Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Mecanique 335 (2007) 159–161
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Du calcul des efforts hydrodynamiques pour des configurations bidimensionnelles multi-corps

Yves-Marie Scolan

École Centrale Marseille, technopôle Château Gombert, 13451 Marseille cedex 20, France

Reçu le 1er décembre 2006 ; accepté le 24 janvier 2007

Disponible sur Internet le 23 mars 2007

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

Cette Note généralise les résultats présentés dans les Comptes Rendus Mécanique (Vol. 333, 6). Dorénavant on s'intéresse à des configurations multi-corps. A nouveau des transformations conformes simples permettent de décrire l'écoulement potentiel bidimensionnel autour d'un ensemble d'obstacles de forme quelconque. En revisitant ce problème on établit une identité compacte fournissant la matrice couplée, formée des coefficients de masses et moment d'inertie ajoutés pour ce type de configuration. Grâce à la solution obtenue on dispose d'une base de fonctions qui permet de calculer les efforts s'exerçant sur les mêmes obstacles mais dorénavant placés dans un écoulement de fluide visqueux et incompressible. ***Pour citer cet article : Y.-M. Scolan, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Abstract

On hydrodynamic loads for two-dimensional multi-bodies configurations. This Note is a generalization of the work presented in Comptes Rendus Mécanique (Vol. 333, 6). Now two-dimensional multi-bodies configurations are considered. Simple conformal mappings of the fluid region are used to describe the potential flow around an array of bodies with arbitrary shape. By revisiting this problem, a compact expression of the coupled matrix of added masses and moment of inertia is elaborated. The corresponding solution in term of velocity potential, has another purpose. It is used as a basis of functions to formulate the loads acting on the same body arrangement but now placed in a viscous and incompressible fluid flow. ***To cite this article: Y.-M. Scolan, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Mots-clés : Mécanique des fluides numérique ; Écoulement potentiels bidimensionnel ; Hydrodynamique

Keywords: Computational fluid mechanics; Two-dimensional potential flows; Hydrodynamics

1. Développements théoriques

On se place dans le cadre de la théorie des écoulements potentiels bidimensionnels. On pose le problème aux limites vérifié par le potentiel de perturbation rendant compte d'un écoulement autour de plusieurs obstacles chacun

Adresse e-mail : ymscolan@ec-marseille.fr.

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2007.02.005

simplement connexes. On ne résout pas ici un problème physique, mais le problème qui fournit la matrice couplée M, formée des coefficients de masses et moment d'inertie ajoutés. Si on note $(B_k)_{k=1,N}$ les N obstacles et Ω le domaine fluide environnant, un problème aux limites élémentaire à résoudre se formule de la manière suivante

$$\begin{cases} \Delta\phi_{k\ell} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{\nabla}\phi_{k\ell}\cdot\vec{n} = n_{k\ell} & \text{sur } (B_k) \\ \vec{\nabla}\phi_{k\ell}\cdot\vec{n} = 0 & \text{sur } (B_j)_{j\neq k} \\ \vec{\nabla}\phi_{k\ell} \to 0 & \text{à l'}\infty \end{cases} \tag{1}$$

où la condition de Neumann sur B_k est définie comme suit

$$n_{k\ell} = \begin{cases} \vec{n}\cdot\vec{x}, & \ell = 1 \\ \vec{n}\cdot\vec{y}, & \ell = 2 \\ \vec{n}\cdot(\vec{\mathbf{z}}\wedge\vec{r}), & \ell = 3 \end{cases} \tag{2}$$

et $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{\mathbf{z}})$ constitue un repère centré sur le corps (B_k), $\vec{r}$ décrit le contour du corps dans ce repère. On calcule ainsi le torseur des efforts qui s'exercent sur un corps donné dû au mouvement d'un autre corps (ou lui-même) selon l'un des trois degrés de liberté possibles. Cela constitue un coefficient de la matrice M qui peut s'écrire

$$m_{ijk\ell} = -\rho \int_{B_i} \phi_{k\ell}\phi_{ij,n}\,\mathrm{d}s, \quad (i,k)\in\{1,\ldots,N\}, (j,\ell)\in\{1,2,3\} \tag{3}$$

où ρ est la masse volumique du fluide. La solution d'un tel problème peut facilement être obtenue en résolvant numériquement une équation intégrale pour chaque quadruplet (i, j, k, ℓ). Néanmoins cela requiert aussi beaucoup de ressources informatiques. Il existe une alternative sur la base d'une représentation de l'écoulement au moyen d'une méthode de multipôles (voir par exemple Basset [1], Venkatesan [2] ou Prosnak [3]). Le potentiel complexe de l'écoulement F serait alors décomposé en série du type

$$F(z) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\left(\frac{\rho_k}{z-d_k}\right)^n \tag{4}$$

où z est l'affixe d'un point de Ω et (d_k, ρ_k) sont le centre géométrique du corps B_k et son rayon caractéristique. La partie réelle de F constitue le potentiel des vitesses ϕ et sa partie imaginaire est la fonction de courant ψ. Pour des corps autres que des cercles, ce calcul reste difficile. C'est pourquoi des transformations conformes sont utilisées. Celles-ci transforment l'ensemble des contours physiques en autant de cercles. Ces transformations s'inscrivent dans un processus itératif combinant des transformations de type Joukowski, Karman–Trefftz ou Theodorsen–Garrick [4] (voir Ives [5], Luchini et Manzo [6], Wegmann [7], par exemple pour leur mise en œuvre pratique). La relation (4) reste alors valable mais dorénavant dans le plan transformé décrit par l'affixe ζ ; les affixes ζ et z étant liés par la transformation conforme $z = f(\zeta)$, désormais connue de façon quasi-analytique. Cette tâche permet de paramétriser z décrivant chaque contour physique, au moyen d'une seule variable α représentant un azimuth variant sur l'intervalle $[-\pi : \pi]$.

Suivant Kochin et al. [8], on reformule ensuite le problème aux limites (1) en terme de fonction de courant, conduisant ainsi à des conditions de Dirichlet (homogènes ou pas) sur les contours imperméables ; soit $\psi = [-y(\alpha), x(\alpha), \frac{1}{2}(x^2(\alpha) + y^2(\alpha))]$ selon le degré de liberté du mouvement de corps solide considéré.

Comme indiqué dans Scolan [9], on procède aux développements en série de Fourier suivants

$$\left.\begin{array}{r} -y(\alpha) \\ x(\alpha) \\ \frac{1}{2}r^2(\alpha) \end{array}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos n\alpha + B_n\sin n\alpha \tag{5}$$

qui, identifié à la partie imaginaire du développement (4), permettent de calculer les coefficients complexes a_{kn}. On en déduit le potentiel des vitesses (partie réelle du développement (4)) et son gradient normal (déduit de 2) que l'on reporte enfin dans (3). On obtient finalement la formule suivante d'un coefficient de M

$$m_{ijkl} = \pi\rho\sum_{n=1}^{\infty} n\big(2\Im\big(\bar{a}_{in}^{(k\ell)}C_n^{(ij)}\big) + \big|C_n^{(ij)}\big|^2\delta_{ik}\delta_{j\ell}\big) \tag{6}$$

avec $C_n = A_n + \mathrm{i}B_n$ et δ désigne le symbole de Kroenecker. Cette formule fournit l'effort (force pour $j \in \{1, 2\}$, ou moment pour $j = 3$) s'exerçant sur le corps B_i dû au mouvement du corps B_k selon son degré de liberté en translation (pour $\ell \in \{1, 2\}$) ou de rotation (pour $\ell = 3$). Aucun effet de circulation n'est évidemment pris en considération dans la présente formulation. La formule (6) est valable pour n'importe quelle configuration multi-corps et son calcul implique très peu de ressource numérique au regard d'une méthode intégrale standard. La seule contrainte étant de procéder à des transformations conformes.

Ce résultat n'est pas le seul but de cette note. En fait, il sert à produire la base de fonction utilisée pour le calcul des efforts s'exerçant sur les mêmes obstacles mais dorénavant placés dans un écoulement de fluide visqueux et incompressible. Effectivement, sur la base des travaux de Napolitano et Quartapelle [10], on peut formuler le torseur des efforts s'exerçant sur des obstacles placés dans un écoulement régi par les équations de Navier–Stokes (voir Noca et al. [11], Protas et al. [12], ou Pan et Chew [13], par exemple, pour la mise en œuvre pratique de cette formulation). Son intérêt essentiel est qu'elle évite de calculer explicitement la pression. Pour cela on procède au produit scalaire (dans un certain espace fonctionnel), de l'équation de conservation de quantité de mouvement par le gradient d'une fonction qui est précisément solution du problème aux limites (1). Or on connaît désormais cette fonction sous la forme d'une série de type (4). Si on prend l'exemple d'un ensemble de N corps fixes dans un écoulement ambiant de vitesse $\vec{u}$ et de viscosité cinématique ν, l'effort de pression sur le corps B_k s'exprime comme

$$\frac{1}{\rho}\int_{B_k} p\phi_{,n}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\Sigma} \phi(\vec{u}_{,t}\cdot\vec{n})\,\mathrm{d}\sigma + \int_{\Omega} \vec{\nabla}\phi\cdot(\vec{u}\wedge \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u})\,\mathrm{d}w + \nu\int_{\partial\Omega} \vec{\nabla}\phi\cdot(\vec{n}\wedge \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u})\,\mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

où $\partial\Omega$ désigne l'ensemble des frontières solides $\sum_{j=1}^{N} B_j$ ainsi qu'une surface de contrôle Σ rejetée à l'infini là où l'écoulement est non perturbé (sans vorticité). Dans l'intégrale de pression, $\phi_{,n}$ est défini successivement par les trois conditions de Neumann (2), fournissant ainsi le torseur des efforts hydrodynamiques. Dans le second membre les trois intégrales sont facilement calculées sur la base des résultats décrits plus haut.

L'ensemble des développements théoriques et de nombreux exemples, illustrant notamment la rosbustesse des algorithmes de calcul des coefficients de M, figurent dans Scolan et Etienne [14].

Références

[1] A.B. Basset, A Treatise on Hydrodynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1888.
[2] S.K. Venkatesan, Added mass of two cylinders, J. Ship Res. 19 (4) (1985) 234–240.
[3] W.J. Prosnak, Computation of Fluid Motions in Multiply Connected Domains, Wissenschaft + Tecnik, Brau Karlsruhe, 1987, 336 pp.
[4] T. Theodorsen, I.E. Garrick, General potential theory of arbitrary wing sections, NACA Rept. 452, 1933, pp. 177–209.
[5] D.C. Ives, A modern look at conformal mapping including multiply connected regions, AIAA J. 14 (8) (1976) 1006–1011.
[6] P. Luchini, F. Manzo, Flow around simply and multiply connected bodies—a new iterative scheme for conformal mapping, AIAA J. 27 (3) (1989) 345–351.
[7] R. Wegmann, An iterative method for the conformal mapping of doubly connected regions, J. Comput. Appl. Math. 14 (1–2) (1986) 79–98.
[8] N.E. Kochin, I.A. Kibel, N.V. Roze, Theoretical Hydromechanics, Interscience Publishers, 1964, 577 pp.
[9] Y.-M. Scolan, Some aspects of the potential flow around rotating bodies, C. R. Mecanique 333 (6) (2005) 487–492.
[10] M. Napolitano, L. Quartapelle, Force and moment in incompressible flows, AIAA J. 21 (1983) 911–913.
[11] F. Noca, D. Shiels, D. Jeon, A comparison of methods for evaluating time-dependent fluid dynamic forces on bodies, using only velocity fields and their derivatives, J. Fluids Structures 13 (5) (1999) 551–661.
[12] B. Protas, A. Styczek, A. Nowakowski, An effective approach to computation of forces in viscous incompressible flows, J. Comput. Phys. 159 (2) (2000) 231–245.
[13] L.S. Pan, Y.T. Chew, A general formula for calculating forces on a 2-d arbitrary body in incompressible flow, J. Fluids Structures 16 (1) (2002) 71–82.
[14] Y.-M. Scolan, S. Etienne, On the use of conformal mapping for the computation of hydrodynamic forces acting on bodies of arbitrary shape. Part 1: simply connected body. Part 2: multi-connected bodies, J. Engrg. Math. (2007), soumis pour publication.