

# Caractérisation géométrique de la frontière de l'espace de travail d'un système polyarticulé dans le plan

Jérôme Bastien<sup>a,b</sup>, Pierre Legreneur<sup>b,\*</sup>, Karine Monteil<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire mécatronique 3M, équipe d'accueil A 3318, université de technologie de Belfort-Montbéliard, 90010 Belfort cedex, France

<sup>b</sup> Laboratoire d'analyse de la motricité et apprentissage (LAMA), équipe d'accueil EA 647, centre de recherche et d'innovation sur le sport, U.F.R.S.T.A.P.S., université Claude-Bernard – Lyon 1, 27–29, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France

Reçu le 19 septembre 2006 ; accepté après révision le 28 février 2007

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

## Résumé

On modélise un système polyarticulé plan par les points définissant les articulations et un dernier point  $A_p$  lié au dernier corps. L'espace balayé par le point  $A_p$  a sa frontière définie par 3 types de courbes correspondants à des configurations singulières. Ces courbes peuvent être déterminées géométriquement. **Pour citer cet article :** J. Bastien *et al.*, *C. R. Mecanique* 335 (2007). © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Geometrical characterisation of the boundary of the polyarticulated system workspace in the plane.** We model a planar polyarticulated system by points defining the joints and a last point  $A_p$  linked to the last solid. The surface swept by the point  $A_p$  has its boundary defined by 3 kinds of particular configurations. These curves can be geometrically determined. **To cite this article :** J. Bastien *et al.*, *C. R. Mecanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Biomécanique ; Espace de travail ; Frontière ; Surface balayée ; Rang du Jacobien

*Keywords :* Biomechanics ; Workspace ; Boundary ; Swept surface ; Rank of Jacobian

## Abridged English version

Let  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  be a reference frame,  $p$  an integer greater than or equal to 2,  $(l_i)_{1 \leq i \leq p}$   $p$  nonnegative numbers and  $(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$  and  $(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$   $2p$  angles satisfying

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad -\pi < \theta_i^- < \theta_i^+ \leq \pi \quad (1)$$

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [jerome.bastien@utbm.fr](mailto:jerome.bastien@utbm.fr) (J. Bastien), [pierre.legreneur@univ-lyon1.fr](mailto:pierre.legreneur@univ-lyon1.fr) (P. Legreneur), [karine.monteil@univ-lyon1.fr](mailto:karine.monteil@univ-lyon1.fr) (K. Monteil).

We define the workspace as the set of points  $A_p$  such as

$$A_0 = 0, \quad (\overrightarrow{j, 0A_1}) = \theta_1 \quad (2a)$$

$$\forall i \in \{2, \dots, p\}, \quad (\overrightarrow{A_{i-2}A_{i-1}, A_{i-1}A_i}) = \theta_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad A_{i-1}A_i = l_i \quad (2b)$$

with the constraints

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad \theta_i \in [\theta_i^-, \theta_i^+] \quad (2c)$$

See Fig. 1. We consider function  $\Phi_p$  from domain

$$F = \prod_{i=1}^p [\theta_i^-, \theta_i^+] \quad (3)$$

to  $\mathbb{R}^2$  defined by

$$\forall (\theta_1, \dots, \theta_p) \in F, \quad \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p) = A_p \quad (4)$$

The point  $A_p$  represents the distal extremity of an articulated chain of segments, like a human arm. The space defined by this extremity is so-called plan ‘workspace’ [1]. In this Note, we give a geometrical description of the boundary of the workspace, which corresponds to the boundary  $\partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$  of  $D = \Phi_p(F)$ .

In biomechanics or robotics, one of the most known method for determining this boundary is to write that the Jacobian of the function  $\Phi_p$  is necessary singular on the boundaries [2–6]. Let us choose  $q \in \{0, \dots, p\}$  the number of nonsaturated components of the point  $x = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ . If  $q$  is equal to 0 or 1, we have no properties of the Jacobian of  $\Phi$ . On the other hand, if  $q$  is greater than 2, denote by  $\widetilde{d\Phi}(x)$  the submatrix of  $d\Phi(x)$ , where all the columns corresponding to components of  $x$  which are equal to  $\theta_i^\pm$  are removed. Then the rank of  $\widetilde{d\Phi}(x)$  is necessarily equal to 1. This computation is classically done through symbolic calculation. However, as far as we know, no analytical solution of this description, as well as an automatic method for describing the boundaries, is available in the literature. This method is very expensive in calculation time, especially when the number of degrees of freedom increases.

The main idea here is to notice that, if the rank of  $\widetilde{d\Phi}(x)$  is equal to 1, then the points  $A_{j-1}$  corresponding to the integers  $j$  for which  $\theta_j \in ]\theta_j^-, \theta_j^+[$  and the point  $A_p$ , are aligned. This simple, pure, geometrical property permits the computation of all the values of  $\theta_i$ , for  $i \in \{1, \dots, p\}$ , except one, which describes  $]\theta_{i_0}^-, \theta_{i_0}^+[$ . We obtain, then, a finite union of arcs of circle, which contains necessarily the boundary of the workspace.

## 1. Présentation du problème

Reprenons l’étude faite dans [7].

Soient  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé direct,  $p$  un entier supérieur ou égal à deux,  $(l_i)_{1 \leq i \leq p}$   $p$  nombres strictement positifs, et  $(\theta_i^+)_{1 \leq i \leq p}$  et  $(\theta_i^-)_{1 \leq i \leq p}$   $2p$  angles vérifiant (1).

On définit l’espace de travail comme les l’ensemble des points  $A_p$  vérifiant (2a), (2b) et les contraintes (2c) (voir Fig. 1). On considère la fonction  $\Phi_p$ , définie par (4), de  $F$ , défini par (3), vers  $\mathbb{R}^2$ . On donne la définition suivante :

**Définition 1.1.** Pour tout  $x = (\theta_1, \dots, \theta_p) \in F$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ , la  $i$ -ième contrainte Éq. (2c) est active si  $\theta_i \in \{\theta_i^-, \theta_i^+\}$  et inactive si  $\theta_i \in ]\theta_i^-, \theta_i^+[$ , soit, en d’autres termes,  $\theta_i \in \{\theta_i^-, \theta_i^+\}$  est saturé et  $\theta_i \in ]\theta_i^-, \theta_i^+[$  est libre.

On cherche à définir la frontière  $\partial D = D \setminus \overset{\circ}{D}$  de  $D = \Phi_p(F)$  où  $F$  est le pavé de  $\mathbb{R}^p$  défini par (3). De nombreux travaux existent pour définir ces limites de l’espace de travail [8–14]. Cependant, ces travaux constituent des études de cas particuliers ou proposent des solutions numériques approchées. Traditionnellement, on utilise les résultats fondamentaux suivants (voir par exemple [5,2,3]) :

**Lemme 1.2.** Soit  $x$  appartenant à  $F$  tel que  $\Phi(x)$  appartient à  $\partial D$ . Soit  $q \in \{0, \dots, p\}$  le nombre de composantes libres de  $x$ . Trois cas exclusifs se présentent :

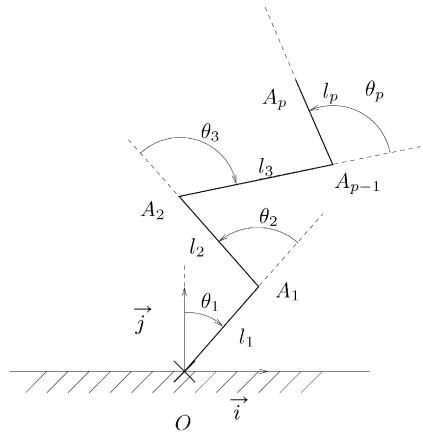


Fig. 1. Le système plan considéré.  
 Fig. 1. The considered planar system.

(i) Si  $q = p$ , alors

$$\text{rang}(d\Phi(x)) \leq 1 \tag{5}$$

(ii) Si  $2 \leq q \leq p - 1$ , on note  $\widetilde{d\Phi(x)}$  la matrice extraite de la jacobienne  $d\Phi(x)$ , où toutes les colonnes correspondant à une composante saturée de  $x$  ont été enlevées. Alors

$$\text{rang}(\widetilde{d\Phi(x)}) \leq 1 \tag{6}$$

(iii) Si  $q \leq 1$ , il n’y a pas de condition sur la jacobienne.

Ces conditions sont des conditions nécessaires pour être sur la frontière mais non suffisantes.

**Proposition 1.3.** Les trois courbes de  $\mathbb{R}^2$   $S_I$ ,  $S_{II}$  et  $S_{III}$ , correspondant aux trois cas exclusifs du Lemme 1.2 sont définies par :

$$\Phi(x) \in S_I \iff q = p \tag{7a}$$

$$\Phi(x) \in S_{II} \iff q \in \{2, \dots, p - 1\} \tag{7b}$$

$$\Phi(x) \in S_{III} \iff q \leq 1 \tag{7c}$$

La frontière  $\partial D$  de  $D$  est alors incluse dans  $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$ .

Dans la Section 2, on montre que  $S_I$ ,  $S_{II}$  et  $S_{III}$  peuvent être définies de façon purement géométrique. Dans la Section 3, on fournit une description explicite de ces courbes comme réunion finie d’arc de cercles, ce qui sera illustré en Section 4.

## 2. Comportement de la jacobienne de l’application $\Phi_p$ sur la frontière de l’espace de travail

La détermination de la partie  $S_{III}$  ne pose aucune difficulté ; en effet, la partie correspondant à  $q \in \{0, 1\}$  est une réunion finie d’arcs de cercles.

Pour les parties  $S_I$  et  $S_{II}$ , la matrice jacobienne est calculée de façon symbolique [2–6]. Les conditions portant sur le rang sont ensuite traduites par la nullité de tous les déterminants  $2 \times 2$  de la jacobienne et permettent une détermination des différentes parties de  $S_I$  et  $S_{II}$ . Il est plus pratique d’exprimer les conditions du Lemme 1.2 et de la Proposition 1.3 en une condition purement géométrique qui fournira une description géométrique intrinsèque des différents arcs de cercles constituant  $S_I$  et  $S_{II}$ .

Selon la Proposition 1.3,  $y = \Phi_p(x) = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  appartient à  $S_I \cup S_{II}$  si et seulement si le nombre  $q$  de composantes libres de  $x$  appartient à  $\{2, \dots, p\}$ . On note  $I = \{i_1, \dots, i_q\}$  l’ensemble des indices  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_q \leq p$

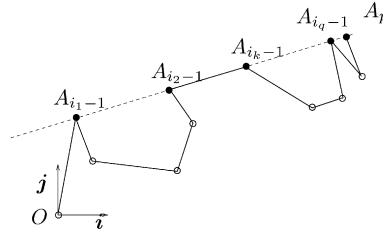


Fig. 2. Représentation géométrique de la contrainte (8).

Fig. 2. Geometrical representation of constraint (8).

correspondant aux composantes libres de  $x$  et  $J = \{j_1, \dots, j_{p-q}\}$  l'ensemble des indices  $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{p-q} \leq p$  correspondant aux composantes saturées de  $x$ .

En remarquant que la tangente au cercle est orthogonale à son rayon, la Proposition 1.3 peut être exprimée de façon géométrique :

**Proposition 2.1.** *Le point  $y = \Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_p)$  appartient à  $S_I \cup S_{II}$  si et seulement si*

$$les\ q + 1\ points\ A_{i_1-1}, A_{i_2-1}, \dots, A_{i_q-1}\ et\ A_p\ sont\ alignés \tag{8}$$

La principale idée de cette Note est alors exprimée par le fait que le point  $y$  appartient à  $S_I \cup S_{II}$  si et seulement si la contrainte (8) est vérifiée (voir Fig. 2) :

- Point  $A_i$  où la contrainte est inactive (représenté par ●) ;
- Point  $A_i$  où la contrainte est active (représenté par ○) ;

On rappelle que  $q \in \{2, \dots, p\}$  désigne le nombre de composantes libres de  $x = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ .

Il est dès lors possible de montrer que le point  $y$  appartient à  $S_I \cup S_{II}$  si et seulement si

- chacune des composantes saturées  $\theta_{j_k}$  pour  $1 \leq k \leq p - q$  est connue ;
- chacune des composantes libres  $\theta_{i_k}$  pour  $2 \leq k \leq q$  est connue en fonction des composantes saturées précédentes ;
- seule, la composante libre  $\theta_{i_1}$  décrit l'intervalle  $] \theta_{i_1}^-, \theta_{i_1}^+ [$ .

Ainsi,  $S_I \cup S_{II}$  apparaît comme la réunion finie des arcs de cercles suivants :

$$\Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, ] \theta^-, \theta^+ [, \theta_{m+1}, \dots, \theta_p) \tag{9}$$

où  $m$  est un entier décrivant  $\{1, \dots, p\}$ , les  $p - 1$  angles  $(\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, \theta_{m+1}, \dots, \theta_p)$  sont connus et  $\theta^-$  et  $\theta^+$  sont deux angles tels que  $\theta^- < \theta^+$ .

De même,  $S_{III}$  apparaît comme la réunion finie des arcs de cercles du type

$$\Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_{m-1}, [ \theta^-, \theta^+ ], \theta_{m+1}, \dots, \theta_p) \tag{10}$$

**Remarque 1.** L'idée géométrique de la Proposition 2.1 est relativement simple. Elle figure pour trois points alignés dans [14], mais n'est pas généralisée. Elle permet d'écrire l'algorithme de description de  $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$ , proposé dans la section suivante et développé dans [7].

### 3. Définition géométrique de $S_I$ , $S_{II}$ et $S_{III}$ comme réunion finie d'arcs de cercles

Grâce aux résultats de la section précédentes, on a alors les trois résultats suivants :

**Proposition 3.1.** *La partie  $S_{III}$  est une réunion finie d'arcs de cercles, chacun d'eux étant défini par  $\Phi_p(\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, [ \theta_i^-, \theta_i^+ ], \theta_{i+1}, \dots, \theta_p)$  où  $i$  décrit  $\{1, \dots, p\}$  et*

$$\forall j \neq i, \quad \theta_j \in \{\theta_j^-, \theta_j^+\} \tag{11}$$

**Proposition 3.2.** Si pour tout  $j \in \{2, \dots, p\}$ ,  $\theta_j^- \theta_j^+ < 0$  alors  $S_I$  est l'arc de cercle défini par  $\Phi_p([\theta_1^-, \theta_1^+], 0, 0, \dots, 0)$ ; sinon,  $S_I$  est vide.

Dans le second cas,  $S_I$  correspond à l'extension maximale du bras. Le point  $A_p$  décrit un arc de cercle de rayon  $\sum_{i=1}^p l_i$ , qui est la plus grande distance possible de l'origine.

**Proposition 3.3.** Il existe un entier  $M \in \mathbb{N}$ ,  $m$  entiers  $(p_m)_{1 \leq m \leq M}$  de  $\{1, \dots, p\}^M$ ,  $M$  éléments de  $\mathbb{R}^{p-1}$ ,  $(\theta_1^m, \dots, \theta_{p_m-1}^m, \theta_{p_m+1}^m, \dots, \theta_p^m)_{1 \leq m \leq M}$  et  $2m$  nombres  $\{\theta_m^-, \theta_m^+\}_{1 \leq m \leq M}$  (avec  $\theta_m^- < \theta_m^+$ ) tels que  $S_{II}$  est la réunion finie d'arcs de cercles définie par

$$\bigcup_{1 \leq m \leq M} \Phi_p(\theta_1^m, \dots, \theta_{p_m-1}^m, ]\theta_m^-, \theta_m^+[ , \theta_{p_m+1}^m, \dots, \theta_p^m) \tag{12}$$

Chacune des trois propositions de cette section permet donc une description algorithmique de  $S_I$ ,  $S_{II}$  et  $S_{III}$  qui n'utilise pas le calcul symbolique.

#### 4. Simulations numériques

Pour les simulations, on considère un bras à deux ou trois degrés de liberté ( $p \in \{2, 3\}$ ).

Les données numériques correspondent à des données anthropométriques et sont les suivantes (les longueurs sont en mètres et les angles en degrés) : pour  $p = 2$ , on a

$$\theta_1^- = -130, \quad \theta_1^+ = 0, \quad \theta_2^- = -10, \quad \theta_2^+ = 25, \quad l_1 = 0,26, \quad l_2 = 0,19$$

pour  $p = 3$ , on a

$$\begin{aligned} \theta_1^- &= -60, & \theta_2^+ &= 120, & \theta_2^- &= -130, & \theta_2^+ &= 0, & \theta_3^- &= -10, & \theta_3^+ &= 25 \\ l_1 &= 0,33, & l_2 &= 0,26, & l_3 &= 0,19 \end{aligned}$$

La chaîne cinématique correspondant au cas  $p = 3$  est représentée, Fig. 3.

La Fig. 4 représente la surface discrete balayée, c'est-à-dire la surface obtenue par le tracé d'un nombre fini de points définis par  $\Phi_p(\theta_1^m, \theta_2^m, \dots, \theta_p^m)$  où  $(\theta_1^m, \theta_2^m, \dots, \theta_p^m)$  appartient à un sous-ensemble fini de  $[\theta_1^-, \theta_1^+] \times [\theta_2^-, \theta_2^+] \times \dots \times [\theta_p^-, \theta_p^+]$ .

Sur la Fig. 4, la partie  $S_I$  est incluse dans la frontière, ce qui n'est pas le cas pour les parties  $S_{II}$  et  $S_{III}$ . En effet, la condition géométrique donnée pour décrire la frontière est nécessaires mais non suffisante. Ainsi, certains arcs de cercles doivent être en partie ou totalement supprimés, afin de décrire correctement la totalité de la frontière. Ces difficultés ont aussi été mises en évidence par [2–4].

#### 5. Conclusion

La frontière étudiée est traditionnellement écrite sous la forme  $S = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$ . La partie  $S_I$  correspond aux points pour lesquels toutes les contraintes sont inactives. La partie  $S_{II}$  correspond aux points pour lesquels le nombre

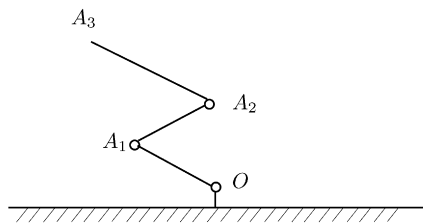


Fig. 3. La chaîne cinématique pour  $p = 3$ .

Fig. 3. The studied linkage for  $p = 3$ .

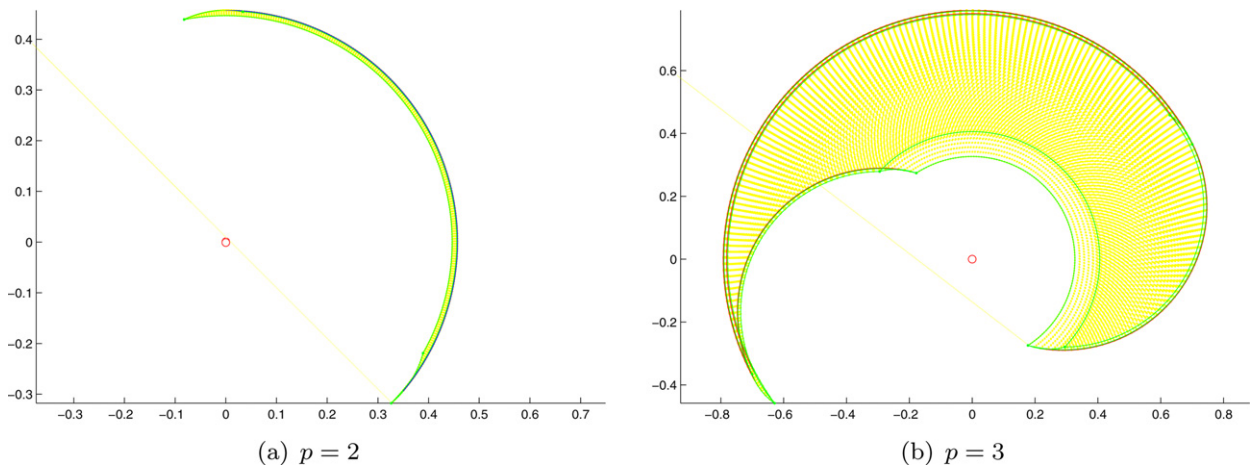


Fig. 4. Simulation de l'espace de travail d'un bras à trois degrés de liberté ; la surface discrete balayée est tracé en jaune,  $S_I$  est tracé en bleu,  $S_{II}$  est tracé en rouge et  $S_{III}$  est tracé en vert.

Fig. 4. Simulation of workspace for a three degrees of freedom arm; the discrete swept surface is plotted in yellow,  $S_I$  is plotted in blue,  $S_{II}$  is plotted in red and  $S_{III}$  is plotted in green.

de contraintes inactives est compris entre 1 et  $p - 1$ . La partie  $S_{III}$  correspond aux points pour lesquels au plus une contrainte est inactive.

Cette Note montre que la résolution du problème par la formulation en terme de jacobienne constitue une étape dont on peut se passer, au profit d'une description purement géométrique. En effet, tous les points pour lesquels la contrainte est inactive sont alignés ce qui suffit à décrire la frontière étudiée.

De plus, cette formulation géométrique fournit une description phénoménologique de la frontière, qui correspond localement à une position où des articulations sont étirées au maximum.

## Références

- [1] J.F.M. Molenbroek, Reach envelopes of older adults, in: The 42nd Annual Meeting of the "Human Factors and Ergonomics Society", Chicago, USA, Oct 5–9 1998, pp. 166–170.
- [2] K. Abdel-Malek, F. Adkins, H.-Y. Yeh, E. Haug, On the determination of boundaries to manipulator workspaces, *Robotic Comput. Integrated Manufacturing* 13 (1) (1997) 63–72.
- [3] K. Abdel-Malek, H.-Y. Yeh, Geometric representation of the swept volume using Jacobian rank-deficiency conditions, *Computer Aided Design* 29 (6) (1997) 457–468.
- [4] K. Abdel-Malek, H.-Y. Yeh, O. Saeb, Swept volumes: void and boundary identification, *Computer Aided Design* 30 (13) (1998) 1009–1018.
- [5] K. Abdel-Malek, J. Yang, B. Zhang, E. Tanbours, Towards understanding the workspace of human limbs, *Ergonomics* 47 (13) (2004) 1386–1405.
- [6] E. Dupuis, E. Papadopoulos, V. Hayward, The singular vector algorithm for the computation of rank—deficiency loci of rectangular Jacobians, in: International Conference on Intelligent Robots and Systems, Maui, Hawaii, USA, Oct 29–Nov 03 2001.
- [7] J. Bastien, P. Legreneur, K. Monteil, A new geometrical characterisation of the boundaries of plane workspaces, *Europ. J. Mech. Solids A* (2006), soumis pour publication.
- [8] A.M. Hay, J.A. Snyman, A multi-level optimization methodology for determining the dextrous workspaces of planar parallel manipulators, *Struct. Multidiscip. Optim.* 30 (6) (2005) 422–427.
- [9] A.M. Hay, J.A. Snyman, The chord method for the determination of nonconvex workspaces of planar parallel manipulators, *Comput. Math. Appl.* 43 (8–9) (2002) 1135–1151.
- [10] A.M. Hay, J.A. Snyman, The determination of nonconvex workspaces of generally constrained planar Stewart platforms, *Comput. Math. Appl.* 40 (8–9) (2000) 1043–1060.
- [11] A.J. Cebula, P.J. Zsombor-Murray, Formulation of the workspace equation for wrist-partitioned spatial manipulators, *Mechanism Machine Theory* 41 (7) (2006) 778–789.
- [12] S. Dibakar, T.S. Mruthyunjaya, A computational geometry approach for determination of boundary of workspaces of planar manipulators with arbitrary topology, *Mechanism Machine Theory* 34 (1999) 149–169.
- [13] I. Ebrahimi, J.A. Carretero, R. Boudreau, 3-PRRR redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses, *Mechanism Machine Theory* (2006), in press.
- [14] J.-P. Merlet, C.M. Gosselin, N. Mouly, Workspaces of planar parallel manipulators, *Mechanism Machine Theory* 33 (1–2) (1998) 7–20.