

Borne supérieure du domaine de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène aléatoire

Benaceur Guessab*, Sylvain Turgeman

Laboratoire sols, solides, structures, IUT1 département génie civil, BP 67, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

Reçu le 10 mai 2006 ; accepté après révision le 5 décembre 2006

Disponible sur Internet le 16 janvier 2007

Présenté par Jean Salençon

Résumé

On montre que les champs de contrainte admissibles sur tout volume représentatif d'un matériau hétérogène aléatoire satisfont à des conditions nécessaires d'équilibre, de résistance et de périodicité portant sur les champs de contraintes microstructuraux moyens. On en déduit une méthode qui détermine une borne supérieure du domaine de résistance macroscopique du matériau hétérogène. Dans le cas particulier des matériaux périodiques, cette méthode coïncide avec la théorie classique d'homogénéisation en calcul à la rupture. On examine ses potentialités en l'appliquant à un matériau fissuré. **Pour citer cet article :** B. Guessab, S. Turgeman, *C. R. Mecanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Upper bound of the effective yield strength for a random material. We prove here that the admissible stress fields, through any representative volume of a heterogeneous random material, must verify stability, strength and periodicity requirements concerning mean microstructural stress fields. From the above-mentioned conditions a method to compute an upper bound for the effective yield strength is deduced. In the particular case of periodic materials, this method coincides with the classical theory of homogenization method when dealing with the calculation at failure. The pertinence of the theory is tested on a fissured material. **To cite this article:** B. Guessab, S. Turgeman, *C. R. Mecanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Rhéologie ; Calcul à la rupture ; Homogénéisation ; Matériau hétérogène aléatoire ; Domaine de résistance

Keywords : Rheology ; Yield design ; Homogenization ; Random material ; Yield strength

1. Introduction

On considère un matériau hétérogène M présentant une répartition aléatoire des hétérogénéités. Le domaine de résistance macroscopique G_h du matériau M admet les bornes bien connues de Voigt et de Reuss dont l'écart est significatif en règle générale. On propose de réduire cet écart par la détermination d'une borne supérieure G^+ , basée sur

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : benaceur.guessab@ujf-grenoble.fr (B. Guessab).

la représentation du matériau M par une famille finie de microstructures. A cet effet on considère un volume représentatif Ω du matériau M , que l'on soumet à un processus de chargement satisfaisant au principe de macrohomogénéité de Hill :

$$\langle \sigma \cdot d \rangle_{\Omega} = \langle \sigma \rangle_{\Omega} \cdot \langle d \rangle_{\Omega} \quad (1)$$

avec σ un champ de contrainte statiquement admissible sur Ω de moyenne $\langle \sigma \rangle_{\Omega}$ et d un champ de vitesse de déformation cinématiquement admissible sur Ω de moyenne $\langle d \rangle_{\Omega}$.

Il s'ensuit que les paramètres du chargement auquel est soumis Ω sont les composantes du tenseur $\langle \sigma \rangle_{\Omega}$. Les conditions à imposer à la frontière $\partial\Omega$ de Ω pour obtenir G_h ne sont pas spécifiées. On exige seulement qu'elles permettent d'obtenir (1). Cependant on est assuré d'obtenir une borne supérieure G_S de G_h en considérant dans l'approche statique du calcul à la rupture [1] des champs σ non contraints sur $\partial\Omega$ (qualifiés d'admissibles) :

$$G_S = \{ S = \langle \sigma \rangle_{\Omega}; \operatorname{div} \sigma = 0; \forall x \in \Omega: \sigma(x) \in g(x) \} \quad (2)$$

où $g(x)$ est le domaine de résistance du matériau M au point x .

Dans le cas d'un matériau hétérogène périodique, pour Ω illimité dans toutes les directions, le domaine G_S constitue précisément la prédiction G_{per} de G_h fournit par la méthode d'homogénéisation des matériaux périodiques [2]. Il s'obtient aisément puisqu'il suffit de considérer dans (2) des champs de contrainte σ satisfaisant à une condition de périodicité, de période le volume élémentaire représentatif.

Dans le cas du matériau hétérogène aléatoire, le calcul effectif de G_S apparaît difficilement réalisable, voire impossible, la dimension caractéristique de Ω étant très grande devant celle des hétérogénéités. Cette difficulté conduit à rechercher une approximation G^+ de G_S . Le sens de cette approximation (G^+ borne supérieure de G_S , donc de G_h) est subrogé à la précision de la représentation du matériau M .

2. Représentation du matériau hétérogène et hypothèses de travail

On considère une partition $P(\Omega)$ de Ω en N éléments géométriquement identiques à un élément de référence ω ayant une dimension caractéristique de l'ordre des hétérogénéités. Pour simplifier l'exposé, on se place dans le cas bidimensionnel et on choisit pour élément de référence ω , un carré de côtés C_j ($j \in \{1, \dots, 4\}$) (Fig. 1(a)). On fait les hypothèses suivantes :

- (H1) La microstructure observée dans un élément quelconque de $P(\Omega)$ (Fig. 1(b)) appartient à un ensemble $\hat{\mu}$ constitué d'un nombre fini de microstructures μ_k ($k \in \hat{m}$, $\hat{m} = \{1, \dots, m\}$) (Fig. 1(c)).
- (H2) Tout élément de $P(\Omega)$ admet un élément adjacent à chacun de ses côtés. Cette condition est donc réalisée asymptotiquement quand Ω occupe tout l'espace. Il s'ensuit que N est un entier infiniment grand. On se place dans le cadre de l'analyse non standard [3] qui permet des énoncés simples et proches du raisonnement mécanique.

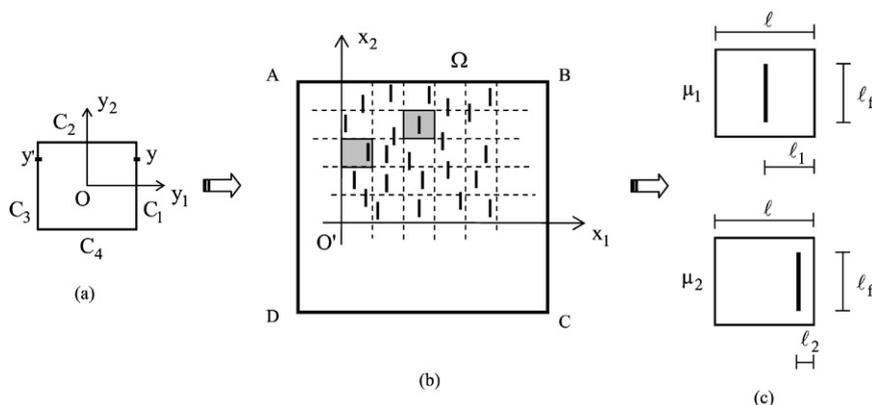


Fig. 1. Représentation d'un matériau fissuré ((a) choix d'un élément de référence ω ; (b) partition $P(\Omega)$ de Ω ; (c) choix des microstructures représentatives μ_1 et μ_2).

Fig. 1. Representation of a fissured material ((a) choice of a ω reference element; (b) $P(\Omega)$ partition of Ω ; (c) choice of representative microstructures μ_1 et μ_2).

(H3) Toute microstructure μ_k ($k \in \hat{m}$) est définie par la donnée, en tout point $y \in \omega$, du domaine de résistance $g_k(y)$ qui est supposé convexe.

La représentation du matériau M est achevée par la donnée du nombre N_k d'éléments de $P(\Omega)$ dotés de la microstructure μ_k ($k \in \hat{m}$) et on note :

$$\rho_k = N_k/N \tag{3}$$

le coefficient de pondération relatif de la microstructure μ_k ($k \in \hat{m}$).

3. Conditions satisfaites nécessairement par les champs de contrainte admissibles

Soit $S \in G_S$ et σ_0 un champ de contrainte associé à S (cf. (2)). On note pour $k \in \hat{m}$ et pour $i \in \hat{N}_k = \{1, \dots, N_k\}$:

- ω_i^k le i^e élément de $P(\Omega)$ doté de la microstructure μ_k ;
- $x_{ik}(y)$ la position d'un point de Ω , situé dans ω_i^k , en fonction de sa position relative y dans ω .

On définit sur ω la restriction de σ_0 à l'élément ω_i^k de $P(\Omega)$:

$$\sigma(i, k, y) = \sigma_0(x_{ik}(y)), \quad \forall k \in \hat{m}, \forall i \in \hat{N}_k, \forall y \in \omega \tag{4}$$

ainsi que le champ moyen de ces restrictions aux éléments de $P(\Omega)$ dotés de la même microstructure μ_k :

$$\bar{\sigma}_k(y) = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} \sigma(i, k, y), \quad \forall k \in \hat{m}, \forall y \in \omega \tag{5}$$

On montre que les champs moyens $\bar{\sigma}_k(y)$ ($k \in \hat{m}, y \in \omega$) sont tels que :

$$\text{div } \bar{\sigma}_k = 0 \quad \text{sur } \omega \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^m \rho_k \langle \bar{\sigma}_k \rangle_\omega = S \tag{7}$$

$$\bar{\sigma}_k(y) \in g_k(y), \quad \forall y \in \omega \quad (\text{convexité de } g_k(y) \text{ (cf. (H3)))} \tag{8}$$

Pour tout point y situé sur un côté C_j de ω , de normale extérieure n_j ($j \in \{1, \dots, 4\}$), on détermine l'effort moyen :

$$\bar{T}_j(y) = \sum_{k=1}^m \rho_k \bar{\sigma}_k(y) \cdot n_j \tag{9}$$

On montre alors que $\bar{T}_j(y)$ satisfait à la condition de périodicité suivante :

$$\bar{T}_j(y) = -\bar{T}_{j'}(y') \tag{10}$$

pour tout couple de points $y \in C_j$ et $y' \in C_{j'}$ ($j \in \{1, 2\}, j' = j + 2$) disposés symétriquement à l'un des axes sur deux côtés opposés de ω (Fig. 1(a)).

Preuve. On numérote les éléments de $P(\Omega)$ sans tenir compte de la microstructure dont ils sont dotés. Pour j fixé, soit $i' = f(i)$ l'élément de $P(\Omega)$ adjacent à l'élément i par le côté C_j de i . Du fait de (H2), f est définie sur $\hat{N} = \{1, \dots, N\}$ et elle est bijective de \hat{N} sur \hat{N} . Pour tout $y \in C_j$ on a :

$$\begin{aligned} \bar{T}_j(y) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{N_k} \sigma(l, k, y) \cdot n_j \quad (\text{d'après (9)}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma(i, \cdot, y) \cdot n_j \end{aligned}$$

où $\sigma(i, \cdot, y)$ est la restriction de σ_0 à l'élément i (la microstructure de l'élément i étant quelconque, on la note par un \cdot).

La continuité de σ_0 sur Ω implique alors :

$$\bar{T}_j(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N -\sigma(f(i), \dots, y') \cdot n_{j'} = \frac{1}{N} \sum_{i'=1}^N -\sigma(i', \dots, y') \cdot n_{j'} = -\bar{T}_{j'}(y') \quad \square$$

4. Borne supérieure de G_h

Considérant les conditions satisfaites nécessairement par tout champ admissible σ_0 associé à $S \in G_S$, on pose :

$$G^+ = \{S \mid \forall k \in \hat{m}: \exists \bar{\sigma}_k(y), y \in \omega \text{ vérifiant (6)–(8), (10)}\} \tag{11}$$

et on a donc :

$$G_h \subset G_S \subset G^+ \tag{12}$$

si effectivement toutes les microstructures observées dans les éléments $P(\Omega)$ appartiennent à $\hat{\mu}$. Dans le cas contraire G^+ constitue une approximation de G_S dont le sens ne peut être garanti.

Dans le cas $m = 1$, la représentation de M est celle d'un matériau périodique M_{per} , de volume élémentaire représentatif ω doté de la microstructure μ_1 . On a :

$$G^+ = G_{\text{per}} \tag{13}$$

où G_{per} est le domaine de résistance macroscopique de M_{per} [2].

Il s'ensuit que l'approximation proposée de G_h par G^+ peut être vue comme une généralisation au cas aléatoire de la théorie de l'homogénéisation des matériaux périodiques.

5. Un exemple d'application

On considère le matériau fissuré M (Fig. 1(b)) représenté par les microstructures μ_1 et μ_2 (Fig. 1(c)) (avec $\ell_f = 2\ell/3$; $\ell_1 = \ell/2$; $\ell_2 = \ell/6$) affectées des coefficients $\rho_1 = \rho_2 = 0,5$. La largeur des fissures est supposée nulle. Dans le repère privilégié Ox_1x_2 , le domaine de résistance de M est $g_0 = \{\sigma \mid |\sigma_{ij}| \leq \sigma_0 \ (i = 1, 2; j = 1, 2)\}$ en tout point non situé sur une fissure; $g_f = \{0\}$ sinon.

On s'intéresse à la résistance en traction de ce matériau dans la direction orthogonale aux fissures.

La résistance R^+ , déduite du calcul numérique par une méthode d'éléments finis de G^+ (Fig. 2), est égale à $0,598\sigma_0$. On la compare :

- à la résistance, déduite de la borne de Voigt, qui est égale à σ_0 .

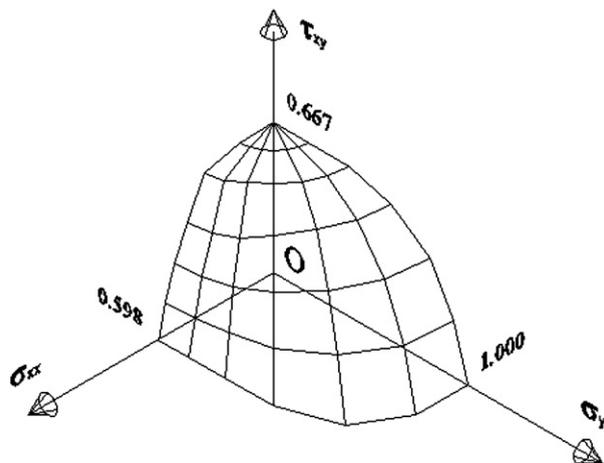


Fig. 2. Borne supérieure G^+ du domaine macroscopique G_h pour le matériau fissuré.

Fig. 2. G^+ upper bound of the G_h effective yield strength for the fissured material.

- à la résistance moyenne calculée sur 50 échantillons carrés Ω , de côtés $L = 150\ell$, chaque élément de $P(\Omega)$ étant doté aléatoirement de la microstructure μ_1 ou μ_2 (de sorte qu'il n'y ait pas d'erreur imputable à la représentation). Cette résistance dépend des conditions aux limites imposées sur $\partial\Omega$ et varie de $0,464\sigma_0$ (vitesse de déplacement $u = (x_1, 0)$ sur BC et AD ; $\sigma_{22} = \sigma_{12} = 0$ sur AB et DC) à $0,499\sigma_0$ ($u = (x_1, 0)$ sur $\partial\Omega$).

On observe que R^+ est très proche de la résistance asymptotique $R_{\max} = 0,566\sigma_0$ d'un échantillon Ω dans lequel les microstructures sont disposées de manière à obtenir une résistance maximum (disposition des microstructures μ_1 et μ_2 en damier). Le calcul de R_{\max} est réalisé en utilisant la théorie de l'homogénéisation périodique [2].

6. Conclusion

La borne supérieure G^+ du domaine de résistance macroscopique dans le cas aléatoire s'obtient par un calcul relativement simple. En effet G^+ s'obtient en appliquant la méthode statique du calcul à la rupture sur un système constitué de m volumes ω , chacun d'eux étant doté d'une microstructure μ_k ($k \in \hat{m}$). Les champs de contraintes $\bar{\sigma}_k$ considérés sur chacun de ces volumes sont liés par leur moyenne pondérée (7) ainsi que par la condition de périodicité (10). L'exemple du matériau fissuré que l'on a considéré montre l'intérêt de cette borne : celle-ci fournit en effet une résistance en traction très proche de la borne supérieure intangible qui correspond à la répartition la plus favorable des hétérogénéités vis-à-vis de la résistance en traction du matériau hétérogène.

Références

- [1] J. Salençon, Calcul à la rupture et analyse limite, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [2] P. Suquet, Analyse limite et homogénéisation, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 295 (1983) 1355–1358.
- [3] A. Robert, Analyse non standard, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1985.