéré et s'exprime sous la forme :

$$p^i(x, k, \zeta, \varepsilon) = \int_{\bigcup_a S_a} 2 \left(2 - \left(e^{-\frac{|x-y|}{\zeta}} + e^{-(k\varepsilon + \frac{1}{2\zeta})|x-y|} \right) \right)^{-1} \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \rho \omega^2 (U(y, k, \varepsilon), n_y) d\mu(y) \quad (15)$$

Références

- [1] D. Brenot, Etude du problème de Helmholtz intérieur par couplage d'une formulation modale et d'une représentation intégrale, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 340 (2005) 779–784.
- [2] A. Erdélyi, Asymptotic Expansions, Dover Publications Inc., 1956.
- [3] V.P. Maslov, Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Dunod, Paris, 1972.