

Similitude généralisée et modélisation géométrique à complexité réduite

Bijan Mohammadi^{a,b,*}, Jean-Marc Brun^{a,b}

^a Cemagref, UMR-ITAP, 34196 Montpellier cedex 5, France

^b Institut de mathématiques et de modélisation de Montpellier, université Montpellier II, CC51, 34095 Montpellier, France

Reçu le 3 avril 2006 ; accepté après révision le 9 juin 2006

Disponible sur Internet le 24 juillet 2006

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Nous présentons une modélisation à complexité réduite pour le transport et la dispersion d'un scalaire passif pour les applications environnementales. Le modèle utilise l'assimilation de données partielles d'observations. On propose une généralisation des solutions de similitudes pour les jets dans une métrique nonsymétrique basée sur les temps de transport. L'approche ne nécessite pas la solution d'EDP, donc pas de maillage et on peut accéder à la solution en un point sans avoir à la calculer partout. **Pour citer cet article : B. Mohammadi, J.-M. Brun, C. R. Mecanique 334 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

General similitude solutions and low-complexity geometric models. We present low complexity models for the transport of passive scalars for environmental applications. The model uses partial observations assimilation. Similitude solutions are proposed in a non symmetric metric based on travel times. The approach does not require the solution of any PDE and is mesh free. Also, the solution can be computed in one point only without computing the whole solution. **To cite this article: B. Mohammadi, J.-M. Brun, C. R. Mecanique 334 (2006).**

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Dispersion ; Transport ; Similitude ; Modèles réduits ; Jets

Keywords : Computational fluid mechanics; Dispersion; Transport; Similarity; Reduced order models; Plumes

Abridged English version

Air and water contamination by pesticides is a major health and environmental issue. One aims to model pesticide transport in atmospheric flows with very low calculation cost making Monte Carlo simulations realistic. Partial data being available on wind and transported species measured by localized apparatus, a prediction model should be parametric in order to assimilate these data. In the present work, the parameters gather all independent variables in the

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : bijan.mohammadi@univ-montp2.fr (B. Mohammadi), jean-marc.brun@montpellier.cemagref.fr (J.-M. Brun).

model. This Note is to present our geometric transport model based on the generalization of similarity solutions for plumes in Euclidean metrics to non symmetric ‘travel-time’ based metrics.

1. Introduction

La problématique de la contamination de l’air par les produits phytosanitaires (pesticides) constitue une préoccupation de plus en plus importante. Les outils de modélisation sont nécessaires pour analyser les stratégies de réduction d’impacts. Le but de ce projet, réalisé au Cemagref à Montpellier, est le développement d’un modèle à complexité réduite pour la simulation de la dispersion de pesticides dans l’atmosphère. Les paramètres du modèle proviennent de la solution d’un problème d’assimilation de données partielles météo, ainsi que des mesures de dispersion :

$$\min_{p \in \mathcal{O}} J(p) = \|\vec{u}(p) - \vec{u}_{\text{obs}}\| + \|c(p, \vec{u}(p)) - c_{\text{obs}}\| \tag{1}$$

où p représente les variables indépendantes du modèle incluant la définition du domaine de calcul, la topographie, les conditions météo, les localisations des sources d’émission, les caractéristiques des buses d’injection, ... \vec{u}_{obs} et c_{obs} sont les observations, en des points parfois différents, de la vitesse et des concentrations (ici une seule concentration pour simplifier, mais en pratique plusieurs espèces sont présentes). $\vec{u}(p)$ est un champs de vitesse à divergence nulle servant au transport de $c(p, \vec{u}(p))$. Un bon modèle numérique doit prédire, tout en respectant ces informations observées, et ne doit pas être trop sensible aux petites perturbations des observations.

Cette Note est dédiée à la description du modèle géométrique utilisé pour le transport. Ce modèle est basé sur une généralisation des solutions de similitudes pour les jets. Les autres détails de la modélisation, notamment les aspects multi-échelle, sont décrits en [1,2].

2. Solution de similitude dans une métrique non symétrique

On cherche à réduire l’espace de recherche de la solution. Nous modélisons la distribution d’un scalaire passif c , émis à l’origine et transporté par un flot plan uniforme U par :

$$c(x, y) = c_c(x) f(y, \delta(x)) \quad \text{où } c_c(x) \sim \exp(-a(U)x) \text{ et } f(y, \delta(x)) \sim \exp(-b(U, \delta(x))y^2) \tag{2}$$

c_c est la répartition sur l’axe central de la distribution d’épaisseur $\delta(x)$. Une analogie existe avec les jets où cette fonction est parabolique en laminaire et linéaire en turbulent [3]. $a(\cdot)$ est une fonction positive monotone décroissante et $b(\cdot, \cdot)$ est positive, monotone croissante en U et décroissante en δ . Dans un champ de vitesse atmosphérique uniforme, cette solution peut servir au transport d’un scalaire passif. Nous nous proposons de généraliser cette solution dans une métrique non symétrique, définie par les temps de transport, et ainsi résoudre, avec un très faible coût, le transport par des champs de vitesses quelconques.

3. Distance généralisée

Dans une géométrie «classique», symétrique, la fonction distance vérifie $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$, $d(A, B) = d(B, A)$, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Cependant, la distance peut être non uniforme et anisotrope. La distance entre deux points A et B est donnée par :

$$d_{\mathcal{M}}(AB) = \int_0^1 ({}^t\overrightarrow{AB} \mathcal{M}(A + t\overrightarrow{AB}) \overrightarrow{AB})^{1/2} dt \tag{3}$$

où \mathcal{M} est la métrique choisie, définie positive et symétrique en géométrie symétrique. Si $\mathcal{M} = I$, on retrouve la géométrie euclidienne et \mathcal{M} variable permet d’introduire l’anisotropie (les sphères unité sont alors des ellipsoïdes).

Considérons la pseudo-distance suivante : si A est amont par rapport à B alors $d(B, A) = \infty$ et $d(A, B) = \int_A^{B^\perp} ds/u =$ temps de migration de A à B^\perp le long de la caractéristique passant par A , que l’on supposera unique, écartant les sources et puits. B^\perp est la projection de B sur cette caractéristique. Les situations de non unicité de cette projection sont résolues en considérant comme direction de projection celle qui vérifie au mieux ($\vec{u} \cdot \nabla c = 0$) en B . On introduit, par ailleurs, une condition de conservation globale pour la quantité transportée $\int_{\mathbb{R}^3} c(p, u(p)) =$ quantité

totale émise, solution d'un modèle de traitement au niveau du rang de culture [1]. Les traitements des cultures n'étant effectués que si le vent est faible (moins de 20 km/h), ces hypothèses sont réalistes. La pseudo-distance ainsi construite n'a pas les caractéristiques d'une distance : $d(A, B) = 0 \nRightarrow A = B$ et elle n'est plus symétrique $d(A, B) \neq d(B, A)$. De même, l'inégalité triangulaire peut être mise en défaut.

Il faut garder à l'esprit que sur les configurations réalistes, on possède très peu d'information météo (moins d'un point par parcelle de plusieurs hectares). Le champ de vitesse est complété par une solution approchée de :

$$\vec{u} = \nabla\phi, \quad -\Delta\phi = \sum_{i=1, \dots, n_{\text{obs}}} \|\nabla\phi - \vec{u}_{\text{obs}}\| \quad (4)$$

où ϕ est un potentiel et n_{obs} le nombre de points d'observation. Une alternative à cette approche est de considérer une grille de représentation des temps de migration bien plus grossière que celle utilisée pour la migration et procéder par interpolation pour connaître le temps de transport entre une source et un point quelconque (temps qui sera infini si le point est amont).

Ainsi, on se propose de représenter la distribution d'un scalaire passif transporté par un flot, à divergence nulle, mais non uniforme par :

$$c = c_c(d(p))f(d^\perp(p), \delta(d(p))) \quad (5)$$

où d^\perp est la distance euclidienne dans la direction normale locale à la caractéristique « source » (i.e., la direction BB^\perp).

Cette approche a donc un très faible coût de calcul en comparaison à la résolution d'une EDP. Par ailleurs, on peut accéder à la solution en un point sans avoir à la calculer partout.

4. Calcul de gradient et identification des sources d'une pollution

Par sa faible complexité, cette approche permet d'identifier les sources d'une pollution observée. On utilise la différentiation automatique en mode inverse par Tapenade [4] pour construire le code adjoint et accéder au gradient avec un coût indépendant du nombre des paramètres de contrôle [5,2]. Ce gradient est aussi utilisé pour la résolution de (1).

5. Quelques exemples

Le problème de traitement des cultures est multi-échelle. Deux problèmes d'intérêt sont : connaissant la source et la météo, définir la zone touchée par la dispersion et, de façon duale, ayant observé une pollution à un endroit et connaissant la météo, trouver d'où cela pourrait venir.

Quelques dimensions caractéristiques sont : la buse (diamètre 10 cm), rangs de vigne espacés de 1.5 m, parcelles de quelques hectares dans un bassin de quelques centaines de km^2 (voir Fig. 1). Le traitement s'effectue à une vitesse de 1 m/s et la vitesse d'injection en sortie de la buse est de 10 m/s pour un traitement type de $10 \text{ kg}/\text{km}^2$. Nous montrons les résultats de transport avec ce modèle géométrique pour des situations mono et multi-source (Figs. 3 et 4). Des exemples de champ de vitesse construit sont présentés avec les points de mesure de la vitesse (Figs. 1, 4 et 5). Un exemple de métrique non symétrique est comparé avec une métrique euclidienne en Fig. 2.

On compare notamment le transport par modèle réduit avec le résultat d'une simulation avec un modèle de transport complet (Fig. 3) basé sur la solution instationnaire d'une équation de transport-diffusion-dépôt par éléments finis stabilisés pour le même champ de vitesse. Des conditions d'entrée/sortie libre sont appliquées à toutes les frontières et une source mobile est définie suivant une discrétisation de la trajectoire en Fig. 1. Une intégration en temps explicite avec un schéma Runge Kutta d'ordre deux à été utilisée. Le pas de temps est limité par la condition de stabilité classique, mais doit aussi être compatible avec la vitesse du déplacement de la source et ainsi permettre de correctement représenter l'injection des pesticides dans la parcelle. Le terme de puit prenant en compte le dépôt a été calé pour un champ de vitesse uniforme pour retrouver la solution de dispersion analytique (2) par la solution de l'EDP. La solution de similitude a été évaluée en tous les points du maillage éléments finis pour comparaison. On utilise la linéarité pour accumuler les solutions de similitude et ainsi traiter le cas d'une source mobile. A titre d'indication, l'approche solution de similitude permet une réduction du coût de l'évaluation de la solution en un point d'un facteur d'environ 10^3 – 10^4 (ici on a utilisé un maillage d'environ 3000 points) comparé au calcul global. Ce rapport augmente, au moins de façon quadratique en 2D et cubique en 3D, avec la taille du problème.

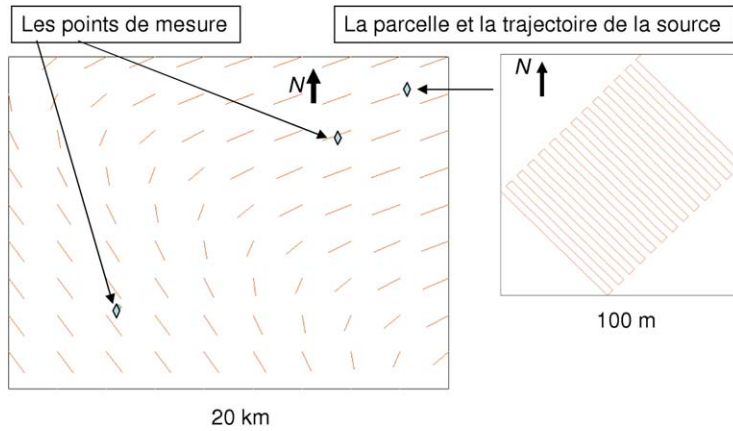


Fig. 1. On représente les deux points de mesure de vent et la trajectoire de la source dans une parcelle d'un hectare ; le tout dans un bassin de 400 km^2 .

Fig. 1. A typical configuration with a one acre vineyard, 2 points of wind measures, the trajectory of the source in the vineyard and the whole in a domain of 400 km^2 .

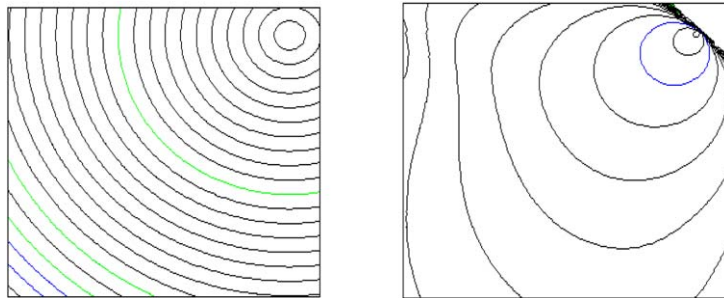


Fig. 2. Exemples de distances symétrique euclidienne et nonsymétrique basée sur les temps de transport.

Fig. 2. Examples of Euclidean and nonsymmetric transport time based metrics.

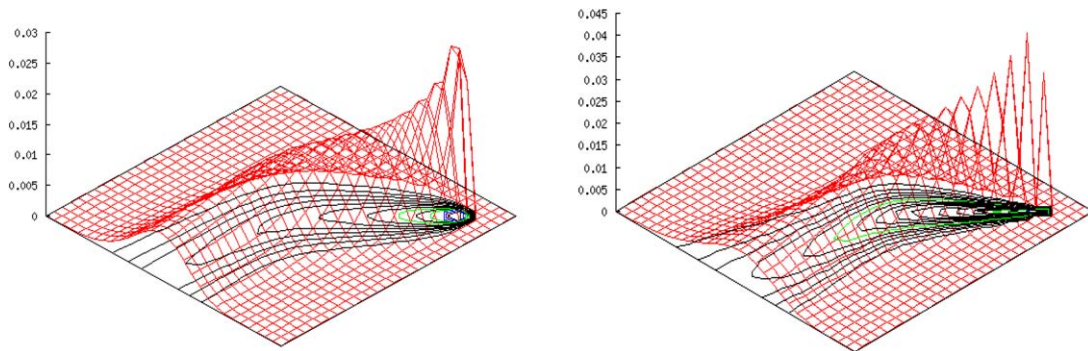


Fig. 3. Solution de similitude généralisée (figure de droite) basée sur un champ de vitesse assimilé à partir de deux points (similaire à Fig. 1) comparée à la solution d'une equation de transport–diffusion par éléments finis pour le même champ. Nous avons évalué la solution de similitude sur tous les points du maillage éléments finis pour comparaison.

Fig. 3. Generalized similitude solution (right) for a 2-point based wind (similar to Fig. 1) compared to a direct simulation with a PDE based transport–diffusion model for the same wind. The similitude solution has been evaluated on all the nodes of the finite element mesh for comparison.

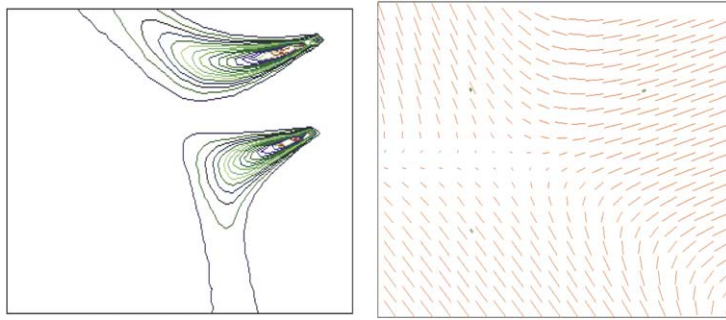


Fig. 4. Un calcul avec deux parcelles pour un champ de vitesse construit à partir de trois points de mesure.

Fig. 4. Multi-agent calculation (2 vineyards) for a 3-point based wind.

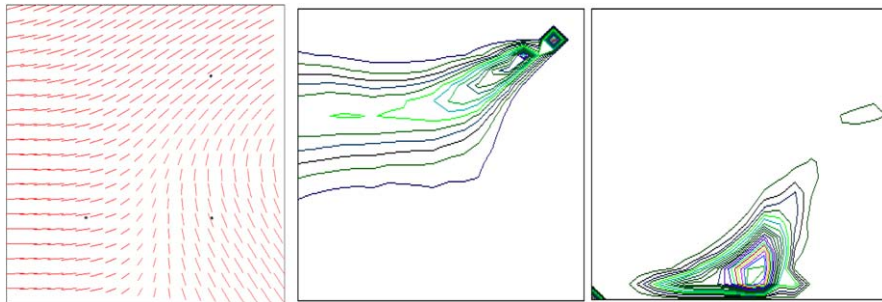


Fig. 5. Gauche : champs de vitesse construit. Milieu : exemple de dispersion à partir d'une parcelle. Droite : sensibilité (gradient) d'une pollution observée au coin bas-gauche du domaine par rapport à la position de la source de la pollution. Ainsi, connaissant les positions des parcelles, on sait identifier les sources d'une pollution observée.

Fig. 5. Left: assimilated flow field. Middle: example of dispersion from one vineyard. Right: solution of the dual problem: a pollution has been observed at the lower left corner and one would like to identify the sources.

Références

- [1] J.-M. Brun, Modélisation à complexité réduite de la dérive, Thèse université Montpellier II, 2007.
- [2] B. Mohammadi, J.-M. Brun, Reduced-order geometrical modelling of dispersion, *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 2006, submitted for publication.
- [3] J. Cousteix, Turbulence et couche limite, Cepadues, 1989.
- [4] L. Hascoet, V. Pascual, TAPENADE 2.1 user's guide, INRIA Technical Report 300, 2004.
- [5] B. Mohammadi, O. Pironneau, *Applied Shape Optimization for Fluids*, Oxford Univ. Press, 2001.