

Développement en polynômes de chaos d'un modèle lagrangien d'écoulement autour d'un profil

Olivier Le Maître^{a,b}

^a *L.M.E.E., université d'Evry, 40, rue du Pelvoux, CE1455, 91020 Evry cedex, France*

^b *LIMSI-CNRS, UPR 3251, BP 133, 91403 Orsay cedex, France*

Reçu le 10 février 2006 ; accepté après révision le 26 septembre 2006

Présenté par David Ruelle

Résumé

On présente un développement par polynômes de chaos (PC) d'un modèle lagrangien de l'écoulement stochastique d'un fluide parfait autour d'un profil portant. L'écoulement est représenté par une distribution de tourbillons sur la surface du profil et par des tourbillons ponctuels lagrangiens modélisant le sillage. Une technique originale est proposée pour le calcul des coefficients de PC des vitesses induites par ces tourbillons. Deux exemples de simulation pour des mouvements aléatoires du profil démontrent la capacité de la méthode à traiter des situations complexes. *Pour citer cet article : O. Le Maître, C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Polynomial chaos expansion of a Lagrangian model for the flow around an airfoil. A polynomial chaos (PC) expansion of the Lagrangian model for the stochastic incompressible inviscid flow around an airfoil is presented. The flow field is modeled using a distribution of lumped vortices on the airfoil surface while the wake is modeled with Lagrangian point vortices. An original technique is proposed for the computation of the PC coefficients of the velocities induced by the vortices. Two computational examples for random airfoil motions are provided to illustrate the capability of the method to deal with complex situations. *To cite this article: O. Le Maître, C. R. Mecanique 334 (2006).*

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Méthode lagrangienne ; Problème stochastique ; Polynômes de chaos

Keywords : Computational fluid mechanics; Lagrangian method; Stochastic problem; Polynomial chaos

Abridged English version

As the accuracy and performance of numerical models progress, it becomes essential to consider the probabilistic character and the uncertainties associated with real life situations. Spectral techniques based on polynomial chaos (PC) expansions [1] have demonstrated their efficiency in dealing with parametric uncertainties and have been applied to a large variety of problems. PC expansions have been previously applied to the resolution of stochastic flows

Adresse e-mail : olm@iup.univ-evry.fr (O. Le Maître).

in Eulerian formulations (e.g. the Navier–Stokes equations [2], see also [3] for a review of previous works). This work investigates the possible use of PC expansions in Lagrangian flow models. To this end, a simple model for the 2D flow around an airfoil is considered. This model is described in Section 2 and is based on incompressible, inviscid fluid assumptions. Provided that the angle of attack is small, one can consider that the flow remains attached to the airfoil and is irrotational everywhere, except on the solid boundary and in the wake which is then a surface with vanishing thickness. With these assumptions, the flow field can be decomposed into inflow velocity \mathbf{u}_∞ , airfoil perturbation \mathbf{u}_p and wake-induced velocity \mathbf{u}_ω . Following [4], the perturbation of the airfoil can be modeled using a set of N_e lumped vortices with total circulations γ_i at prescribed locations \mathbf{y}_i distributed on the solid surface \mathcal{P} , where a slip-free condition applies. \mathbf{u}_p is thus given by Eq. (1), while the slip-free condition is enforced at N_e control points \mathbf{x}_i , resulting in the linear system of Eqs. (2) for the airfoil circulations. The Kelvin theorem states that the total circulation of the flow remains constant so that any change in the airfoil total circulation $\Gamma_p = \sum_{i=1}^{N_e} \gamma_i$ has to be balance by an emission of circulation. This constraint is enforced by introducing a new point vortex in the fluid domain from the airfoil trailing edge at every time-step. This point vortex has an initial position \mathbf{X}_i given by Eq. (3), where \mathbf{u}^+ and \mathbf{u}^- are the velocities measured at trailing edge intrados and extrados control points. Its circulation is $\gamma_i^\omega = \Gamma_p(t_{i-1}) - \Gamma_p(t_i)$. The velocity field induced by the wake is given by Eq. (4). The dynamics of the point vortices is governed by Eq. (5) which states that they are convected by the flow while their circulations are kept unchanged. Because \mathbf{u}_ω appears in the right-hand side of system (2) but depends on its solutions γ_j , through the characteristic of the newly emitted vortex, an iterative fixed-point method is used to obtain compatible airfoil circulations and γ_i^ω , \mathbf{X}_i at time t_i . When this is achieved, the Lagrangian vortex are then convected using a 3rd order Runge–Kutta scheme, with frozen airfoil circulations, up to time t_{i+1} . This step completes the advancement of the solution and a new time-step can be considered.

So far, the probabilistic character of the flow has not been accounted for. It is assumed that it comes from random inflow and airfoil velocities. It is further assumed that these velocities are second order quantities and can be written as functionals of a random vector $\boldsymbol{\xi}(\theta)$ of N uncorrelated normalized Gaussian random variables. These functionals are in turn expanded as PC series truncated to an order N_o : $\mathbf{u}_\infty(t, \theta) = \sum_{k=0}^{N_o} \{\mathbf{u}_\infty\}_k(t) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}(\theta))$, $\mathbf{u}_o(t, \theta) = \sum_{k=0}^{N_o} \{\mathbf{u}_o\}_k(t) \Psi_k(\boldsymbol{\xi}(\theta))$. In these expansions, the functions Ψ_k are orthogonal (uncorrelated) polynomials in $\boldsymbol{\xi}$, which are Hermite polynomials for the Gaussian measure (see Eq. (8)). Consequently, all other flow unknowns are also random and have similar PC expansions, with coefficients to be determined. To derive a computational approach for these PC coefficients, the expansions are introduced in the model equations which are then projected on the PC basis. This procedure gives a set of $P + 1$ uncoupled linear problems for the PC coefficients of the airfoil circulations (Eq. (9)) while the emission point and convection equation for the Lagrangian vortices are given by Eqs. (10), (11). It is remarked that the time-stepping procedure described previously can be applied, provided that one can compute the PC coefficients of the random fields \mathbf{u}_p and \mathbf{u}_ω . In fact, these computations reduce to the elementary evaluation of the velocity induced at \mathbf{x} by a vortex with circulation γ , located at point \mathbf{y} , where for the general situation \mathbf{x} , \mathbf{y} and γ are given by PC expansions. The PC coefficients of the velocity are given by Eq. (12) where $\{\boldsymbol{\Delta}\}_m = \{\mathbf{x}\}_m - \{\mathbf{y}\}_m$. Instead of relying on a sampling strategy to compute the rhs of Eq. (12), which would be too expensive, our model requiring multiple velocity evaluations, a pseudo-spectral approximation is developed. First, the PC coefficients of the squared distance R^2 between the influent and observation points are determined through exact Galerkin projection of the scalar product $R^2 = \boldsymbol{\Delta} \cdot \boldsymbol{\Delta}$, see Eq. (13); the PC coefficients of $1/R^2$ are subsequently determined by applying the definition $R^2 \times 1/R^2 = 1$ yielding Eq. (14). The velocity computation is completed by applying two successive Galerkin products with γ and then the respective components of $\mathbf{k} \wedge \boldsymbol{\Delta}$. Since intermediate calculations are truncated, this procedure does not yield in general the exact value given by Eq. (12), but the error can be made arbitrarily small, at least in theory, by increasing the computation order N_o . Also, the induced velocity is known to be singular as $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$, such that a regularization procedure is necessary. The regularization is here simply implemented by adding a small deterministic constant $\varepsilon^2 \Psi_0 > 0$ to R^2 before its inversion.

Two computational examples are provided for an airfoil (NACA0012) at 0 expected angle of attack in a deterministic inflow with unit magnitude and random transverse motions. All quantities are normalized using the inflow velocity and airfoil chord length as references. We set $\Delta t = 0.1$, $N_e = 60$ and $\varepsilon = 0.2$. In the first example, the transverse motion consists in a sinusoidal velocity with period $T = 4$ and random amplitude $A(\theta)$ having log-normal distribution with median value $1/30$ and coefficient of variation 3. Numerical tests have shown that $N_o = 3$ gives well-converged results. The results for $N_o = 5$ are reported in Fig. 1 in terms of 95% confidence intervals for the wake location and fluid loads. The second example corresponds to a transverse motion being a random process modeled as a Gaussian

truncated white-noise with cut-off frequency $f_c = 1/8$ and standard deviation $\sigma = 0.05$. From the Karhunen–Loève expansion of the correlation kernel of this process [8], we have $v_o(t, \theta) \approx \sum_{k=1}^{k=N} \{v_o\}_k(t) \xi_k(\theta)$, which for $N = 8$ and a simulation in the time-interval $[0, 20]$ contains more than 99.9% of the theoretical variance. Consequently, the simulation is performed using $N = 8$ and $No = 2$ so there are $P + 1 = 46$ terms in the PC expansions. The simulation results are reported in Fig. 2 and show the 95% confidence interval on the wake location together with a set of realizations reconstructed from the PC expansion by drawing ξ s at random. The figure also highlights the convergence of the fluid-loads statistics toward time-invariant distributions as expected.

The examples demonstrate the possible use of PC expansions in Lagrangian flow models. The approach can be easily generalized to other types of singularities (doublets, sources, ...). The pseudo-spectral approximation of the PC expansions of induced velocities, given by the highly non-linear Biot–Savart kernel, is encouraging but requires further investigations: in other examples (not shown) it can become unstable in areas with high vortex roll-up (occurring for large amplitude/frequency motions). Future efforts should focus on this limitation.

1. Introduction

Les performances et la précision des modèles numériques et des méthodes de résolution progressant, la prise en compte d'aléas, d'incertitudes et du caractère probabiliste des situations réelles devient un objectif de plus en plus nécessaire de la simulation. Pour le traitement des aléas paramétriques, les techniques spectrales par décomposition en polynômes de chaos (PC) [1] ont démontré leur efficacité vis à vis des approches de type Monte Carlo dans de nombreux domaines (élasticité, thermique, acoustique, écoulements dans des milieux poreux, ...). Plus récemment, ces techniques ont été appliquées à des modèles eulériens d'écoulements (notamment les équations de Navier–Stokes [2], voir aussi [3] pour une revue des travaux existants). L'objet du présent article est de démontrer la faisabilité de l'application de ces techniques aux modèles lagrangiens d'écoulement. Dans ce but, nous considérons dans la Section 2 un modèle simple de l'écoulement plan autour d'un profil portant, qui associe une méthode d'éléments de frontière à une discrétisation particulière du sillage [4]. La décomposition en PC de la solution stochastique du modèle ainsi que la méthode de résolution du problème résultant sont décrites dans la Section 3. La Section 4 présente deux exemples de calcul pour apprécier les potentialités de la méthode et les principales remarques découlant de ce travail sont finalement données dans la Section 5.

2. Modèle d'écoulement

Nous supposons le fluide incompressible et non-visqueux et nous restreignons l'étude au cas d'un écoulement plan dans un domaine infini autour d'un profil en faible incidence. Le rotationnel du champ de vitesse est alors nul partout, sauf sur la frontière du profil et dans le sillage qui se réduit à une ligne du plan. On note u_o la vitesse de translation du profil et u_∞, u_p, u_ω les champs de vitesses de l'écoulement incident, induit par le profil et par le sillage respectivement. Le problème est formulé dans un repère attaché au profil, de surface \mathcal{P} sur laquelle s'applique une condition de glissement. Le champ de vitesse induit par le profil peut se représenter par une distribution de singularités sur \mathcal{P} . La surface \mathcal{P} est discrétisée en Ne segments rectilignes auxquels on attache des tourbillons ponctuels de circulations γ_i ($i = 1, \dots, Ne$) et de positions y_i , situés au premier quart des segments (orientés du bord d'attaque vers le bord de fuite) [4]. Le champ de perturbation est alors

$$u_p(x) = \sum_{i=1}^{Ne} \gamma_i \frac{k \wedge (x - y_i)}{2\pi \|x - y_i\|^2} \tag{1}$$

La condition de glissement est vérifiée aux points de contrôles x_i positionnés aux trois quarts de chaque segment. On obtient le système d'équations linéaires suivant pour les circulations :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1Ne} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{Ne1} & \cdots & A_{NeNe} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{Ne} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_\infty + u_\omega - u_o)(x_1) \cdot n(x_1) \\ \vdots \\ (u_\infty + u_\omega - u_o)(x_{Ne}) \cdot n(x_e) \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = \frac{k \wedge (x_i - y_j)}{2\pi \|x_i - y_j\|^2} \cdot n(x_i) \tag{2}$$

où n est la normale unitaire extérieure au profil. Notons $\Gamma_p = \sum_{i=1}^{Ne} \gamma_i$ la circulation totale des tourbillons attachés. Le théorème de Kelvin implique que la circulation totale de l'écoulement se conserve au cours du temps. Cette condition

est satisfaite par l'émission à chaque pas de temps de tourbillons ponctuels (libres) depuis le bord de fuite [5,4]. Ainsi le tourbillon émis entre les instants t_{i-1} et $t_i = t_{i-1} + \Delta t$ porte une circulation $\gamma_i^\omega = \Gamma_p(t_{i-1}) - \Gamma_p(t_i)$ et sa position initiale $\mathbf{X}_i(t_i)$ est donnée par :

$$\mathbf{X}_i(t_i) = \mathbf{x}_{BF} + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{u}^+(t_i) + \mathbf{u}^-(t_i)] \tag{3}$$

où \mathbf{x}_{BF} est la position du bord de fuite et \mathbf{u}^+ , \mathbf{u}^- sont les vitesses relatives mesurées aux points de contrôle des deux segments voisins du bord de fuite. Le champ de vitesse induit par le sillage est alors donné par la superposition des vitesses induites par l'ensemble des tourbillons libres :

$$\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_i \frac{\gamma_i^\omega \mathbf{k} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t))}{2\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{X}_i(t)\|^2} \tag{4}$$

Ces tourbillons sont transportés par l'écoulement et conservent leur intensité :

$$\frac{d\gamma_i^\omega}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{u}_\infty(t) - \mathbf{u}_o(t) + \mathbf{u}_p(\mathbf{X}_i, t) + \mathbf{u}_\omega(\mathbf{X}_i, t) \tag{5}$$

La solution étant connue à l'instant t_{i-1} , les circulations des tourbillons liés est mise à jour selon l'Éq. (2). Il en résulte une variation de Γ_p qui permet d'obtenir les caractéristiques du nouveau tourbillon émis au temps t_i selon l'Éq. (3). Ce nouveau tourbillon affecte le membre de droite du système (2) : une technique itérative de point fixe est utilisée déterminer les circulations liées et les caractéristiques du tourbillon émis compatibles. Généralement de 3 à 10 itérations sont nécessaires. Ensuite l'Éq. (5) est utilisée pour convecter les tourbillons du sillage, par un schéma de Runge–Kutta d'ordre 3, les circulations du profil étant figées. Une nouvelle itération temporelle peut alors débiter.

3. Développement en polynômes de chaos

Soit un espace probabilisé (Θ, σ, μ) usuel. Toute variable aléatoire (VA) du second ordre $u(\theta \in \Theta)$ peut se décomposer sous la forme d'un développement en polynômes de chaos (PC) :

$$\begin{aligned} u(\theta) = & u_0 \Gamma_0 + \sum_{i=1}^{\infty} u_i \Gamma_1(\xi_i(\theta)) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i u_{ij} \Gamma_2(\xi_i(\theta), \xi_j(\theta)) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^j u_{ijl} \Gamma_3(\xi_i(\theta), \xi_j(\theta), \xi_l(\theta)) + \dots \end{aligned} \tag{6}$$

où les ξ_i sont des VAs normales centrées réduites indépendantes et Γ_k est le chaos homogène d'ordre k (voir [6,7]). Dans l'Éq. (6) l'égalité est au sens de la moyenne quadratique. Ce développement doit être tronqué en ordre et en nombre de VAs. On note No l'ordre de troncature et N le nombre de VAs indépendantes (dimension du germe). La dimension du germe est le nombre de paramètres aléatoires utilisés pour représenter les quantités aléatoires d'entrée du problème (voir les exemples ci-dessous) ; L'ordre no gouverne la précision du développement. Après troncature, le développement en PC peut se réécrire selon

$$u(\theta) = \sum_{k=0}^P \{u\}_k \Psi_k(\xi(\theta)) + \text{T.O.S.}, \quad \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}, \quad P + 1 = \frac{(\text{No} + N)!}{\text{No!N!}} \tag{7}$$

où les Ψ_k sont les polynômes orthogonaux (de Hermite) que l'on indice par degré total croissant. L'égalité du développement en PC Éq. (7) est au sens de la moyenne quadratique. L'orthogonalité est elle définie pour le produit scalaire, noté par des crochets, correspondant à l'espérance mathématique :

$$\langle \Psi_k \Psi_l \rangle \equiv \int_{\Theta} \Psi_k(\xi(\theta)) \Psi_l(\xi(\theta)) d\mu(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_k(\xi) \Psi_l(\xi) p(\xi) d\xi, \quad p(\xi) = \prod_{i=1}^N \frac{[\exp(-\xi_i^2/2)]}{\sqrt{2\pi}} \tag{8}$$

Pour appliquer le développement en PC au modèle d'écoulement, et pour fixer les idées, supposons que la géométrie du profil est déterministe, mais que les vitesses incidentes et du profil sont des données aléatoires ayant pour développements respectifs $\mathbf{u}_\infty(t, \theta) = \sum_{k=0}^P \{u_\infty\}_k(t) \Psi_k(\xi(\theta))$, $\mathbf{u}_o(t, \theta) = \sum_{k=0}^P \{u_o\}_k(t) \Psi_k(\xi(\theta))$. Alors, les circulations du

profil, les positions et circulations des tourbillons du sillage deviennent aléatoires et admettent aussi un développement en PC sur la même base, par exemple $\gamma_i^\omega(\theta) = \sum_k \{\gamma_i^\omega\}_k \Psi_k$. Pour calculer les coefficients des développements de ces quantités, on procède par projection de Galerkin en exploitant l'orthogonalité des PC. Ainsi, l'Éq. (2) devient : pour $k = 0, \dots, P$

$$\sum_{j=1}^{Ne} A_{ij} \{\gamma_j\}_k = (\{\mathbf{u}_\infty\}_k + \{\mathbf{u}_\omega\}_k - \{\mathbf{u}_o\}_k)(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, Ne \tag{9}$$

où $\{\mathbf{u}_\omega\}_k$ est donnée par le projection sur Ψ_k de l'Éq. (4). On voit donc que du fait de la géométrie déterministe du profil, la matrice d'influence est certaine et les modes stochastiques des circulations du profil sont solutions de $P + 1$ problèmes linéaires découplés. De plus, le coefficient $\{\Gamma_p\}_k$ de la circulation du profil est la somme des coefficients $\{\gamma_i\}_k$, alors que ceux de la circulation du tourbillon émis sont $\{\gamma_i^\omega\}_k = \{\Gamma_p(t_{i-1})\}_k - \{\Gamma_p(t_{i-1})\}_k$. La position du tourbillon émis est

$$\mathbf{X}_i(t_i, \theta) = \mathbf{x}_{BF} \Psi_0 + \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=0}^P [\{\mathbf{u}^+\}_k + \{\mathbf{u}^-\}_k] \Psi_k(\xi(\theta)) \tag{10}$$

tandis que l'équation de convection des tourbillons libres devient :

$$\frac{d\{\mathbf{X}_i\}_k}{dt} = \{\mathbf{u}_\infty\}_k(t) - \{\mathbf{u}_o\}_k(t) + \{\mathbf{u}_p(\mathbf{X}_i, t)\}_k + \{\mathbf{u}_\omega(\mathbf{X}_i, t)\}_k, \quad k = 0, \dots, P \tag{11}$$

On observe ainsi que la structure du modèle décrit dans la section précédente est préservée lors de l'introduction du développement en PC et que la technique de résolution peut être à nouveau employée, à la condition que l'on puisse évaluer les coefficients des champs de vitesses intervenant dans les Éqs. (9)–(11). Ces calculs de vitesses se ramènent tous au calcul élémentaire de la vitesse \mathbf{u} d'un tourbillon, de circulation γ et de position \mathbf{y} , induite en un point \mathbf{x} . Dans le cas le plus général, γ , \mathbf{y} et \mathbf{x} sont donnés par des développements en PC et on cherche celui de \mathbf{u} . Du fait de l'orthogonalité des Ψ_k on a

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}_k = \frac{k}{2\pi \langle \Psi_k^2 \rangle} \wedge \left\langle \Psi_k \frac{\sum_l \sum_m \{\gamma\}_l \{\Delta\}_m \Psi_l \Psi_m}{\sum_l \sum_m \{\Delta\}_l \cdot \{\Delta\}_m \Psi_m \Psi_n} \right\rangle \tag{12}$$

où on a noté $\{\Delta\}_m = \{\mathbf{x}\}_m - \{\mathbf{y}\}_m$. Le membre de droite de l'Éq. (12) peut être calculé par quadrature/cubature numérique, mais cela est coûteux en temps de calcul quand la dimension du germe augmente. Une technique approchée (pseudo-spectrale) a donc été développée. Tout d'abord on évalue le développement en PC du dénominateur, que l'on note R^2 :

$$\{R^2\}_k = \sum_{l=0}^P \sum_{m=0}^P C_{klm} \Delta_l \cdot \Delta_m, \quad C_{klm} = \frac{\langle \Psi_k \Psi_l \Psi_m \rangle}{\langle \Psi_k^2 \rangle} \tag{13}$$

Ce calcul est exact et le tenseur creux C_{klm} peut être calculé une seule fois lors de la simulation, puis stocké. Le dénominateur est ensuite inversé. Puisque $(1/R^2)R^2 = 1 = \Psi_0$, les coefficients de $(1/R^2)$ sont solution du système linéaire pour $k = 0, \dots, P$:

$$\sum_{i=0}^P B_{ki} \{1/R^2\}_i = \delta_{k0}, \quad \text{avec } B_{ki} = \sum_{j=0}^P C_{kji} \{R^2\}_j \tag{14}$$

Le résultat est ensuite multiplié par γ , en appliquant de nouveau le produit de Galerkin : $\{\gamma/R^2\}_k = \sum_l \sum_m C_{klm} \{\gamma\}_l \times \{1/R^2\}_m$. Finalement, le k -ième coefficient de la vitesse est obtenu en effectuant un dernier produit : $\{\mathbf{u}(\mathbf{x})\}_k \approx \frac{1}{2\pi} \sum_l \sum_m C_{klm} \{\gamma/R^2\}_l \{\mathbf{k} \wedge \Delta\}_m$. Notons que le résultat de cette chaîne de calcul n'est pas exact, compte tenu de la troncature effectuée à chacune des étapes. Cependant, si No est assez grand, l'erreur résultante est négligeable. D'autre part, le conditionnement de la matrice $[B]$ peut être critique et il est nécessaire de régulariser l'inversion de R^2 comme dans la formulation déterministe d'ailleurs, le noyau de Biot et Savart devenant singulier quand $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$. La régularisation est ici effectuée en ajoutant une constante de régularisation $\varepsilon^2 > 0$ à R^2 avant de procéder à son inversion.

4. Exemples

Nous présentons deux exemples de calcul pour un profil NACA0012 avec un angle d’attaque nul. Dans les deux cas, la vitesse incidente est déterministe et seule \mathbf{u}_o est aléatoire. Les grandeurs physiques sont toutes normalisées en utilisant la longueur de corde du profil et la vitesse de l’écoulement incident comme grandeurs de référence. On utilise $Ne = 60$, $\Delta t = 0,1$, $\varepsilon = 0,2$.

Dans le premier exemple, le profil est animé d’une vitesse sinusoïdale transverse à \mathbf{u}_∞ , de période réduite $T = 4$ et d’amplitude aléatoire $A(\theta)$. L’amplitude suit une distribution log-normale avec une valeur médiane de $1/30$ et un coefficient de variabilité de 3 (soit $P(A(\theta) \in]1/90, 1/10]) = 0,95$). La dimension du germe est $N = 1$ et la vitesse transverse a pour expression $v_o(t, \theta) = \exp(\mu + \sigma \xi(\theta))$ où $\mu = \log(1/30)$, $\sigma = \log(3)/2,95$ et $\xi \sim N(0, 1)$. Le calcul est répété pour $No = 1, 2, \dots, 5$. On observe que $No = 3$ fournit des résultats convergés à la troisième décimale. Les résultats pour $No = 5$ sont résumés dans la Fig. 1 où sont tracés à $t = 20$ le sillage moyen ($\langle X \rangle$) ainsi que son enveloppe de confiance contenant 95% des réalisations. Sur la seconde ligne de la Fig. 1, on présente les intervalles de confiance (à 95% de probabilité) des efforts de traînée (à gauche) et de portance (au centre) ainsi que la densité de probabilité de la portance (à droite) durant une période du mouvement. Les deux premières courbes montrent aussi des signaux $f_x(t, \theta)$ et $f_y(t, \theta)$ pour 10 réalisations de $\xi(\theta)$ sélectionnées aléatoirement.

Le second exemple correspond à la même situation, excepté que la vitesse transverse du profil $v_o(t, \theta)$ est un processus stochastique gaussien, de moyenne nulle et d’écart type $\sigma = 0,05$. La fonction d’auto-corrélation de ce processus est $C(t, t') = \langle v_o(t, \theta)v_o(t', \theta) \rangle = \sigma^2 \sin(\Omega|t - t'|)/(\Omega|t - t'|)$, ce qui correspond à un bruit blanc tronqué à la fréquence $f_c = \Omega/2\pi$. Ce noyau admet une décomposition orthogonale (de Karhunen–Loève) sur la base de ses fonctions propres. Pour une simulation sur l’intervalle $t \in [0, 20]$ et une fréquence de coupure $f_c = 1/8$, les 8 premiers modes de C contiennent plus de 99,9% de la variance : on utilise un germe de dimension $N = 8$ et on a en définitive $v_o(t, \theta) \approx \sum_{k=1}^8 \{v_o\}_k(t)\xi_k$ où les composantes de ξ sont des gaussiennes normalisées non-corrélées. Les premiers modes $\{v_o\}_k(t)$ sont tracés dans la Fig. 2 avec les reconstructions tronquées correspondantes de $C(t, t)$ et $C(10, t)$. Le calcul est effectué pour $No = 2$, soit $P = 45$. Les résultats sont rassemblés dans la Fig. 2. La courbe du haut montre l’augmentation de l’intervalle de confiance sur la localisation du sillage en aval du profil. On a aussi tracé les sillages correspondant à 10 tirages aléatoires de $\xi(\theta)$ pour mieux apprécier la variabilité contenue dans le

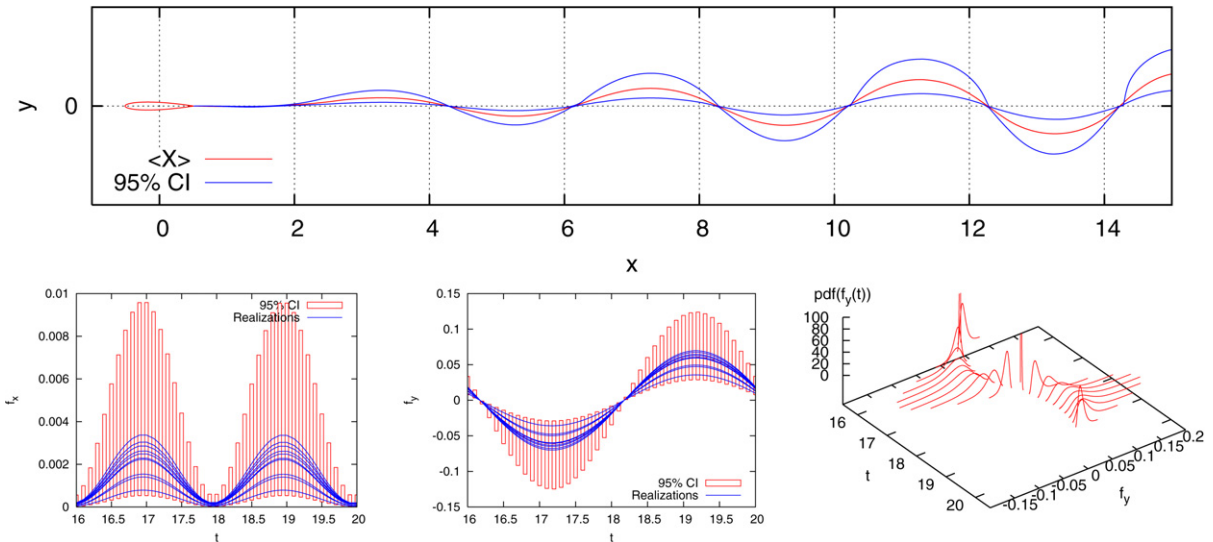


Fig. 1. Résultats du calcul pour $v_o(t, \theta) = A(\theta) \sin(2\pi t/4)$ avec A log-normale. Le calcul utilise $No = 5$. En haut : représentation du sillage moyen et de son intervalle de confiance à 95%. En bas : évolution des efforts de traînée (à gauche) et de portance (au centre) sur une période d’oscillation, données par les intervalles de confiance (95%) et 10 réalisations aléatoires ; densité de probabilité de l’effort de portance à différents instants (à droite).

Fig. 1. Results for $v_o(t, \theta) = A(\theta) \sin(2\pi t/4)$ with A log-normal. Computation with $No = 5$. Top: expectation of the wake location and corresponding 95% confidence interval. Bottom: drag (left) and lift (center) signals during one period of the motion, with 95% confidence intervals and 10 random realizations; probability densities of the lift force at different instants (right plot).

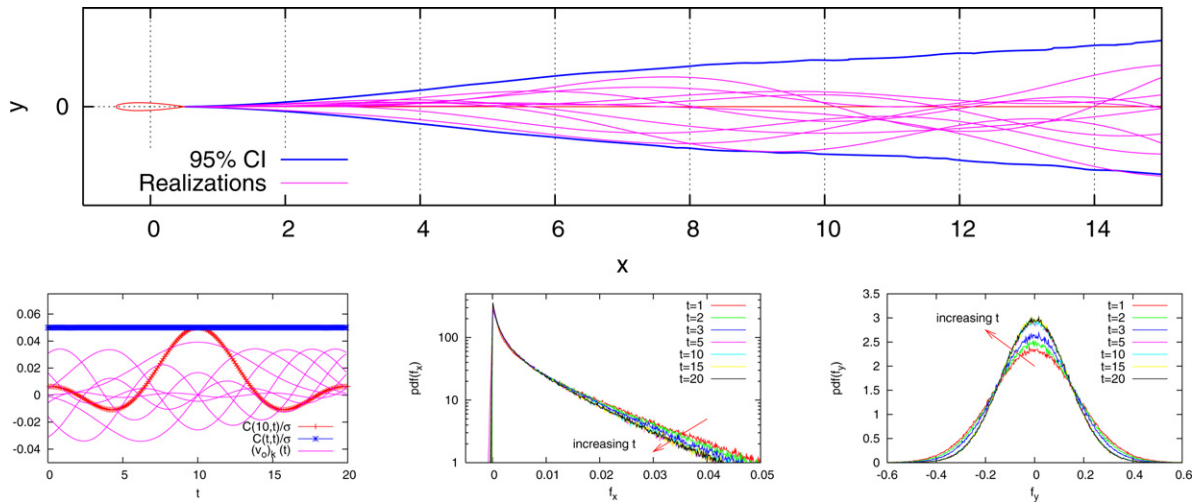


Fig. 2. Résultats pour $v_o(t, \theta)$ bruit blanc tronqué gaussien, $N = 8$, $No = 2$. En haut : intervalle de confiance à 95% sur la localisation du sillage et 10 réalisations aléatoires. En bas : modes de Karhunen–Loève de la vitesse et fonction d’auto-corrélation reconstruite $C(10, t)$ et $C(t, t)$ (à gauche) ; densités de probabilité des efforts de traînée (au centre) et de portance (à droite) à différents instants.

Fig. 2. Results for Gaussian truncated white noise transverse motion $v_o(t, \theta)$, $N = 8$, $No = 2$. Top: 95% confidence interval for the wake location and reconstruction of 10 random realizations. Bottom: Karhunen–Loève modes of the airfoil velocity and corresponding truncated auto-correlation functions $C(10, t)$ and $C(t, t)$ (left); probability density functions of the drag (center) and lift (right) forces at different instants.

développement. La vitesse du profil étant un processus stationnaire, l’écoulement doit lui aussi devenir statistiquement invariant par translation temporelle dès que l’influence des conditions initiales est négligeable. Cette convergence vers une statistique stationnaire est vérifiée et illustrée par les densités de probabilités des efforts à différents instants tracées dans la Fig. 2.

5. Conclusions

Les exemples présentés montrent la faisabilité des développements en PC d’écoulements résolus par des méthodes mixtes d’éléments de frontière et particulière. La méthode proposée peut s’appliquer sans difficulté à d’autres types de singularités (sources, doublets) et le traitement lagrangien du sillage aléatoire constitue à notre connaissance un travail original. La possibilité d’évaluer les développements spectraux des vitesses sur des bases d’ordre modéré, malgré la forte non-linéarité de la loi de Biot et Savart, est un résultat très encourageant pour la suite. D’autres tests ont montré que le calcul peut cependant devenir instable en présence d’enroulements rapides du sillage (mouvements de grande amplitude et/ou haute fréquence) : dans ces zones le degré polynomial nécessaire devient grand et les erreurs de troncature peuvent s’amplifier lors du calcul des vitesses. Plusieurs solutions sont envisageables pour palier ces limitations et optimiser le calcul des vitesses, tant du point de vue de la précision que du coût numérique. Les efforts dans le futur devront porter dans cette direction.

Références

- [1] R.G. Ghanem, P.D. Spanos, Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1991.
- [2] O.P. Le Maître, O.M. Knio, H.N. Najm, R.G. Ghanem, A stochastic projection method for fluid flow. I. Basic formulation, J. Comput. Phys. 173 (2) (2001) 481–511.
- [3] O. Knio, O. Le Maître, Uncertainty propagation in CFD using polynomial chaos decompositions, Fluid Dynam. Res. 38 (2006) 616–640.
- [4] J. Katz, A. Plotkin, Low Speed Aerodynamics, second ed., Cambridge Univ. Press, New York, 2000.
- [5] L. Rosenhead, The formation of vortices from a surface of discontinuity, Proc. Royal Soc. 38 (1931).
- [6] N. Wiener, The homogeneous chaos, Amer. J. Math. 60 (1938) 897–936.
- [7] R.H. Cameron, W.T. Martin, The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier–Hermite functionals, Ann. Math. 48 (1947) 385–392.
- [8] D. Slepian, H. Pollak, Prolate spheroidal wave functions; Fourier analysis and uncertainty—I, Bell System Technical J. (1961) 3–63.