Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Mecanique 335 (2007) 407–413
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Fonction de Green pour les matériaux à anisotropie ellipsoïdale

Ahmad Pouya

LCPC, 52, boulevard Lefebvre, 75732 Paris cedex 15, France

Reçu le 25 septembre 2006 ; accepté après révision le 24 avril 2007

Disponible sur Internet le 12 juin 2007

Présenté par André Zaoui

Résumé

Une solution explicite du champ de déplacement dû à une force ponctuelle dans un milieu infini est connue dans les cas des matériaux élastiques linéaires isotropes, d'isotropie transversale et dans quelques autres cas qui s'obtiennent de ceux-ci par une transformation linéaire. Dans cette Note, nous considérons une famille de matériaux élastiques linéaires caractérisés par le fait que la surface indicatrice de certains paramètres élastiques, i.e. le diagramme polaire donnant la valeur de ces paramètres dans différentes directions, est ellipsoïdale. Nous montrons d'abord qu'il s'agit d'une famille de matériaux dépendant de 12 paramètres et dont l'expression générale du tenseur des modules d'élasticité peut être donnée à l'aide de deux tenseurs symétriques d'ordre 2. Nous montrons ensuite que, pour ces matériaux, il est possible de trouver une solution explicite du problème de Green du milieu infini et nous donnons une première expression de cette solution. ***Pour citer cet article : A. Pouya, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Abstract

Green's function for materials with ellipsoidal anisotropy. An explicit solution for the Green function of the infinite medium in linear elastic materials is known only for isotropic and transversely isotropic materials and for some other cases obtained by a linear transformation. In this Note, we consider a family of linear elastic materials characterized by the property that for some elastic parameters, the polar diagram giving the value of these parameters in different directions is ellipsoidal. We show first that this family of materials depends on 12 independent parameters and that the elastic moduli tensor of these materials can be defined by two second order symmetric tensors. We show then that for these materials an explicit solution for the Green function of the infinite medium can be given and we give a first expression for this solution. ***To cite this article: A. Pouya, C. R. Mecanique 335 (2007).***

Mots-clés : Mécanique des solides numérique ; Fonction de Green ; Elasticité linéaire ; Anisotropie

Keywords: Computational solid mechanics; Green function; Linear elasticity; Anisotropy

1. Introduction

La solution du champ de déplacement dû à une force ponctuelle, appelée fonction de Green, est la clé de résolution d'un grand nombre de problèmes de l'élasticité linéaire. Une solution explicite de fonction de Green pour le milieu

Adresse e-mail : pouya@lcpc.fr.

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2007.05.001

infini était connue uniquement pour les matériaux isotropes [1] et d'isotropie transversale [2–5]. Par une *transformation linéaire* de la géométrie et du comportement [6,7], la solution du cas isotrope a pu être étendue aux matériaux anisotropes de Saint Venant [8,9] dépendant de quatre paramètres intrinsèques. La même transformation appliquée aux matériaux à isotropie transversale définit une famille à 12 paramètres indépendants [7] pour lesquelles la solution de fonction de Green a pu être également établie [10].

Saint Venant a introduit plusieurs familles de matériaux élastiques linéaires anisotropes dont l'anisotropie se caractérise par le fait que la surface indicatrice de certains paramètres élastiques est un ellipsoïde [8]. Certains de ces modèles ont été utilisés dans les années récentes pour décrire les géomatériaux et les matériaux fissurés [9]. Dans ce travail, nous présentons une des principales familles de ces « *matériaux ellipsoïdaux* » pour laquelle nous montrons qu'il est possible d'établir une solution explicite de la fonction de Green du milieu infini.

Notations. Nous notons ε_{ijk} le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita prenant la valeur 1 si (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$, -1 si c'est une permutation impaire et zéro sinon. Pour deux vecteurs $\underline{a}$ et $\underline{b}$, deux tenseurs d'ordre 2 symétriques $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ et un tenseur $\mathbb{C}$ d'ordre 4, nous notons $\|\underline{a}\| = \sqrt{a_i a_i}$, $\underline{a} \,.\, \underline{b} = a_i b_i$, $(\underline{a} \wedge \underline{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$, $(\underline{a} \otimes \underline{b})_{ij} = a_i b_j$, $(\boldsymbol{A} \,.\, \underline{a})_i = A_{ij} a_j$, $(\boldsymbol{AB})_{ij} = A_{ik} B_{kj}$, $\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B} = A_{ij} B_{ji}$, $|\boldsymbol{A}| = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} A_{il} A_{jm} A_{kn}/6$ (déterminant de $\boldsymbol{A}$) et $(\mathbb{C} : \boldsymbol{A})_{ij} = C_{ijkl} A_{lk}$.

2. « Matériaux ellipsoïdaux »

Pour un tenseur des modules d'élasticité $\mathbb{C}$, notons $\underline{n}$ un vecteur unitaire et $c(\underline{n})$ le coefficient d'élasticité dans la direction $\underline{n}$ défini par :

$$c(\underline{n}) = (\underline{n} \otimes \underline{n}) : \mathbb{C} : (\underline{n} \otimes \underline{n}) \tag{1}$$

et considérons la surface indicatrice de $\sqrt[-4]{c(\underline{n})}$, définie par l'équation polaire :

$$r(\underline{n}) = \sqrt[-4]{c(\underline{n})} \tag{2}$$

Notons $\widehat{\Phi}_4$ la famille des matériaux pour lesquels cette surface est un ellipsoïde. Cette famille qui comprend des éléments non orthotropes dépend de 12 paramètres indépendants [9] et sa sous-famille orthotrope, de 6 paramètres intrinsèques [8]. Ci-dessous, nous allons d'abord déterminer la forme générale des éléments de cette famille et calculer ensuite une solution explicite de fonction de Green pour ces éléments.

3. Forme générale du tenseur des coefficients d'élasticité

En notant $\underline{x} = r\underline{n}$, on trouve que l'équation polynomiale de la surface (2) s'écrit :

$$(\underline{x} \otimes \underline{x}) : \mathbb{C} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) = 1 \tag{3}$$

L'équation d'un ellipsoïde peut être écrite sous la forme $\underline{x} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \underline{x} = 1$ où $\boldsymbol{D}$ est un tenseur symétrique et défini-positif. On peut écrire la même équation sous la forme $(\underline{x} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \underline{x})^2 = 1$. On a donc l'équivalence :

$$\forall \underline{x}; \quad (\underline{x} \otimes \underline{x}) : \mathbb{C} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad (\underline{x} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \underline{x})^2 = 1 \tag{4}$$

Comme les deux polynômes $(\underline{x} \otimes \underline{x}) : \mathbb{C} : (\underline{x} \otimes \underline{x})$ et $(\underline{x} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \underline{x})^2$ sont homogènes de degré 4, cette propriété implique : $\forall \underline{x}$; $(\underline{x} \otimes \underline{x}) : \mathbb{C} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) = (\underline{x} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \underline{x})^2$. Donc, en notant S_2^+ la famille des tenseurs d'ordre 2 symétriques et définis-positifs, on peut définir $\widehat{\Phi}_4$ par :

$$\mathbb{C} \in \widehat{\Phi}_4 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{D} \in S_2^+; \quad \left\{\forall \underline{x};\ (\underline{x} \otimes \underline{x}) : \mathbb{C} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) = (\underline{x} \,.\, \boldsymbol{D} \,.\, \underline{x})^2\right\} \tag{5}$$

Pour déterminer la forme explicite de $\mathbb{C} \in \widehat{\Phi}_4$, définissons $\mathbb{F}$ par :

$$F_{ijkl} = C_{ijkl} - \frac{1}{2}(D_{ik} D_{jl} + D_{il} D_{jk}) \tag{6}$$

On trouve qu'il vérifie :

$$\forall \underline{x}; \quad (\underline{x} \otimes \underline{x}) : \mathbb{F} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) = 0 \tag{7}$$

et possède les mêmes symétries qu'un tenseur de modules d'élasticité :

$$F_{ijkl} = F_{ijlk} = F_{klij} \tag{8}$$

Cherchons la forme générale d'un tenseur $\mathbb{F}$ vérifiant ces propriétés. L'Éq. (7) implique que pour tous vecteurs $\underline{x}$, $\underline{y}$, $\underline{a}$ et $\underline{b}$ nous pouvons écrire :

$$(\underline{x} \otimes \underline{x}) : \mathbb{F} : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + (\underline{y} \otimes \underline{y}) : \mathbb{F} : (\underline{y} \otimes \underline{y}) - 2(\underline{a} \otimes \underline{a}) : \mathbb{F} : (\underline{a} \otimes \underline{a}) - 2(\underline{b} \otimes \underline{b}) : \mathbb{F} : (\underline{b} \otimes \underline{b}) = 0 \tag{9}$$

En prenant dans cette relation $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}$ et $\underline{y} = \underline{a} - \underline{b}$ et en utilisant (8), on trouve :

$$\forall \underline{a}, \underline{b}; \quad (\underline{a} \otimes \underline{a}) : \mathbb{F} : (\underline{b} \otimes \underline{b}) + 2(\underline{a} \otimes \underline{b}) : \mathbb{F} : (\underline{a} \otimes \underline{b}) = 0 \tag{10}$$

Définissions M par :

$$M_{ijkl} = (F_{ijkl} + F_{ikjl} + F_{iljk})/3 \tag{11}$$

Ce tenseur possède les symétries $M_{ijkl} = M_{ijlk} = M_{klij}$. La relation (10) permet de montrer que $\forall \underline{a}, \underline{b}$; $(\underline{a} \otimes \underline{a}) : \mathbb{M} : (\underline{b} \otimes \underline{b}) = 0$, ce qui suffit pour montrer que $M = 0$. Définissons maintenant le tenseur symétrique $\boldsymbol{L}$ par :

$$L_{pq} = \frac{1}{3} \varepsilon_{pik} \varepsilon_{qjl} F_{ijkl} \tag{12}$$

En utilisant les identités mathématiques :

$$\varepsilon_{imn} \varepsilon_{ipq} = \delta_{mp} \delta_{nq} - \delta_{mq} \delta_{np}, \qquad \varepsilon_{imn} \varepsilon_{jmn} = 2\delta_{ij} \tag{13}$$

on montre que $(\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} + \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jkn})\, L_{mn}/2 = F_{ijkl} - M_{ijkl}$, et comme $M_{ijkl} = 0$,

$$F_{ijkl} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} + \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jkn})\, L_{mn} \tag{14}$$

Un tenseur d'ordre 4 vérifiant les propriétés (7) et (8) s'exprime ainsi sous la forme (14) à l'aide d'un tenseur d'ordre 2 symétrique.

En conséquence, la forme générale d'un élément de $\widehat{\Phi}_4$ est donnée par l'expression suivante dans laquelle $\boldsymbol{D}$ est un tenseur symétrique et défini-positif et $\boldsymbol{L}$ est symétrique :

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2} (D_{ik} D_{jl} + D_{il} D_{jk}) + \frac{1}{2} (\varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} + \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jkn}) L_{mn} \tag{15}$$

La famille $\widehat{\Phi}_4$ dépend donc de 12 paramètres indépendants comme cela a pu être montré d'une autre manière [9]. Notons que la condition que $\mathbb{C}$ soit défini-positif impose des bornes sur les valeurs de $\boldsymbol{L}$ relativement à $\boldsymbol{D}$.

En ce qui concerne les symétries possibles des éléments de $\widehat{\Phi}_4$, on peut noter qu'elles doivent être recherchées parmi celles de la surface indicatrice de $\sqrt[-4]{c(\underline{n})}$. En effet, si le tenseur orthogonal $\boldsymbol{R}$ représente une symétrie de $\mathbb{C}$, i.e. si $C_{ijkl} R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} = C_{mnpq}$, alors la surface (3) est également invariante par la transformation $\underline{x}' = \boldsymbol{R} \,.\, \underline{x}$. Or, si les 3 diamètres principaux de cet ellipsoïde sont différents, ses symétries se réduisent à trois symétries planes (et leurs combinaisons) par rapport aux plans de symétrie de $\boldsymbol{D}$. Pour que ces plans constituent des plans de symétrie de $\mathbb{C}$, il faut qu'ils soient aussi des plans de symétrie de $\boldsymbol{L}$, ce qui n'est pas vrai dans le cas général. Ainsi, l'élément général de $\widehat{\Phi}_4$ peut ne posséder aucune symétrie plane ni de rotation. En revanche, si $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{L}$ commutent, alors $\mathbb{C}$ est orthotrope ; s'ils possèdent la symétrie transversale autour d'un axe commun, alors $\mathbb{C}$ possède la même symétrie et, s'ils sont sphériques, $\mathbb{C}$ est isotrope. Ainsi, la famille $\widehat{\Phi}_4$, comme les familles définies par d'autres types d'*anisotropies ellipsoïdales* [9], recoupe différentes *classes de symétrie* des matériaux élastiques définies à partir d'invariance par rotations ou symétries planes [13].

4. Calcul de la fonction de Green

La fonction de Green du milieu infini $\boldsymbol{G}(\underline{x})$, solution de $C_{ijkl} \partial_{jk} G_{lm} = \delta_{im} \delta(\underline{x})$ et nulle à l'infinie, peut être calculée par la formule intégrale suivante [2,11,12] :

$$\boldsymbol{G}(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_0^{2\pi} \Gamma^{-1}(\underline{n})\, \mathrm{d}\theta \tag{16}$$

Dans cette formule, $r = \|\underline{x}\|$ et $\underline{n}$ est le vecteur unitaire parcourant le cercle de rayon unité dans le plan orthogonal à $\underline{x}$ et paramétré par θ. Le *tenseur acoustique* $\boldsymbol{\Gamma}(\underline{n})$ est défini par :

$$\Gamma_{ik} = C_{ijkl} n_j n_l \tag{17}$$

Il est bien connu que le calcul de $\boldsymbol{G}$ par (16) se heurte au problème de factorisation d'un polynôme de degré 6 pour laquelle on ne connaît pas de solution explicite générale. En effet, $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ peut être calculé par la matrice des co-facteurs de $\boldsymbol{\Gamma}$ divisée par le déterminant $|\boldsymbol{\Gamma}|$ et, comme les composantes de $\boldsymbol{\Gamma}(\underline{n})$ sont des polynômes trigonométriques de second degré en θ, $|\boldsymbol{\Gamma}(\underline{n})|$ est un polynôme de sixième degré. Mais nous montrons ci-dessous que, pour les matériaux de la famille $\widehat{\Phi}_4$, cette factorisation devient possible grâce à la transformation définie dans [6,7] et ceci permet le calcul explicite de $\boldsymbol{G}(\underline{x})$.

Soit, en effet, $\boldsymbol{P}$ un tenseur symétrique inversible. Notons $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}^{-1}$ et définissons le tenseur $\widetilde{\mathbb{C}}$ par :

$$\widetilde{C}_{mnpq} = C_{ijkl} Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} \tag{18}$$

Il a été démontré [6,7] que $\widetilde{\mathbb{C}}$ décrit un nouveau matériau élastique linéaire et que les fonctions de Green du milieu infini des deux matériaux, notés respectivement $\boldsymbol{G}$et $\widetilde{\boldsymbol{G}}$, sont reliées par la relation :

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(\underline{\tilde{x}}) = |\boldsymbol{P}| \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}(\underline{x}) \boldsymbol{P} \tag{19}$$

où $\underline{x} = \boldsymbol{P} \,.\, \underline{\tilde{x}}$. Une solution explicite de $\boldsymbol{G}$ peut donc se déduire d'une solution explicite de $\widetilde{\boldsymbol{G}}$. Si on choisit $\boldsymbol{P}$ comme étant l'unique solution symétrique et définie-positive de $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$, en appliquant la transformation (18) et utilisant les identités mathématiques (13) on trouve :

$$\widetilde{C}_{mnpq} = \frac{1}{2}(\delta_{mp}\delta_{nq} + \delta_{mq}\delta_{np}) + H_{mnpq} \tag{20}$$

avec $H_{mnpq} = F_{ijkl} Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq}$. Le tenseur $\mathbb{H}$ ainsi défini possède les propriétés (7) et (8). On peut donc écrire $\mathbb{H}$ sous une forme analogue à (14) en utilisant (12). On trouve alors :

$$\widetilde{C}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jln} + \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}) L'_{mn} \tag{21}$$

avec :

$$L'_{ab} = \frac{1}{6}\varepsilon_{amp}\varepsilon_{bnq}(\varepsilon_{ikc}\varepsilon_{jld} + \varepsilon_{ilc}\varepsilon_{jkd}) Q_{im} Q_{jn} Q_{kp} Q_{lq} L_{cd} \tag{22}$$

En posant $2\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{L}'$ où $\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur d'identité, on écrit finalement :

$$\widetilde{C}_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl} - (\varepsilon_{ikm}\varepsilon_{jln} + \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn}) T_{mn} \tag{23}$$

Pour ce tenseur $\widetilde{\mathbb{C}}$, la formule (16) s'écrit :

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(\underline{\tilde{x}}) = \frac{1}{8\pi^2 \tilde{r}} \int_0^{2\pi} \widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1}(\underline{n})\, \mathrm{d}\theta \tag{24}$$

où $\tilde{r} = \|\underline{\tilde{x}}\|$ et $\underline{n}$ parcourt le cercle de vecteurs unitaires orthogonaux à $\underline{\tilde{x}}$; et où $\widetilde{\Gamma}_{ik}(\underline{n}) = \widetilde{C}_{ijkl} n_j n_l$ est donné par :

$$\widetilde{\Gamma}_{ik}(\underline{n}) = n_i n_k - \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jkn} T_{mn} n_j n_l \tag{25}$$

On remarque que $\underline{n}$ est vecteur propre de $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{n})$ de valeur propre 1. Notons $\underline{\hat{x}} = \underline{\tilde{x}}/\tilde{r}$ et $\underline{t} = \underline{n} \wedge \underline{\hat{x}}$ de sorte que $(\underline{\hat{x}}, \underline{t}, \underline{n})$ constitue une base orthonormée directe. En calculant les composantes de $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{n})$ dans cette base, on trouve que ce tenseur s'y écrit :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{n}) = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \\ -\beta & \xi & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

avec :

$$\xi = \underline{\hat{x}} \,.\, \boldsymbol{T} \,.\, \underline{\hat{x}}, \qquad \alpha = \underline{t} \,.\, \boldsymbol{T} \,.\, \underline{t}, \qquad \beta = \underline{\hat{x}} \,.\, \boldsymbol{T} \,.\, \underline{t} \tag{27}$$

Donc le déterminant de $\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}$ donné par :

$$\gamma = \left|\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{n})\right| = \xi\alpha - \beta^2 \tag{28}$$

est un polynôme trigonométrique de second degré en θ. Ceci assure, comme nous le verrons ci-dessous, que l'intégrale (24) peut être calculée explicitement.

5. Solution explicite de fonction de Green

Si on note :

$$\underline{X} = \boldsymbol{T} \,.\, \underline{\hat{x}}, \qquad \boldsymbol{B} = \xi \boldsymbol{T} - \underline{X} \otimes \underline{X} \tag{29}$$

on trouve que le dernier membre de (28) peut s'écrire sous la forme $\underline{t} \,.\, \boldsymbol{B} \,.\, \underline{t}$, soit :

$$\left|\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{n})\right| = \underline{t} \,.\, \boldsymbol{B} \,.\, \underline{t} \tag{30}$$

Le tenseur $\boldsymbol{B}$ ne dépend que de $\boldsymbol{T}$ et de $\underline{\hat{x}}$. Il est symétrique et admet $\underline{\hat{x}}$ comme vecteur propre de valeur propre nulle. Notons $(\underline{\hat{x}}, \underline{u}, \underline{v})$ une base propre directe de $\boldsymbol{B}$. En prenant $\underline{n} = \underline{v}$, nous trouvons $\underline{t} = \underline{u}$ et, d'après (30), $\underline{u} \,.\, \boldsymbol{B} \,.\, \underline{u} = |\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{v})| > 0$ car, pour tout $\underline{n}$, le tenseur acoustique $\boldsymbol{\Gamma}(\underline{n})$ est symétrique et défini-positif. De même, on montre que $\underline{v} \,.\, \boldsymbol{B} \,.\, \underline{v} = |\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{u})| > 0$. Nous notons alors $\underline{u} \,.\, \boldsymbol{B} \,.\, \underline{u} = p^2$ et $\underline{v} \,.\, \boldsymbol{B} \,.\, \underline{v} = q^2$ où $p > 0$ et $q > 0$ et écrivons :

$$\boldsymbol{B} = p^2(\underline{u} \otimes \underline{u}) + q^2(\underline{v} \otimes \underline{v}) \tag{31}$$

Rappelons que p et q sont fonctions uniquement de $\boldsymbol{T}$ et de $\underline{\hat{x}}$.

Nous paramétrons le cercle des vecteurs unitaires orthogonaux à $\underline{\hat{x}}$ en utilisant $\underline{u}$ et $\underline{v}$ et en écrivant :

$$\underline{t} = \cos\theta \underline{u} + \sin\theta \underline{v}, \qquad \underline{n} = -\sin\theta \underline{u} + \cos\theta \underline{v} \tag{32}$$

On déduit de (26) que :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1}(\underline{n}) = \gamma^{-1}\left[\xi(\underline{\hat{x}} \otimes \underline{\hat{x}}) + \alpha(\underline{t} \otimes \underline{t}) + \beta(\underline{\hat{x}} \otimes \underline{t} + \underline{t} \otimes \underline{\hat{x}})\right] + \underline{n} \otimes \underline{n} \tag{33}$$

En reportant (32) dans (27), (28) et (33), nous trouvons :

$$\gamma = \left|\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}(\underline{n})\right| = p^2\cos^2\theta + q^2\sin^2\theta \tag{34}$$

et :

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1}(\underline{n}) = \gamma^{-1}\big[&\Phi_{11}(\underline{\hat{x}} \otimes \underline{\hat{x}}) + \Phi_{22}(\underline{u} \otimes \underline{u}) + \Phi_{33}(\underline{v} \otimes \underline{v}) + \Phi_{12}(\underline{\hat{x}} \otimes \underline{u} + \underline{u} \otimes \underline{\hat{x}}) \\ &+ \Phi_{13}(\underline{\hat{x}} \otimes \underline{v} + \underline{v} \otimes \underline{\hat{x}}) + \Phi_{23}(\underline{u} \otimes \underline{v} + \underline{v} \otimes \underline{u})\big]\end{aligned} \tag{35}$$

où les Φ_{ij} sont des polynômes trigonométriques de degré 4. Les termes impairs en $\sin\theta$ ou $\cos\theta$ donnent une contribution nulle à l'intégrale (24) et les autres se convertissent en un polynôme pair en $\cos\theta$. L'intégrale (24) peut alors se calculer à l'aide de la formule suivante, vraie pour tout a_0, a_1, a_2 :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{a_0 + a_1\cos^2\theta + a_2\cos^4\theta}{p^2\cos^2\theta + q^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{a_0}{pq} + \frac{a_1}{p(p+q)} + a_2\frac{p+2q}{2p(p+q)^2} \tag{36}$$

On trouve :

$$\begin{aligned}4\pi\tilde{r}\widetilde{\boldsymbol{G}}(\underline{\tilde{x}}) = {} & \frac{\xi}{pq}\underline{\hat{x}} \otimes \underline{\hat{x}} + \frac{1}{(p+q)}\left[\frac{1}{p}(\underline{\hat{x}} \,.\, T \,.\, \underline{u})(\underline{\hat{x}} \otimes \underline{u} + \underline{u} \otimes \underline{\hat{x}}) + \frac{1}{q}(\underline{\hat{x}} \,.\, T \,.\, \underline{v})(\underline{\hat{x}} \otimes \underline{v} + \underline{v} \otimes \underline{\hat{x}})\right] \\ & + \frac{1}{(p+q)^2}\left[(\underline{u} \,.\, T \,.\, \underline{u})(\underline{u} \otimes \underline{u}) + (\underline{v} \,.\, T \,.\, \underline{v})(\underline{v} \otimes \underline{v}) + (\underline{u} \,.\, T \,.\, \underline{v})(\underline{u} \otimes \underline{v} + \underline{v} \otimes \underline{u})\right] \\ & + \left[\frac{1}{2(p+q)^2}(\underline{u} \,.\, T \,.\, \underline{u} + \underline{v} \,.\, T \,.\, \underline{v}) + \frac{1}{2}\right](\underline{u} \otimes \underline{u} + \underline{v} \otimes \underline{v}) \\ & + \frac{q-p}{(p+q)^2}\left[\frac{1}{p}(\underline{u} \,.\, T \,.\, \underline{u})(\underline{u} \otimes \underline{u}) - \frac{1}{q}(\underline{v} \,.\, T \,.\, \underline{v})(\underline{v} \otimes \underline{v})\right]\end{aligned} \tag{37}$$

La solution (37) représente une solution explicite de fonction de Green car les valeurs de ξ, p, q, $\underline{u}$ et $\underline{v}$ intervenant dans cette formule peuvent être calculées par des opérations purement algébriques et directes à partir des données de $\boldsymbol{T}$ et de $\underline{\hat{x}}$. En effet, p et q se déduisent des équations :

$$p^2 + q^2 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{\delta}, \qquad p^4 + q^4 = \boldsymbol{B} : \boldsymbol{B} \tag{38}$$

et $\underline{u}$ et $\underline{v}$ se déduisent des équations aux vecteurs propres $\boldsymbol{B} \, . \, \underline{u} = p^2 \underline{u}$ et $\boldsymbol{B} \, . \, \underline{v} = q^2 \underline{v}$ avec $\boldsymbol{B}$ donné par (29). Plus précisément on écrit $\underline{u} = \underline{U} / \|\underline{U}\|$ et $\underline{v} = \underline{V} / \|\underline{V}\|$ avec :

$$\underline{U} = \left(\xi \boldsymbol{T} - p^2 \boldsymbol{\delta}\right)^{-1} \underline{X}, \qquad \underline{V} = \left(\xi \boldsymbol{T} - q^2 \boldsymbol{\delta}\right)^{-1} \underline{X} \tag{39}$$

On peut vérifier cette solution pour le cas isotrope : si $\boldsymbol{T} = \xi \boldsymbol{\delta}$ on obtient pour $\widetilde{\mathbb{C}}$ le tenseur des modules d'élasticité isotrope de coefficients de Lamé $\lambda = 1 - 2\xi$ et $\mu = \xi$. L'expression (29) conduit à $\boldsymbol{B} = \xi^2(\boldsymbol{\delta} - \underline{\hat{x}} \otimes \underline{\hat{x}})$ et donc $p = q = \xi$. Les vecteurs $\underline{u}$ et $\underline{v}$ restent alors indéterminés mais le fait que $(\underline{\hat{x}}, \underline{u}, \underline{v})$ soit une base orthonormée permet d'écrire :

$$\underline{u} \otimes \underline{u} + \underline{v} \otimes \underline{v} = \boldsymbol{\delta} - \underline{\hat{x}} \otimes \underline{\hat{x}} \tag{40}$$

et de calculer (37) pour trouver :

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(\underline{\tilde{x}}) = \frac{1}{8\pi \tilde{r} \xi}\left[(1+\xi)\delta + (1-\xi)\underline{\hat{x}} \otimes \underline{\hat{x}}\right] \tag{41}$$

Si, dans la solution classique de Kelvin–Thomson, on pose $\mu = \xi$ et $\nu = \lambda/[2(\lambda + \mu)] = (1 - 2\xi)/[2(1 - \xi)]$, on trouve bien (41).

6. Discussion et conclusion

On peut noter que l'expression (37), avec $\underline{u}$ et $\underline{v}$ déduites de (39), présente des *dégénérescences* correspondant aux cas où les tenseurs $\xi \boldsymbol{T} - p^2 \boldsymbol{\delta}$ et $\xi \boldsymbol{T} - q^2 \boldsymbol{\delta}$ deviennent singuliers. Ces dégénérescences sont analogues à celles trouvées, en utilisant les mêmes méthodes pour calculer la fonction de Green du milieu infini, pour l'isotropie transversale dans [3], traitées et levées dans des travaux qui ont suivi [4,5,10]. On peut les lever dans (37) en y éliminant $\underline{u}$ et $\underline{v}$. En effet, dans le troisième terme entre crochets de (37), par exemple, $\underline{u}$ et $\underline{v}$ peuvent être éliminés en utilisant la relation (40) dont on déduit aussi $\underline{u} \, . \, \boldsymbol{T} \, . \, \underline{u} + \underline{v} \, . \, \boldsymbol{T} \, . \, \underline{v} = \boldsymbol{T} : (\boldsymbol{\delta} - \underline{\hat{x}} \otimes \underline{\hat{x}})$. Il est possible aussi d'éliminer $\underline{u}$ et $\underline{v}$ dans les autres termes entre crochets de (37) en utilisant la symétrie des expressions par rapport aux couples $(p, \underline{u})$ et $(q, \underline{v})$, mais cela demande des traitements plus longs que nous espérons pouvoir développer dans des travaux ultérieurs. Cela n'empêche pas que la solution donnée sous la forme (37) puisse être utilisée pour différentes applications théoriques ou numériques. Rappelons que cette solution couvre une large famille de matériaux à anisotropie tri-dimensionnelle qui comprend en particulier des matériaux ne possédant aucun plan de symétrie et donc auxquels ne peut s'appliquer le formalisme de Stroh [14,15].

Références

[1] W. Thomson Sir, Note on the integration of the equations of equilibrium of an elastic solid, Cambridge and Dublin Math. J. (February 1848).
[2] I.M. Lifshitz, L.N. Rozenweig, On the construction of the Green's tensor for the basic equation of the theory of elasticity of an anisotropic infinite medium, J. Exp. Theor. Phys. 17 (1947) 783–791.
[3] E. Kröner, Das Fundamentalintegral der anisotropen elastischen Differentialgleichungen, Z. Phys. 136 (1953) 402–410.
[4] J.R. Willis, The elastic interaction energy of dislocation loops in anisotropic media, Quart. J. Mech. Appl. Math. 18 (1965) 419.
[5] Y.-C. Pan, T.-W. Chou, Point force solution for an infinite transversely isotropic solid, Trans. ASME, J. Appl. Mech. (December 1976) 608–612.
[6] A. Pouya, Une transformation du problème d'élasticité linéaire en vue d'application au problème de l'inclusion et aux fonctions de Green, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. IIb 328 (2000) 437–443.
[7] A. Pouya, A. Zaoui, A transformation of elastic boundary value problems with application to anisotropic behavior, Int. J. Solids Structures 43 (2006) 4937–4956.
[8] B. Saint Venant (de), Sur la distribution des élasticités autour de chaque point d'un solide ou d'un milieu de contexture quelconque, particulièrement lorsqu'il est amorphe sans être isotrope, J. Math. Pures Appl. (2ème Série) VIII (1863) 257.
[9] A. Pouya, Ellipsoidal anisotropies in linear elasticity—Extension of Saint Venant's work to phenomenological modelling of materials, Int. J. Damage Mech. 16 (January 2007) 95–126.

[10] A. Pouya, Green's function solution and displacement potentials for Transformed Transversely Isotropic materials, Eur. J. Mech. A/Solids (2007), in press.
[11] J.L. Synge, The Hypercircle in Mathematical physics—A Method for Approximate Solution of Boundary-Value Problems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957.
[12] T. Mura, Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, 1982.
[13] S. Forte, M. Vianello, Symmetry classes for elasticity tensors, J. Elasticity 43 (1996) 81–108.
[14] A.N. Stroh, Dislocations and cracks in anisotropic elasticity, Phil. Mag. 3 (1958) 625–646.
[15] T.C.T. Ting, Anisotropic Elasticity, Oxford University Press, Oxford, 1996.