Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Mecanique 335 (2007) 56–60
COMPTES RENDUS
MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Algorithme de type ‘sweeping process’ pour un problème de vibro-impact avec un opérateur d’inertie non trivial

Raoul Dzonou [a], Manuel D.P. Monteiro Marques [b], Laetitia Paoli [a,*]

[a] *LaMUSE, Université de Saint Étienne, 23, rue P. Michelon, 42023 Saint Étienne cedex 2, France*
[b] *CMAF and Faculdade de Ciencias, Universidade de Lisboa, Av. Prof. Gama Pinto, 1649-003 Lisboa, Portugal*

Reçu le 18 octobre 2006 ; accepté le 7 novembre 2006

Disponible sur Internet le 5 décembre 2006

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Nous considérons un système mécanique ayant un nombre fini de degrés de liberté, soumis à une contrainte unilatérale parfaite. Nous supposons que la matrice d’inertie est non triviale et que la loi d’impact est de type Newton, paramétrée par un coefficient de restitution $e \in [0, 1]$. Nous adoptons la formulation du problème proposée par J.J. Moreau sous forme d’une inclusion différentielle et nous proposons une discrétisation en temps par un algorithme de type ‘sweeping process’. Nous démontrons la convergence des solutions approchées vers une solution du problème de vibro-impact. ***Pour citer cet article : R. Dzonou et al., C. R. Mecanique 335 (2007).***

Abstract

‘Sweeping process’ algorithm for a vibro-impact problem with a nontrivial inertia operator. We consider a mechanical system with a finite number of degrees of freedom submitted to a perfect unilateral constraint. We assume that the inertia operator is nontrivial and the impact law consists in the transmission of the tangential component of the velocity and the reflexion of its normal component which is multiplied by the restitution coefficient $e \in [0, 1]$. By adopting the measure-differential formulation of J.J. Moreau, a velocity-based time-stepping method is developed, reminiscent of the catching-up algorithm for sweeping processes. We prove that the numerical solutions converge to a solution of the vibro-impact problem. ***To cite this article: R. Dzonou et al., C. R. Mecanique 335 (2007).***

Mots-clés : Dynamique des systèmes rigides ou flexibles ; Contrainte unilatérale parfaite ; ‘Sweeping process’

Keywords: Dynamics of rigid or flexible systems; Perfect unilateral constraint; Sweeping process

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : dzonou@yahoo.com (R. Dzonou), mmarques@ptmat.fc.ul.pt (M.D.P. Monteiro Marques), laetitia.paoli@univ-st-etienne.fr (L. Paoli).

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2006.11.002

Abridged English version

We consider a mechanical system with d degrees of freedom. We denote by $q \in E := \mathbb{R}^d$ its representative point in generalized coordinates and by $M(q)$ the inertia operator which is a symmetric and definite positive (s.d.p.) $d * d$ matrix. The system is submitted to a single perfect unilateral constraint, which is described by the following relation:

$$q(t) \in L = \{q \in E\colon\ g(q) \leqslant 0\}$$

Since we expect discontinuous velocities when the constraint is active, i.e. when $g(q(t)) = 0$, an appropriate functional framework is to look for a motion q such that $\dot{q}$ is a function of bounded variation. It follows that $\dot{q}$ has right and left limits, $\dot{q}(t+0)$ and $\dot{q}(t-0)$. We can introduce the Stieltjes measure $\ddot{q} = \mathrm{d}\dot{q}$ and the dynamics is given by:

$$q(t) = q(0) + \int_0^t \dot{q}(s)\,\mathrm{d}s$$

and

$$M(q)\,\mathrm{d}\dot{q} = f\big(t, q, M(q)\dot{q}\big)\,\mathrm{d}t + \mu$$

where μ is a measure describing the reaction when the constraint is active while the term f assembles the forces except for the contact reaction. Since the contact is frictionless, we obtain the following measure differential inclusion:

$$M(q)\,\mathrm{d}\dot{q} - f\big(t, q, M(q)\dot{q}\big)\,\mathrm{d}t \in -N_L(q)$$

More precisely

$$\operatorname{supp}(\mu) \subseteq \big\{t\colon\ g\big(q(t)\big) = 0\big\}$$

$$-\mu \in N_L(q) = \begin{cases} \{\lambda \nabla g(q)\colon\ \lambda \geqslant 0\} & \text{if } q \in \partial L \\ \{0_E\} & \text{if } q \in \operatorname{Int} L \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

We define the set of kinematically admissible right-velocities by:

$$V(q) = \begin{cases} \{v \in E\colon\ \nabla g(q).v \leqslant 0\} & \text{if } g(q) \geqslant 0 \\ E & \text{if } g(q) < 0 \end{cases}$$

where $w.v$ denotes the Euclidean scalar product of vectors w and v. The constitutive impact law is given by:

$$\dot{q}(t+0) = -e\dot{q}(t-0) + (1+e)\operatorname{proj}_{q(t)}\big(\dot{q}(t-0), V\big(q(t)\big)\big)$$

where proj_q denotes the projection relatively to the local kinetic metric defined by the inertia operator $M(q)$ and $e \in [0, 1]$ is a restitution coefficient.

Using J.J. Moreau's formulation [1], we consider the following Cauchy problem:

Problem (P). Letting $q_0 \in L$ and $u_0 \in V(q_0)$, find a function $u\colon I := [0, \tau] \to E$ (with $\tau > 0$) of bounded variation such that u and the function q defined by:

$$q(t) = q_0 + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I$$

satisfy

$$\begin{cases} u(0+0) = u_0 \\ f(t, q, M(q)u)\,\mathrm{d}t - M(q)\,\mathrm{d}u \in N_{V(q(t))}\big(\frac{u(t+0)+eu(t-0)}{1+e}\big) \end{cases}$$

where this measure differential inclusion means that for some positive measure λ on I there exist densities $u'_\lambda = \mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda$ and $t'_\lambda = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda$ which are integrable functions with respect to λ, such that for λ-almost every $t \in I$:

$$f\big(t, q(t), M\big(q(t)\big)u(t)\big)t'_\lambda(t) - M\big(q(t)\big)u'_\lambda(t) \in N_{V(q(t))}\left(\frac{u(t+0)+eu(t-0)}{1+e}\right)$$

By using the 'sweeping process' technique [1,2] we propose the following time-stepping algorithm:

$$\begin{cases} q_{n,0} = q_0 \\ u_{n,0} = -eu_0 + (1+e)\,\mathrm{proj}_{q_0}(u_0, V(q_0)) = u_0 \end{cases}$$

and for $i \geqslant 0$

$$\begin{cases} q_{n,i+1} = q_{n,i} + hu_{n,i} \\ u_{n,i+1} = -eu_{n,i} + (1+e)\,\mathrm{proj}_{q_{n,i+1}}(u_{n,i} + \frac{h}{1+e}M^{-1}(q_{n,i+1})f_{n,i+1}, V(q_{n,i+1})) \end{cases}$$

with $f_{n,i+1} = f(t_{n,i+1}, q_{n,i+1}, M(q_{n,i+1})u_{n,j(i)})$, and $j(i) = i$ if we use an explicit version of the scheme or $j(i) = i+1$ if we use an implicit version.

By interpolation we construct a sequence of approximate positions and velocities $(q_n, u_n)_{n\geqslant 1}$ and we prove the convergence to a solution of problem (P) under the following assumptions:

(H1) The function g belongs to $C^{1,1/2}(E, \mathbb{R})$ and ∇g does not vanish in a neighbourhood of the hypersurface $\{q \in E\colon g(q) = 0\}$,
(H2) the function f is continuous from $[0, T] \times E \times E$ (with $T > 0$) to E, and is locally Lipschitz continuous with respect to its second and third arguments,
(H3) the mapping M is of class C^1 from E to the set of symmetric definite positive (s.d.p.) $d * d$ matrices.

1. Formulation du problème

Nous nous intéressons au mouvement d'un système mécanique ayant un nombre fini d de degrés de liberté dont la position en coordonnées généralisées est définie par une fonction $q : I := [0, \tau] \to E := \mathbb{R}^d$ (avec $\tau > 0$). Le système est soumis à une contrainte unilatérale parfaite décrite par :

$$q(t) \in L = \{q \in E\colon\ g(q) \leqslant 0\} \quad \forall t \in I$$

Lorsque la contrainte est active, i.e. quand $g(q(t)) = 0$, la transmission des vitesses est donnée par une loi d'impact de type Newton :

$$\dot q(t+0) = -e\dot q(t-0) + (1+e)\,\mathrm{proj}_{q(t)}\big(\dot q(t-0), V\big(q(t)\big)\big)$$

où $e \in [0, 1]$ est un coefficient de restitution et proj_q désigne la projection relativement à la métrique cinétique définie par l'opérateur d'inertie $M(q)$.

Nous adoptons la formulation du problème proposée par J.J. Moreau [1] sous la forme d'une inclusion différentielle :

Problème (P). Étant donné $(q_0, u_0) \in L \times V(q_0)$, trouver $u : I := [0, \tau] \to E$ (avec $\tau > 0$) à variation bornée telle que u et la fonction q définie par

$$q(t) = q_0 + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I$$

vérifient

$$u(0+0) = u_0$$

et

$$f\big(t, q, M(q)u\big)\,\mathrm{d}t - M(q)\,\mathrm{d}u \in N_{V(q(t))}\left(\frac{u(t+0) + eu(t-0)}{1+e}\right)$$

au sens suivant : il existe une mesure positive λ sur I telle que les mesures $\mathrm{d}u$ et $\mathrm{d}t$ admettent des densités $u'_\lambda = \mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda$ et $t'_\lambda = \mathrm{d}t/\mathrm{d}\lambda$ par rapport à λ et

$$f\big(t, q(t), M\big(q(t)\big)u(t)\big)t'_\lambda(t) - M\big(q(t)\big)u'_\lambda(t) \in N_{V(q(t))}\left(\frac{u(t+0) + eu(t-0)}{1+e}\right) \quad \lambda\text{-p.p. sur } I$$

2. Description du schéma

Pour ce problème, nous proposons une discrétisation en temps inspirée des algorithmes de 'sweeping process' introduits par J.J. Moreau [1] et M.D.P. Monteiro Marques [2] : pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $h = T/n$, $(t_{n,i} = i * h)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et on construit les suites $(q_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $(u_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ par :

$$\begin{cases} q_{n,0} = q_0 \\ u_{n,0} = -eu_0 + (1+e)\,\mathrm{proj}_{q_0}(u_0, V(q_0)) = u_0 \end{cases}$$

et pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{cases} q_{n,i+1} = q_{n,i} + hu_{n,i} \\ u_{n,i+1} = -eu_{n,i} + (1+e)\,\mathrm{proj}_{q_{n,i+1}}(u_{n,i} + \frac{h}{1+e} M^{-1}(q_{n,i+1}) f_{n,i+1}, V(q_{n,i+1})) \end{cases}$$

où $f_{n,i+1} = f(t_{n,i+1}, q_{n,i+1}, M(q_{n,i+1})u_{n,j(i)})$, avec $j(i) = i$ si on utilise une version explicite du schéma et $j(i) = i+1$ si on utilise une version implicite.

Nous pouvons remarquer que les positions approchées $(q_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont obtenues par une intégration discrète des vitesses approchées $(u_{n,i})_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et que ces dernières vérifient

$$f_{n,i+1} - M(q_{n,i+1}) \frac{u_{n,i+1} - u_{n,i}}{h} \in N_{V(q_{n,i+1})}\left(\frac{u_{n,i+1} + eu_{n,i}}{1+e}\right)$$

qui est une discrétisation assez naturelle de l'inclusion différentielle.

3. Résultat de convergence

Nous étudions la convergence du schéma sous les hypothèses suivantes :

(H1) La fonction g appartient à $C^{1,1/2}(E, \mathbb{R})$ et ∇g ne s'annule pas dans un voisinage de l'hypersurface $\{q \in E: g(q) = 0\}$,
(H2) la fonction f est continue de $[0, T] \times E \times E$ (avec $T > 0$) à valeurs dans E, et est localement lipschitzienne par rapport à ses deuxième et troisième variables,
(H3) l'application M est de classe C^1 de E à valeurs dans l'ensemble des matrices $d * d$ symétriques, définies et positives.

Pour de telles hypothèses, une explosion en temps fini des solutions peut apparaître, même dans le cas sans contrainte. Nous commençons donc par établir une estimation a priori locale en temps pour les vitesses discrètes : en utilisant une technique de point fixe, nous obtenons :

Lemme 3.1. *Soit* $(q_0, u_0) \in L \times V(q_0)$. *Pour tout* $R > \max(|u_0|, |u_0|_{q_0})$, *il existe* $\tau \in]0, T]$ *tel que, pour tout* $n \geqslant 1$ *les positions et vitesses approchées* $q_{n,i}$ *et* $u_{n,i}$ *sont définies pour tout* $ih \in [0, \tau]$ *et* $(q_{n,i}, u_{n,i}) \in \overline{B}(q_0, RT) \times \overline{B}(0, R)$ *pour tout* $ih \in [0, \tau]$.

On définit alors les solutions approchées $(q_n, u_n)_{n \geqslant 1}$ par :

$$u_n(t) = u_{n,i} \quad \text{si } t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1}[\cap [0, \tau]$$

$$q_n(t) = q_0 + \int_0^t u_n(s)\,\mathrm{d}s, \quad \text{pour tout } t \in [0, \tau]$$

et nous démontrons :

Théorème 3.2 *(Résultat de convergence locale). Il existe une sous-suite de la suite* $(q_n, u_n)_{n \geqslant 1}$, *encore notée* $(q_n, u_n)_{n \geqslant 1}$, *et une fonction* $v \in BV([0, \tau]; E)$ *telles que*

$$u_n \to v \quad \textit{en tout point de } [0,\tau],$$
$$q_n \to q \quad \textit{uniformément sur } [0,\tau],$$

avec

$$q(t) = q_0 + \int_0^t u(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in [0,\tau]$$
$$u(t) = \frac{v(t-0) + ev(t+0)}{1+e} \quad \forall t \in [0,\tau]$$

et (q,u) *est solution du problème* (P) *sur* $[0,\tau]$.

Les idées de la preuve sont inspirées de [2] et [3] où un problème de vibro-impact avec matrice de masse triviale et second membre (i.e. f) globalement borné était considéré. Les principales difficultés supplémentaires sont liées à la dépendance de l'opérateur d'inertie par rapport aux positions : l'espace des configurations $E = \mathbb{R}^d$ muni de la métrique cinétique, définie localement par la matrice de masse, est ici une variété riemannienne.

Nous démontrons ensuite que l'intervalle de temps sur lequel le schéma est convergent ne dépend que des données. Plus précisément, nous utilisons une estimation d'énergie pour les solutions du problème (P) :

Proposition 3.3 *(Estimation d'énergie [4]). Soit* $R > |u_0|_{q_0}$ *(correspondant à un niveau d'énergie fixé). Il existe* $\tau(R) \in]0,T]$ *tel que, pour toute solution* (q,u) *du problème* (P) *définie sur* $[0,\tau^*]$ *(avec* $\tau^* \in]0,T]$*), on a*

$$\big|u(t)\big|_{q(t)} \leqslant R \quad \forall t \in \big[0, \min\big(\tau^*, \tau(R)\big)\big]$$

En remarquant que les positions et vitesses discrètes $(q_{n,i}, u_{n,i})_{ih\in[0,\tau],\ n\geqslant 1}$ et la limite (q,u) vérifient

$$\limsup_{h\to 0} \sup\big\{|u_{n,i}|_{q_{n,i}};\ 0 \leqslant t_{n,i} \leqslant \tau^*\big\} \leqslant \operatorname{ess\,sup}\big\{|u(t)|_{q(t)};\ 0 \leqslant t \leqslant \tau^*\big\} \quad \forall \tau^* \in]0,\tau]$$

on démontre finalement :

Théorème 3.4 *(Résultat de convergence 'globale'). Soit* $R > |u_0|_{q_0}$ *et* $\tau(R) \in]0,T]$ *donné par la proposition précédente. Alors il existe une solution* (q,u) *du problème* (P) *sur* $[0,\tau(R)]$ *obtenue comme limite d'une suite de solutions approchées définie par le schéma.*

Remarque 1. Un exemple d'implémentation dans le cas du problème modèle du double pendule est présenté dans [5].

Remerciements

Ce travail a été partiellement financé par le projet européen SICONOS IST-2001 37172 et par le projet POCTI/ISFL/209 de la Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT)/FEDER.

Références

[1] J.J. Moreau, Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics, in: J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos (Eds.), Nonsmooth Mechanics and Applications, in: CISM Courses and Lectures, vol. 302, Springer-Verlag, New York, 1988, pp. 1–82.

[2] M.D.P. Monteiro Marques, Differential Inclusions in Non-Smooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction, Birkhäuser, Boston, Berlin, 1993.

[3] M. Mabrouk, A unified variational model for the dynamics of perfect unilateral constraints, Eur. J. Mech. A/Solids 17 (1998) 819–842.

[4] L. Paoli, M. Schatzman, A numerical scheme for impact problems I, SIAM J. Numer. Anal. 40 (2) (2002) 702–733;
L. Paoli, M. Schatzman, A numerical scheme for impact problems II, SIAM J. Numer. Anal. 40 (2) (2002) 734–768.

[5] R. Dzonou, M.D.P. Monteiro Marques, L. Paoli, Sweeping process for impact problem with a general inertia operator, in: Proceedings of the III European Conference on Computational Mechanics (ECCM-2006), Lisbonne, 5–9 juin 2006, CDRom.