Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Mecanique 334 (2006) 587–592
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Positivité de la dissipation intrinsèque d'une classe de modèles d'endommagement anisotropes non standards

Rodrigue Desmorat

LMT-Cachan, ENS Cachan/Université Paris 6/CNRS, 61, avenue du président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

Reçu le 29 juin 2006 ; accepté le 4 juillet 2006

Disponible sur Internet le 17 août 2006

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

Résumé

Un cadre thermodynamique non standard permet de garantir la positivité de la dissipation due aux mécanismes d'endommagement pour un endommagement représenté par une variable tensorielle d'ordre 2 symétrique. La démonstration de la positivité de la dissipation intrinsèque est donnée. Pour la classe de modèles considérée, un endommagement croissant, aux sens de valeurs propres positives du tenseur taux d'endommagement, suffit à garantir cette positivité, ce qui ouvre de nombreuses perspectives en terme de modélisation. ***Pour citer cet article : R. Desmorat, C. R. Mecanique 334 (2006).***

Abstract

Positivity of intrinsic dissipation of a class of nonstandard anisotropic damage models. A nonstandard thermodynamics framework ensures the positivity of the dissipation due to degradation mechanisms for damage states represented by a symmetric second order tensor. The proof of the positivity of the intrinsic dissipation is given. An increasing damage, in terms of positive principal values of the damage rate tensor, guaranties this positivity for the considered class of models, extending then to induced anisotropy the isotropic case property of a positive damage rate. This result gives many possibilities of modeling for anisotropic damage. ***To cite this article: R. Desmorat, C. R. Mecanique 334 (2006).***

Mots-clés : Endommagement ; Anisotropie ; Effet unilatéral

Keywords: Damage; Anisotropy; Unilateral effect

Abridged English version

In standard thermodynamics framework [1] both the state and the evolution laws derive from potentials, Gibbs free enthalpy $\rho\psi^\star$ written in terms of stress $\boldsymbol{\sigma}$ in the present Note for the first one, a dissipation or pseudo-dissipation potential for the second one. The elasticity law and the strain energy release rate density $\boldsymbol{Y}$, variable associated with the damage variable $\boldsymbol{D}$, are gained as Eq. (1) where $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ denotes the elastic strain tensor. In the standard framework of thermodynamics a pseudo-dissipation potential quadratic function of $\boldsymbol{Y}$ is most often considered, the damage law

Adresse e-mail : rodrigue.desmorat@lmt.ens-cachan.fr (R. Desmorat).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2006.07.015

taking the form (2) with $\dot{\lambda}$ a positive multiplier and $\underline{\boldsymbol{J}}$ a positive fourth order tensor, eventually nonlinear function of the thermodynamics variables, so that the dissipation $\mathcal{D} = \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{D}} = \dot{\lambda}\boldsymbol{Y} : \underline{\boldsymbol{J}} : \boldsymbol{Y}$ due to the degradation mechanisms remains positive for any kind of loading. The choice of damage laws of the form (2) is very restrictive, for instance concerning the possibility to model induced anisotropy directly driven by the strains or the stresses.

A general form for the strain energy coupled with anisotropic damage has been proposed by Ladevèze [2,3], as Eq. (3), with $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2}$ a symmetric tensor and $D_H = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{D}$, where $g(D_H)$ is a positive increasing function of D_H, $1/(1 - \eta D_H)$ for example, and where the a_i ($a_1 \geqslant 0$, $a_3 \geqslant 0$) as well as $\eta > 0$ are material parameters. The first term of Eq. (3) can take different—nonequivalent—forms, Eq. (4) and (5) [2–4], allowing in the last case for the mechanical representation of the quasi-unilateral effect of micro-defects closure, with $\boldsymbol{\sigma}_+$ (resp. $\boldsymbol{\sigma}^D_+$) a special positive part [2,5] built from the eigenvalues and the eigenvectors of $\boldsymbol{H\sigma}$ (resp. of $\boldsymbol{H\sigma}^D$) and with $\langle . \rangle_-$ the negative part in terms of principal components of a tensor. Two examples of strain energy densities are given in Eqs. (6) and (7) with E and ν the Young's modulus and Poisson's ratio of the undamaged material.

Previous elastic energy densities can be continuously differentiated as Eqs. (8), (9) leading to a dissipation due to damage mechanisms expressed as Eq. (10). For the elastic energy densities written with the terms (4) or (5), the first term $2a_1(\boldsymbol{\sigma H \sigma}) : \dot{\boldsymbol{H}}$ must be replaced by $2a_1(\boldsymbol{\sigma}^D \boldsymbol{H} \boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\boldsymbol{H}}$ or $2a_1(\boldsymbol{\sigma}_+ \boldsymbol{H} \boldsymbol{\sigma}_+) : \dot{\boldsymbol{H}}$ or $2a_1(\boldsymbol{\sigma}^D_+ \boldsymbol{H} \boldsymbol{\sigma}^D_+) : \dot{\boldsymbol{H}}$. These terms are next synthetically written $2a_1(\boldsymbol{sHs}) : \dot{\boldsymbol{H}}$. With any damage law leading to a positive damage rate tensor, i.e., with positives eigenvalues $(\dot{\boldsymbol{D}})_J$, the term $\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{D}} = \sum_{J=1}^{3} (\dot{\boldsymbol{D}})_J$ is positive so that $\frac{1}{3}a_3 g'(D_H)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant 0$. It is important to precise that the eigenvalues $(\dot{\boldsymbol{D}})_J$ of $\dot{\boldsymbol{D}}$ are not the derivatives $\dot{D}_J$ of the eigenvalues of $\boldsymbol{D}$ (except in the particular case where $\boldsymbol{D}$ and $\dot{\boldsymbol{D}}$ have the same principal directions), the positivity of the eigenvalues $(\dot{\boldsymbol{D}})_J$ nevertheless implies the increase of the eigenvalues of $\boldsymbol{D}$.

Concerning the term $2a_1(\boldsymbol{sHs}) : \dot{\boldsymbol{H}}$, note that the expression $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2}$ rewritten in terms of principal components (11) gives positive increasing eigenvalues H_J of tensor $\boldsymbol{H}$ which is then also positive and increasing during any damage process. The positivity of the symmetric matrix $(\boldsymbol{sHs})$ is gained by seeking the sign of its eigenvalues, denoted χ, solution of $(\boldsymbol{sHs})\boldsymbol{g} = \chi \boldsymbol{g}$, with $\boldsymbol{g}$ the corresponding eigenvectors. The eigenvalues χ are equivalently solution of (12) with obviously $(\boldsymbol{Hs})^2$ a positive matrix. These eigenvalues take the form (13) and, as ratios of positive terms, are positive. Last, the tensorial product of two symmetric positive tensors $(\boldsymbol{sHs})$ and $\dot{\boldsymbol{H}}$ being positive, one can conclude to the positivity of the intrinsic dissipation $\mathcal{D}$ for any damaging loading, monotonic or not, uniaxial or multiaxial, proportional or nonproportional... at the simple condition extended here to anisotropic damage that the damage rate $\dot{\boldsymbol{D}}$ must remain a positive tensor. Considering conversely the set of states represented by deviatoric tensors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^D$, the dissipation reduced to $2a_1(\boldsymbol{sHs}) : \dot{\boldsymbol{H}} \geqslant 0\ \forall(\boldsymbol{sHs}) \geqslant \boldsymbol{0}$ leads to $\dot{\boldsymbol{H}} \geqslant \boldsymbol{0}$, therefore to the fact that $\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant \boldsymbol{0}$ is a necessary and sufficient condition for the positivity of the dissipation due to damage $\mathcal{D} = \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{D}}$.

This last conclusion opens many possibilities for modeling, some already proposed and used for the damage evolution law [3,6,7], allowing to obtain in a quite simple manner the positivity of the damage rate $\dot{\boldsymbol{D}}$, therefore to automatically guaranty the positivity of the dissipation (at least by considering a state potential of the form (3)). These possibilities are detailed as a damage rate proportional to:

- the positive part of the strain tensor $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$ or to $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^{\alpha}$ with α a damage exponent,
- the absolute value of the plastic strain tensor $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, to the positive part of $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, or to any linear combination $\alpha|\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p| + (1-\alpha)\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_+$,
- a power $2s$ of the stress tensor,
- a linear combination $\alpha\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2 + (1-\alpha)\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-^2$ (eventually at the power s) where to take $\alpha = 1$ will lead to the modeling of the unilateral damage effect of no damage growth in compression, and to take $1/2 < \alpha < 1$ will lead to the modeling of the quasi-unilateral damage effect of a damage growth in compression smaller than in tension.

Induced damage anisotropy governed by the positive extensions is adapted to quasi-brittle materials as concrete. The other expressions will allow us to generalize to the induced anisotropy Lemaitre's damage law $\dot{D} = (Y/S)^s \dot{p}$ of a damage rate governed by the accumulated plastic strain rate $\dot{p}$ and enhanced by the strain energy $Y = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \underline{\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$ (with $\underline{\boldsymbol{E}}$ Hooke's tensor). As possible generalization, one has Eq. (14) where E denotes the Young's modulus and S and s the damage parameters.

To conclude, a non standard thermodynamics framework for induced anisotropic damage guaranties the positivity of the intrinsic dissipation. A proof is given and the scalar feature $\dot{D} \geqslant 0$ of a positive damage rate for isotropic

modeling is extended to anisotropy as the simple feature $\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant 0$ of a positive damage rate tensor. The convexity of the state potential with respect to the damage variable is not necessary. This opens many possibilities of modeling for either quasi-brittle or ductile materials, in monotonic, cyclic or fatigue loading.

1. Introduction

Même si le cadre le plus général pour modéliser l'endommagement anisotrope considère une variable d'endommagement tensorielle d'ordre 4, la représentation de l'endommagement par un tenseur $\boldsymbol{D}$ d'ordre 2 symétrique reste très utilisée. Elle suffit dans bien des applications à reproduire un état orthotrope de micro-fissuration, mais surtout elle conduit en général à un nombre de paramètres d'endommagement plus restreint.

Dans le cadre usuel de la thermodynamique des matériaux solides, les lois d'état dérivent d'un potentiel $\rho\psi^\star$ dont nous considérons ici la forme écrite en contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ (enthalpie libre). La loi d'élasticité et la variable $\boldsymbol{Y}$, taux de restitution de densité d'énergie, associée à $\boldsymbol{D}$ s'écrivent alors classiquement :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\partial \rho\psi^\star}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \qquad \boldsymbol{Y} = \frac{\partial \rho\psi^\star}{\partial \boldsymbol{D}} \tag{1}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ est la déformation élastique.

Dans le cadre standard [1], les lois d'évolution dérivent d'un potentiel (ou pseudo-potentiel) de dissipation fonction des variables associées. Pour l'endommagement anisotrope, cela se traduit par des lois d'évolution fonction du taux de restitution de densité d'énergie de la forme ($\dot\lambda$ est un multiplicateur positif et $\underline{\boldsymbol{J}}$ un tenseur positif d'ordre 4, fonction éventuellement non linéaire des variables thermodynamiques),

$$\dot{\boldsymbol{D}} = \dot\lambda \underline{\boldsymbol{J}} : \boldsymbol{Y} \tag{2}$$

de sorte que la dissipation $\mathcal{D} = \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{D}} = \dot\lambda \boldsymbol{Y} : \underline{\boldsymbol{J}} : \boldsymbol{Y}$ due aux mécanismes d'endommagement est positive pour tous les trajets de chargement. Le choix de lois d'évolution du type (2) est très restrictif, notamment quant au pilotage de l'anisotropie induite de l'endommagement par les déformations ou les contraintes. Par contre, la convexité par rapport aux variables thermodynamiques du potentiel d'état, du potentiel de dissipation, et l'utilisation de schémas numériques implicites, conduit à la robustesse des calculs par éléments finis.

Il est à noter que pour un endommagement isotrope, la dissipation $\mathcal{D}$ prend la forme scalaire $Y\dot{D} \geqslant 0$ conduisant à la simple nécessité d'un d'endommagement croissant pour être satisfaite, pour bien entendu la classe de modèles à taux de restitution d'énergie Y positif. Nous nous proposons dans la présente note d'étendre ce résultat simple d'un endommagement croissant à l'endommagement anisotrope représenté par le tenseur d'ordre 2 symétrique $\boldsymbol{D}$. Pour cela nous devons restreindre les choix possibles pour le potentiel thermodynamique.

2. Potentiels thermodynamiques continûment différentiables

Une forme générale pour l'énergie élastique couplée à l'endommagement ansiotrope a été proposée par Ladevèze [2,3],

$$\rho\psi^\star = a_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}) + a_2 \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} + a_3 g(D_H)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 + a_4(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2 \tag{3}$$

avec $\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2}$ un tenseur symétrique, $D_H = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{D}$, $g(D_H)$ une fonction positive croissante de D_H, $1/(1 - \eta D_H)$ par exemple, et où les a_i ($a_1 \geqslant 0$, $a_3 \geqslant 0$) ainsi que $\eta > 0$ sont des paramètres caractéristiques du matériau. Le premier terme de l'équation précédente peut être écrit en terme de couplage endommagement anisotrope/déviateur des contraintes [3,4] devenant

$$a_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D) \tag{4}$$

D'autres choix—non équivalents—pour ce premier terme permettent de rendre compte des effets quasi-unilatéraux de refermeture partielle des micro-défauts,

$$a_1\big[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+) + \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_- : \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_-\big] \quad \text{ou} \quad a_1\big[\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D_+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D_+) + \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_- : \langle\boldsymbol{\sigma}^D\rangle_-\big] \tag{5}$$

où $\boldsymbol{\sigma}_+$ (resp. $\boldsymbol{\sigma}^D_+$) est une partie positive de $\boldsymbol{\sigma}$ (resp. de $\boldsymbol{\sigma}^D$) conservant le caractère continûment différentiable du potentiel thermodynamique [2,5], construite à partir des valeurs et vecteurs propres de $\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}$ (resp. de $\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D$) et où $\langle.\rangle_-$ désigne la partie négative en termes de valeurs propres d'un tenseur.

Parmi les différents potentiels continûment différentiables précédents modélisant le couplage entre élasticité isotrope et endommagement anisotrope induit, deux approches simples peuvent être mentionnées, une première basée sur la partition des modes déviatorique et hydrostatique,

$$\rho\psi^\star = \frac{1+\nu}{2E}\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D) + \frac{1-2\nu}{6E}\frac{(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2}{1-\eta D_H} \tag{6}$$

une seconde sur la constance du rapport ν/E,

$$\rho\psi^\star = \frac{1}{2E}\operatorname{tr}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}) + \frac{\nu}{2E}\big(\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\sigma} - (\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\big) \tag{7}$$

où E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau non endommagé.

3. Positivité de la dissipation intrinsèque

Les densités d'énergie élastiques précédentes ont la grande qualité d'être continûment différentiables,

$$\mathrm{d}\rho\psi^\star = \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{Y} : \mathrm{d}\boldsymbol{D} \tag{8}$$

soit encore,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\rho\psi^\star = {}& \big[2a_1(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}) + 2a_2\boldsymbol{\sigma} + 2a_3 g(D_H)\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{1} + 2a_4\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{1}\big] : \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}\\ &+ 2a_1(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}) : \mathrm{d}\boldsymbol{H} + \frac{1}{3}a_3 g'(D_H)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\operatorname{tr}\mathrm{d}\boldsymbol{D}\end{aligned} \tag{9}$$

conduisant à une dissipation due aux mécanismes d'endommagement égale à :

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{D}} = 2a_1(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{H}} + \frac{1}{3}a_3 g'(D_H)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{D}} \tag{10}$$

Pour les densités d'énergie écrites avec les termes (4) ou (5) le premier terme $2a_1(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{H}}$ devient $2a_1(\boldsymbol{\sigma}^D\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}^D) : \dot{\boldsymbol{H}}$ ou $2a_1(\boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+) : \dot{\boldsymbol{H}}$ ou encore $2a_1(\boldsymbol{\sigma}_+^D\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}_+^D) : \dot{\boldsymbol{H}}$. Ces termes seront synthétiquement écrits $2a_1(\boldsymbol{s}\boldsymbol{H}\boldsymbol{s}) : \dot{\boldsymbol{H}}$.

Considérons donc toute loi d'endommagement conduisant à un tenseur taux d'endommagement positif, c'est à dire aux valeurs propres $(\dot{\boldsymbol{D}})_J$ chacunes positives (cf. section suivante pour des exemples). Le terme $\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{D}} = \sum_{J=1}^3 (\dot{\boldsymbol{D}})_J$ est naturellement positif de sorte que $\frac{1}{3}a_3 g'(D_H)(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\operatorname{tr}\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant 0$. Il est important de préciser que les valeurs propres de $\dot{\boldsymbol{D}}$, précédemment notées $(\dot{\boldsymbol{D}})_J$, ne sont pas les dérivées $\dot{D}_J$ des valeurs propres de $\boldsymbol{D}$ (sauf dans le cas particulier où $\boldsymbol{D}$ et $\dot{\boldsymbol{D}}$ ont les mêmes directions propres). La positivité des valeurs propres $(\dot{\boldsymbol{D}})_J$, de par la relation $\boldsymbol{n}^T\dot{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{n} = \dot{D}_J$ déduite de la dérivée temporelle du problème aux valeurs propres $\boldsymbol{D}\boldsymbol{n} = D_J\boldsymbol{n}$, $\|\boldsymbol{n}\| = 1$, implique nénmoins la croissance des valeurs propres de $\boldsymbol{D}$. Concentrons alors notre effort sur le terme $2a_1(\boldsymbol{s}\boldsymbol{H}\boldsymbol{s}) : \dot{\boldsymbol{H}}$. La relation $\boldsymbol{H} = (\mathbf{1} - \boldsymbol{D})^{-1/2}$ est réécrite en termes de valeurs propres,

$$H_J = \frac{1}{\sqrt{1-D_J}} \tag{11}$$

les valeurs propres H_J du tenseur $\boldsymbol{H}$ étant donc positives et croissantes durant tout processus endommageant. La positivité de la matrice $(\boldsymbol{s}\boldsymbol{H}\boldsymbol{s})$ est démontrée en cherchant le signe de ses valeurs propres, dénotées χ, solutions de $(\boldsymbol{s}\boldsymbol{H}\boldsymbol{s})\boldsymbol{g} = \chi\boldsymbol{g}$ où $\boldsymbol{g}$ sont les vecteurs propres correspondant. Les valeurs propres χ sont solutions de manière équivalente de

$$(\boldsymbol{H}\boldsymbol{s})^2\,\mathrm{g} = \chi\boldsymbol{H}\,\mathrm{g} \tag{12}$$

avec $(\boldsymbol{H}\boldsymbol{s})^2$ de manière évidente une matrice positive. Ces valeurs propres peuvent être écrites sous la forme suivante,

$$\chi = \frac{\mathrm{g}^T(\boldsymbol{H}\boldsymbol{s})^2\,\mathrm{g}}{\mathrm{g}^T\,\boldsymbol{H}\,\mathrm{g}} \tag{13}$$

qui, comme rapports de termes positifs, sont positives.

Le produit tensoriel de deux tenseurs symétriques positifs $(\boldsymbol{s}\boldsymbol{H}\boldsymbol{s})$ et $\dot{\boldsymbol{H}}$ étant positif, nous pouvons conclure à la positivité de la dissipation intrinsèque $\mathcal{D}$ pour tout chargement endommageant, monotone ou non, uniaxial ou multiaxial, proportionnel ou non proportionnel... à la simple condition que l'endommagement croisse, c'est à dire ici que le tenseur symétrique taux d'endommagement $\dot{\boldsymbol{D}}$ soit un tenseur positif. Réciproquement, considérant l'ensemble des états représentés par les tenseurs déviatoriques $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^D$, la dissipation reduite au terme $2a_1(\boldsymbol{s H s}) : \dot{\boldsymbol{H}} \geqslant 0 \, \forall (\boldsymbol{s H s}) \geqslant \mathbf{0}$ conduit à $\dot{\boldsymbol{H}} \geqslant \mathbf{0}$, soit au final au fait que $\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant \mathbf{0}$ soit une condition nécessaire et suffisante à la positivité de la dissipation due à l'endommagement $\mathcal{D} = \boldsymbol{Y} : \dot{\boldsymbol{D}}$.

4. Lois non standards d'évolution de l'endommagement

Cette dernière conclusion ouvre de multiples possibilités de modélisation. En effet, de nombreuses expressions pour la loi d'évolution de l'endommagement [3,6,7] permettent d'obtenir de manière simple la positivité du taux d'endommagement $\dot{\boldsymbol{D}}$ et donc de manière automatique (tout du moins en considérant un potentiel de la forme (3)) la positivité de la dissipation. Elles sont reprises et même complétées ci-après, le taux d'endommagement étant pour chacune d'elle proportionnel :

– à la partie positive du tenseur des déformation $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+$ ou à une puissance α de ce dernier, $\dot{\boldsymbol{D}} \propto \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_+^{\alpha}$,
– à la valeur absolue du tenseur taux de déformation plastique $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$, à la partie positive de ce dernier ou à toute combinaison linéaire, via le paramètre $\alpha > 0$, de ces possibilités, $\dot{\boldsymbol{D}} \propto \alpha |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p| + (1-\alpha)\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_+$,
– à une puissance $2s$ du tenseur des contraintes, $\dot{\boldsymbol{D}} \propto \boldsymbol{\sigma}^{2s}$, ou à une combinaison linéaire – via le paramètre α – puissance s du carré de la partie positive du tenseur des contraintes et du carré de sa partie négative, $\dot{\boldsymbol{D}} \propto (\alpha \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2 + (1-\alpha)\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-^2)^s$.
  Prendre $\alpha = 1$ conduira à la modélisation du caractère unilatéral de l'endommagement (pas d'endommagement en compression), prendre $1/2 < \alpha < 1$ conduira à la modélisation du caractère quasi-unilatéral d'un endommagement plus faible en compression qu'en traction.

Il est à noter que la modélisation d'une anisotropie induite de l'endommagement gouvernée par les extensions positives est adaptée aux matériaux quasi-fragiles tels que le béton. Que les autres expressions permettent d'envisager des extensions à l'anisotropie induite de la loi d'évolution de l'endommagement isotrope de Lemaitre $\dot{D} = (Y/S)^s \dot{p}$ d'un endommagement gouverné par la plasticité, via la déformation plastique cumulée p, et d'autant plus grand que le taux de restitution de densité d'énergie Y scalaire est grand ($Y = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \underline{\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$ où $\underline{\boldsymbol{E}}$ est le tenseur de Hooke). Citons parmi celles-ci :

$$\dot{\boldsymbol{D}} = \left(\frac{Y}{S}\right)^s \left[\alpha |\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p| + (1-\alpha)\langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \rangle_+\right] \quad \text{ou} \quad \dot{\boldsymbol{D}} = \left(\frac{\alpha \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_+^2 + (1-\alpha)\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_-^2}{2ES}\right)^s \dot{p} \tag{14}$$

où E est le module d'Young du matériau et S et s sont les paramètres d'endommagement.

5. Conclusion

Un cadre thermodynamique non standard pour la modélisation de l'anisotropie induite de l'endommagement permet de garantir la positivité de la dissipation. Une démonstration en est donnée et l'énoncé simple pour un endommagement scalaire que l'endommagement ne peut que croître est étendu à l'anisotropie induite, la condition $\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant 0$ étant alors une condition suffisante à la positivité de la dissipation. Ce résultat ouvre de nombreuses possibilités de modélisation dont certaines se sont et peuvent encore s'avérer efficaces, aussi bien pour les matériaux quasi-fragiles que pour les matériaux ductiles en chargements monotones, cycliques ou de fatigue. Enfin, il est à noter qu'il n'est pas nécessaire dans le présent cadre de demander au potentiel d'état d'être convexe par rapport à la variable d'endommagement, ni pour garantir la positivité de la dissipation, ni pour obtenir de bonnes propriétés numériques.

Références

[1] B. Halphen, Q.S. Nguyen, Sur les matériaux standards généralisés, J. de Mécanique 14 (1975) 39–63.
[2] P. Ladevèze, On an anisotropic damage theory, in: J.P. Boehler (Ed.), Proc. CNRS Int. Coll. 351 Villars-de-Lans, Failure Criteria of Structured Media (1983), 1993, pp. 355–363.
[3] J. Lemaitre, R. Desmorat, Engineering Damage Mechanics, Springer, Berlin, 2005.
[4] E. Papa, A. Talierco, Anisotropic damage model for the multi-axial static and fatigue behaviour of plain concrete, Engrg. Fracture Mech. 55 (1996) 163–179.

[5] R. Desmorat, Dissymétrie de comportement élastique anisotrope couplé ou non à l'endommagement, C. R. Acad. Sci. Paris Série IIb 328 (2000) 445–450.
[6] A. Dragon, D. Halm, Modélisation de l'endommagement par mésofissuration : comportement unilatéral et anisotropie induite, C. R. Acad. Sci. Série IIb 322 (1996) 275–282.
[7] R. Billardon, C. Pétry, Creep damage behaviour of a copper alloy on a large temperature range, in: ASME/ASCE/SES Conference on Mechanics and Materials (McMat2005), 1–3 juin 2005, Baton Rouge, Louisiana, USA, 2005.