Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Mecanique 335 (2007) 144–149

COMPTES RENDUS
MECANIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Sur la zone de contact entre une plaque élastique et un obstacle rigide

Alain Léger *, Cédric Pozzolini

Laboratoire de mécanique et d'acoustique – CNRS, 31, chemin Joseph-Aiguier, 13402 Marseille cedex 20, France

Reçu le 9 janvier 2007 ; accepté le 30 janvier 2007

Disponible sur Internet le 23 mars 2007

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

L'objet de cette Note est l'étude du problème de contact entre une plaque élastique, encastrée sur ses bords, placée au dessus d'un obstacle ψ et soumise à un champ de forces perpendiculaires au plan de la plaque $f \in L^2(\Omega)$. Le problème d'obstacle consiste à trouver la forme de la plaque u et l'ensemble de contact $\mathcal{I}(f)$ entre la plaque et l'obstacle. Dans un premier temps nous présentons un résultat qui généralise au cas des plaques un théorème de régularité de la zone de contact que D. Kinderlehrer et G. Stampacchia avaient établi pour des membranes en dimension 2. Après quoi, nous donnons un résultat de stabilité qui relie les évolutions de la zone de contact à celles des forces extérieures. ***Pour citer cet article : A. Léger, C. Pozzolini, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Abstract

About the contact set between an elastic plate and a rigid obstacle. This Note deals with the contact problem between an elastic plate and a rigid obstacle ψ. The plate is clamped at its edges and submitted to vertical forces $f \in L^2(\Omega)$. The obstacle problem consists in finding the shape of the plate u and the contact set $\mathcal{I}(f)$ between the plate and the obstacle. In a first step, we give a result, which we extend to the case of plates, a theorem established by D. Kinderlehrer and G. Stampacchia dealing with the smoothness of the contact set in the case of a two-dimensional membrane. In a second step, we give a stability theorem which links the changes of the external forces to the changes of the contact set. ***To cite this article: A. Léger, C. Pozzolini, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Mots-clés : Dynamique des systèmes rigides ou flexible ; Problème de contact

Keywords: Dynamics of rigid or flexible systems; Contact problem

Abridged English version

Let Ω be a $C^{2,\alpha}$-bounded domain in $\mathbb{R}^2$, $0 < \alpha < 1$. The obstacle problem for a flat elastic membrane occupying a domain Ω within small strains is given by problem (2). This problem has been widely studied in papers by Lions,

* Auteur correspondant.
Adresse e-mail : leger@lma.cnrs-mrs.fr (A. Léger).

1631-0721/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2007.01.007

Lewy, Stampacchia, Schaeffer, Kindelehrer to prove existence, uniqueness, regularity, or stability results. It is known that the obstacle leads to a variational inequality in which the contact set is unknown so that the problem is a so-called *free boundary problem*. It is very difficult to work with strong solutions and in particular one cannot hope for a priori regularity of the free boundary [1]. It should be stressed that the smoothness of the contact set for the harmonic operator is the subject of a conjecture [2] (*Schaeffer's conjecture* – 1974) which is still unsolved in dimension larger than 2. Thanks to 'blow-up' techniques introduced by L. Caffarelli, R. Monneau [3] solved a part of this conjecture in dimension 2 in the case of a constant loading. But very few studies have been performed in the case of the obstacle problem for a plate. Moreover, these studies deal with the regularity of the solution and not with the geometry of the contact set. The reason of the difference is that the tools which are used in the case of the harmonic operator no longer apply in the case of the biharmonic operator.

The present Note aims at giving regularity results for the free boundary of the obstacle problem for a plate. By standard results, both problems (2) and (1), which represent respectively the equilibrium of a membrane over an obstacle ϕ and of a plate over an obstacle ψ, have a single solution.

Definition 0.1. The contact set is $\mathcal{I}(f) := \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}$, and the boundary $\partial\mathcal{I}(f)$ of $\mathcal{I}(f)$ is classically referred to as a free boundary.

Remark 1. Within enough regularity, studying problem (1) amounts to studying problem (3) where the external forces have been replaced by a new obstacle $\hat{\psi} := \psi + \Psi$ such that $\Psi = \hat{g}$ on $\partial\Omega$, thanks to the change of variable $\hat{u} := u + \Psi$ with $-\Delta^2\Psi = f$.

Remark 2. Since u is a super-solution of $(\Delta^2 - f)$ we have: $\mathcal{I}(f) \subset \{x \in \Omega \mid \Delta^2\psi(x) - f(x) \geqslant 0\}$. Then the following assumption is necessary to have any regularity result of the free boundary:

Assumption 1 *(Nondegeneracy condition).* The obstacle and the forces satisfy the following inequality: $\Delta^2\psi - f \geqslant \delta_0 > 0$ almost everywhere in Ω if ψ is smooth enough (otherwise the contact set could be equal to any compact set of Ω).

We assume in addition that the obstacle satisfies:

Assumption 2.

$$\Delta\psi + f \geqslant \delta_0 \leqslant 0$$

Remark 3. Since $u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$, classical Sobolev's embedding theorems give that $u \in C^0(\overline{\Omega})$. Moreover if $u > \psi$ on $\partial\Omega$, then by continuity $u > \psi$ in $(\partial\Omega)_\varepsilon$, where $(\partial\Omega)_\varepsilon$ is an ε–Ω-neighbourhood of $\partial\Omega$. Then, thanks to the standard theory of the elliptic operators, we can establish that the restriction of the solution of problem (1) to $\overline{(\partial\Omega)_\varepsilon}$ is as smooth as Ω if the forces are smooth enough.

We can now give the main results of this Note. They consist of two theorems, which extend to the case of plates results previously obtained in the case of membranes. The first one deals with the smoothness of the free boundary and generalizes a result of Kinderlehrer and Stampacchia [4]:

Theorem 0.2. *Let Ω be a C^∞-strictly convex bounded domain. The free boundary $\partial\mathcal{I}(f)$ of problem* (1) *is a C^∞-Jordan curve, either if f is a $C^\infty(\overline{\Omega})$-convex function and ψ a strictly concave $C^\infty(\overline{\Omega})$-function, or if f is a strictly convex $C^\infty(\overline{\Omega})$-function and ψ a $C^\infty(\overline{\Omega})$-concave function.*

The proof of this result is based upon an equivalence result between problem (1) and a *mixed weak formulation* given by problem (6a)–(6b).

The second result extends to the case of plates the fundamental stability theorem of Schaeffer [5]:

Theorem 0.3. *Let Ω be a C^∞-bounded domain in $\mathbb{R}^2$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Assume that for some $f_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, the solution to problem* (1) *is such that the following conditions are satisfied*:

Assumption 1 *holds and $\partial\mathcal{I}(f_0)$ is a smooth Jordan curve*

Then for f sufficiently close to f_0 in $C^\infty(\overline{\Omega})$, the free boundary $\partial\mathcal{I}(f)$ for problem (1) *is a C^∞-Jordan curve diffeomorphic to $\partial\mathcal{I}(f_0)$.*

1. Introduction

Le problème d'obstacle pour une membrane élastique en déformations linéarisées a été étudié depuis les années 50 par Lions, Lewy, Stampacchia, Schaeffer, Kindelehrer pour prouver des résultats d'existence, d'unicité, de régularité et de stabilité. Il est connu que la présence de l'obstacle conduit à une inéquation variationnelle donnant lieu à un *Problème à Frontière Libre*. Il est difficile de travailler avec des solutions fortes, et en particulier on ne peut espérer aucune regularité a priori sur la frontière libre [1]. Il faut souligner que dans le cas du laplacien l'étude de la zone de contact en tant que variété fait l'objet d'une conjecture [2] (*Conjecture de Schaeffer* – 1974) qui est toujours non-résolue en dimension supérieure à deux. Cependant grâce aux techniques de 'blow-up' introduites par L. Caffarelli, R. Monneau [3] a résolu partiellement cette conjecture en dimension 2 pour un chargement constant. Quant au problème d'obstacle pour une plaque élastique en déformations linéarisées, il n'a été que peu étudié et seulement du point de vue de la régularité de la solution et non de la géométrie de la zone de contact. Les difficultés qui apparaissent dans le cas des plaques tiennent au fait que les outils servant à la compréhension du problème d'obstacle dans le cas du laplacien ne s'appliquent pas dans le cas du bilaplacien.

2. Formulations du problème et premières propriétés

2.1. *Formulation faible primale*

Soient Ω un $C^{2,\alpha}$-domaine connexe borné de $\mathbb{R}^2$, $0 < \alpha < 1$. Ω représente le feuillet moyen d'une plaque élastique. Soit $\mathbb{k}_\psi := \{v \in \mathbb{H}^2_0(\Omega) \mid v \geqslant \psi \text{ in } \Omega\}$, l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles d'une plaque fixée à ses bords placée au dessus d'un obstacle rigide ψ ($\psi < 0$ sur $\partial\Omega$). La plaque est soumise à une force $f \in L^2(\Omega)$, partout dirigée vers l'obstacle. Nous nous intéressons au problème de contact *sans frottement* suivant :

$$\text{Trouver } u \in \mathbb{k}_\psi \text{ minimisant la fonctionnelle } \int_\Omega |\Delta v|^2 - 2fv\,\mathrm{d}\Omega,\ \forall v \in \mathbb{k}_\psi \tag{1}$$

Définition 2.1. Nous appellons *ensemble de contact* l'ensemble des points x de la plaque en contact avec l'obstacle c'est-à-dire $\mathcal{I}(f) := \{x \in \Omega \mid u(x) = \psi(x)\}$. Le bord $\partial\mathcal{I}(f)$ de $\mathcal{I}(f)$ est désigné sous le nom de *frontière libre*.

Remarque 1. Dans le cas d'une membrane le problème s'écrit :

$$\text{Trouver } U \in \mathbb{K}_\phi \text{ minimisant la fonctionnelle } \int_\Omega |\nabla v|^2 - 2Fv\,\mathrm{d}\Omega,\ \forall v \in \mathbb{K}_\phi \tag{2}$$

où $\mathbb{K}_\phi := \{v \in \mathbb{H}^1_0(\Omega),\ v \geqslant \phi \text{ dans } \Omega\}$, $\phi < 0$ sur $\partial\Omega$, désigne l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles d'une membrane tendue au dessus d'un obstacle rigide ϕ, soumise à une force $F \in L^2(\Omega)$, partout dirigée vers l'obstacle. Dans la suite, on aura également besoin du cas où la membrane est soumise, en plus de F, à une donnée au bord non homogène G que l'on suppose telle que $G > \phi$ sur $\partial\Omega$. Le cadre fonctionnel est alors $\mathbb{K}_{\phi,G} := \{v \in \mathbb{H}^1(\Omega) \mid v = G \text{ sur } \partial\Omega,\ v \geqslant \phi \text{ dans } \Omega\}$.

Proposition 2.2. *Etudier le problème* (3) *revient à étudier un problème du type* (3) *suivant, et réciproquement* :

$$\textit{Trouver } \hat{u} \in \mathbb{k}_{\hat{\psi},\hat{g}} \textit{ minimisant la fonctionnelle } \int_\Omega |\Delta v|^2\,\mathrm{d}\Omega,\ v \in \mathbb{k}_{\hat{\psi},\hat{g}} \tag{3}$$

où $\mathbb{k}_{\hat{\psi},\hat{g}} := \{v \in \mathbb{H}^2(\Omega) \mid v = \hat{g}$ *et* $\partial_\nu v = 0$ *sur* $\partial\Omega,\ v \geqslant \hat{\psi}$ *dans* $\Omega\}$*, avec* $\hat{g} + \psi < 0$ *sur* $\partial\Omega$*. Le passage d'un problème à l'autre utilise le changement de variables* $\hat{u} := u + \Psi$ *et le changement d'obstacle* $\hat{\psi} := \psi + \Psi$*, où* Ψ *supposée suffisamment régulière sur* $\partial\Omega$ *est liée à* f *par* $-\Delta^2\Psi = f,\ \hat{g} = \Psi,\ \partial_\nu\Psi = 0$ *sur* $\partial\Omega$*.*

Remarque 2. Puisque u est une super-solution de $(\Delta^2 - f)$, nous avons

$$\mathcal{I}(f) \subset \left\{x \in \Omega \mid \Delta^2\psi(x) - f(x) \geqslant 0\right\} \subset \mathring{\Omega}$$

Nous ne pouvons espérer aucun résultat de régularité sur la zone de contact $\mathcal{I}(f)$, si la condition suivante n'est pas satisfaite :

Hypothèse 1 *(Condition de non-dégénérescence).*

$$\Delta^2\psi - f \geqslant \delta_0 > 0 \quad \text{presque partout dans } \Omega \text{ (si } \psi \text{ est suffisamment régulière)} \tag{4}$$

On montre en effet que si cette condition n'est pas satisfaite la zone de contact peut être égale à n'importe quel compact de Ω !

On suppose de plus que l'obstacle satisfait :

Hypothèse 2.

$$\Delta\psi + f \geqslant \delta_0 \leqslant 0 \tag{5}$$

2.2. Régularité au voisinage du bord

Puisque la solution u de (1) est dans $\mathbb{H}_0^2(\Omega)$, les théorèmes d'injections de Sobolev impliquent que $u \in C^0(\overline{\Omega})$. De plus si $u > \psi$ sur $\partial\Omega$, alors par continuité $u > \psi$ sur $(\partial\Omega)_\varepsilon$, où $(\partial\Omega)_\varepsilon$ est un ε–Ω-voisinage de $\partial\Omega$. On déduit que

$$\Delta^2 u = f \quad \text{sur } (\partial\Omega)_\varepsilon \text{ et } u \in \mathbb{H}^2(\Omega)$$

On peut alors établir, grâce à la théorie standard des opérateurs elliptiques, les résultats de régularité suivants :

Théorème 2.3. (i) *Si* $f \in L^2(\Omega)$*,* $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ *et* $\partial\Omega \in C^{4,\alpha}$*, alors* $u \in \mathbb{H}^3(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$*.*

(ii) *De plus si* $f \in \mathbb{H}^{2+k}(\Omega)$*,* $\psi \in \mathbb{H}^{k+11/2}(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ *et si* $\partial\Omega \in C^{4+k,\alpha}$*, avec* $0 < \alpha < 1$*,* $k \geqslant 0$ *alors* $u \in \mathbb{H}^{6+k}((\partial\Omega)_\varepsilon) \cap C^{4+k,\alpha}(\overline{(\partial\Omega)_\varepsilon})$*.*

(iii) *Enfin si* $f, \psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *et* $\partial\Omega \in C^\infty$*, alors* $u \in C^\infty(\overline{(\partial\Omega)_\varepsilon})$*.*

Indications pour la preuve. (i) Dans [6], B. Schild démontre que $u \in \mathbb{H}^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathbb{W}^{3,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, si $f \in L^p(\Omega)$ avec $p \geqslant 1$. Pour (ii) et (iii), nous construisons une force associée à un relèvement aussi régulier que l'on veut dans $\Omega - (\partial\Omega)_\varepsilon$ et strictement au dessus de l'obstacle, ce qui fournit une solution bilatérale coïncidant avec u sur $\overline{(\partial\Omega)_\varepsilon}$ à laquelle nous pouvons appliquer les théorèmes classiques de [7]. □

2.3. Formulation faible mixte

Nous donnons à présent une autre formulation variationnelle équivalente au problème (1).

Proposition 2.4. *Soient* Ω *un* $C^{2,\alpha}$*-domaine borné du plan avec* $\alpha \in \,]0,1[$*,* $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$*, et* $f \in \mathbb{L}^2(\Omega)$*. Soit alors le problème variationnel suivant* :

Trouver $(\mathsf{M}, \bar{u}) \in \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{k}_\psi$ *tel que* :

$$\int_\Omega \Delta\bar{u}\, v \,\mathrm{d}\Omega = -\int_\Omega \mathsf{M} v \,\mathrm{d}\Omega, \quad \forall v \in \mathbb{L}^2(\Omega) \tag{6a}$$

$$\int_\Omega \mathsf{M}\Delta\zeta \,\mathrm{d}\Omega \geqslant -\int_\Omega f\zeta \,\mathrm{d}\Omega, \quad \forall \zeta \in \mathbb{k}_\psi \tag{6b}$$

Alors, l'unique solution $(\mathsf{M}, \bar{u})$ *de* (6a)–(6b) *correspond à l'unique solution u du problème* (1).

La preuve de l'équivalence s'adapte facilement de celle donnée dans [8] pour le problème bilatéral.

3. Régularité de la frontière libre

On étudie le problème (3). On peut alors énoncer le théorème suivant, qui constitue le premier résultat important présenté dans cette Note :

Théorème 3.1. *Soit Ω un C^∞-domaine borné strictement convexe de $\mathbb{R}^2$, et $\hat{\psi}$ une fonction de classe $C^{4,\alpha}(\overline{\Omega})$ (resp. $C^\infty(\overline{\Omega})$), avec* $\max_{\overline{\Omega}} \hat{\psi} > 0$ *et* $\hat{\psi} < 0$ *sur* $\partial\Omega$ *et telle que* $\Delta\hat{\psi}$ *soit strictement concave et* $\max_{\overline{\Omega}} \Delta\hat{\psi} > 0$. *Alors le bord de la zone de contact* $\partial\hat{\mathcal{I}}$ *du problème* (3) *est une* $C^{1,\beta}$*-courbe de Jordan avec* $0 < \beta < \alpha$ *(resp. une* C^∞*-courbe de Jordan).*

Idée de la preuve. Elle se base sur la formulation variationnelle mixte (6a), (6b).

(i) On rappelle tout d'abord que Kinderlehrer et Stampacchia [4] ont établi le résultat suivant :
Soit Ω un C^∞-domaine borné strictement convexe de $\mathbb{R}^2$; si $\hat{\psi}$ est une fonction strictement concave de classe $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ (resp. $C^\infty(\overline{\Omega})$), avec $\max_{\overline{\Omega}} \psi > 0$, $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, la zone de contact $\partial\hat{\mathcal{I}}$ du Problème (2) est une $C^{1,\beta}$-courbe de Jordan (resp. une C^∞-courbe de Jordan).
On trouve dans [9], la preuve du caractère C^∞ de la frontière libre localement si les données sont C^∞. On utilise la formulation mixte (6a)–(6b) et le principe du maximum de Evans [10] pour construire un problème d'obstacle pour le laplacien. Le résultat de Kinderlehrer et Stampacchia [4] permet alors de conclure que le bord de la zone de contact de ce problème est, pour des données lisses, une courbe de Jordan lisse.

(ii) La deuxième étape utilise le lemme suivant :

Lemme 3.2. *L'opérateur Laplacien–Dirichlet* $\mathbf{\Delta}$ *est un* C^∞*-difféomorphisme, avec* :

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta} : \mathbb{L}^2(\Omega) \times \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega) &\to \mathbb{H}^1(\Omega)\\ (F, G) &\mapsto U\end{aligned} \qquad \text{où } U \text{ est solution de : } \begin{cases}\Delta U = F & \text{sur } \Omega\\ U = G & \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

La preuve de ce lemme consiste à montrer que les opérateurs $\mathbf{\Delta}$ et $\mathbf{\Delta}^{-1}$ sont bornés, ce qui suffit par linéarité.

Le théorème de régularité près des bords (2.3) et le Lemme 3.2 permettent alors de conclure que la zone de contact du problème (1) est, pour des données lisses, une courbe de Jordan lisse. En effet d'une part la donnée $G = \Delta u$ sur le bord de Ω est bien lisse si $\partial\Omega$ et F le sont, et d'autre part le Lemme 3.2 permet de conclure que $\hat{\mathcal{I}} = [\hat{u} = \hat{\psi}] = \mathbf{\Delta}^{-1}([\mathsf{M} = \Delta(\hat{\psi})])$ est une surface lisse. □

Corollaire 3.3. *Soient Ω un C^∞-domaine strictement convexe, Ψ et ψ deux fonctions dans $C^\infty(\overline{\Omega})$ telles que* $\max_{\overline{\Omega}}(\Psi + \psi) > 0$, $\Psi + \psi < 0$ *sur* $\partial\Omega$, $\max_{\overline{\Omega}} \Delta(\Psi + \psi) > 0$, *avec ou bien* $\Delta\psi$ *strictement concave et* $\Delta\Psi$ *convexe, ou bien* $\Delta\psi$ *concave et* $\Delta\Psi$ *strictement convexe. Alors, la frontière libre* $\partial\mathcal{I}(f)$ *du problème* (1) *vec le chargement* $f = -\Delta^2\Psi$ *et l'obstacle* ψ *est une* C^∞*-courbe de Jordan.*

4. Un résultat de stabilité dans le problème d'obstacle pour le bilaplacien

Dans [5], D.S. Schaeffer avait établi dans le cas du problème d'obstacle pour le laplacien un théorème fondamental qui, pour un domaine, un obstacle et des forces tous C^∞, relie l'évolution du bord de la zone de contact à l'évolution du chargement. On peut maintenant énoncer un résultat analogue pour le bilaplacien.

Théorème 4.1. *Soient Ω un C^∞-domaine borné de $\mathbb{R}^2$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. On suppose que le problème* (1) *satisfait les conditions suivantes* :

f_0 vérifie la condition de non-dégénérescence (4), *et* $\partial\mathcal{I}(f_0)$ *est une courbe lisse de Jordan.*

Alors pour f suffisamment proche de f_0 dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, la frontière libre $\partial\mathcal{I}(f)$ du problème (1) *est une C^∞-courbe de Jordan difféomorphe à $\partial\mathcal{I}(f_0)$.*

Idée de la preuve. (i) La première étape consiste en une extension du résultat de Schaeffer au cas à deux paramètres qui sont la force dans la domaine F et la donnée au bord G. Cette extension s'énonce comme suit :

Soient Ω un C^∞-domaine borné de $\mathbb{R}^2$, $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Dans le problème (2)*, supposons que pour $(F_0, G_0) \in C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\partial\Omega)$ donné, $G_0 > \phi$ sur $\partial\Omega$, les conditions suivantes soient satisfaites* :

$$F_0 > \Delta\phi \ \text{sur}\ \mathcal{I}(F_0, G_0), \ \text{et}\ \partial\mathcal{I}(F_0, G_0)\ \text{est une courbe de Jordan lisse}$$

Alors pour (F, G) suffisamment proche de (F_0, G_0) dans $C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\partial\Omega)$, la frontière libre $\partial\mathcal{I}(F, G)$ de (2) *est une C^∞-courbe de Jordan difféomorphe à $\partial\mathcal{I}(F_0, G_0)$.*

La preuve présentée dans l'article de Schaeffer s'adapte en effet facilement au cas où la donnée au bord G_0 n'est pas nulle mais est donnée dans C^∞.

(ii) En notant $f_0 := \Delta^2\Psi_0$ et $f := \Delta^2\Psi$, on s'assure que la zone de contact de (6b) est lisse sous les hypothèses de l'extension ci-dessus du théorème de Schaeffer, puis on termine grâce au Lemme 3.2. □

Références

[1] D.G. Schaeffer, Some examples of singularities in free boundary, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 4 (1976) 131–144.
[2] D.G. Schaeffer, An example of generic regularity for non-linear elliptic equation, Arch. Rat. Mach. Anal. 57 (1974) 134–141.
[3] R. Monneau, On the number of singularities for the obstacle problem in two dimensions, J. Geom. Anal. 13 (2) (2003) 359–389.
[4] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Academics Press, New York, 1980.
[5] D.G. Schaeffer, A stability theorem for the obstacle problem, Adv. Math. 16 (1975) 34–47.
[6] B. Schild, A regularity result for polyharmonic variational inequalities with thin obstacles, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1984) 87–122.
[7] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. II XVII (1964) 35–92.
[8] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers, R.A.I.R.O. R-2 (1974) 129–151.
[9] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg, Regularity in free boundary problems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 34 (1978) 86–119.
[10] N.S. Landkhof, Fondations of Modern Potential Theory, Springer-Verlag, New York, 1972.