

# Analyse linéaire d'une turbulence homogène cisailée stablement stratifiée

Mohamed El Hattay, Taieb Lili \*

Faculté des sciences de Tunis, département de physique, campus universitaire 2092, Manar II Tunis, Tunisie

Reçu le 1<sup>er</sup> novembre 2006 ; accepté après révision le 9 mai 2007

Présenté par Geneviève Comte-Bellot

---

## Résumé

L'évolution d'une turbulence homogène cisailée stablement stratifiée est étudiée en fonction de deux paramètres adimensionnels : le nombre de Richardson  $Ri$  et le nombre de Prandtl  $Pr$ . Une analyse linéaire dans l'espace spectral permet d'accéder à l'évolution des différentes grandeurs physiques caractéristiques d'une telle turbulence (tensions de Reynolds, énergie cinétique, énergie potentielle, flux de chaleur turbulents). Plus précisément, la variation du nombre de Richardson de transition  $Ri_t$  en fonction du nombre de Prandtl est déterminée dans l'intervalle  $[0,3; 50]$  et se traduit par une décroissance décrite par une loi en puissance.

**Pour citer cet article :** *M. El Hattay, T. Lili, C. R. Mécanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Linear analysis of stably stratified homogenous turbulence with mean shear.** The evolution of a stably stratified homogeneous turbulence (SSHT) with mean shear is studied according to two nondimensional parameters: the Richardson number  $Ri$  and Prandtl number  $Pr$ . A linear analysis in spectral space gives access to the evolution of various physical characteristics of such turbulence (Reynolds stress, kinetic energy, potential energy, turbulent heat fluxes). More precisely, the dependence of transition Richardson number on Prandtl number is given in the interval  $[0.3; 50]$  and results in a power law decrease. **To cite this article:** *M. El Hattay, T. Lili, C. R. Mécanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

**Mots-clés :** Turbulence ; Turbulence homogène ; Cisaillement ; Stratification stable ; Nombre de Prandtl ; Nombre de Richardson

**Keywords:** Turbulence; Homogeneous turbulence; Mean shear; Stable stratification; Prandtl number; Richardson number

---

## Abridged English version

We study the characteristic properties of the behaviour of homogeneous turbulence, sheared and stably stratified. We start with a linear analysis, which consists in finding numerical solutions obtained by solving linear double point correlated equations of evolution. These linear solutions give access to characteristic properties of this type of turbu-

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [Taieb.Lili@fst.mu.tn](mailto:Taieb.Lili@fst.mu.tn) (T. Lili).

lence, in physical space, namely Reynolds stress, turbulent heat flux, as well as kinetic energy and potential energy. More precisely, the objective of this study is to analyse the effect of the Prandtl number on a characteristic parameter of the SSHT, namely transition Richardson number.

We compare our results (Fig. 1(b)) with those of Hanazaki and Hunt (Fig. 1(a)). These results are related to the evolution of normalized vertical heat flux  $c_{3t} = -\overline{u_3\theta}/\sqrt{\overline{u_3^2}}\sqrt{\overline{\theta^2}}$  ( $Pr = 1$ ). Broadly, there is good agreement between our results and those of Hanazaki and Hunt [1], in spite of small discrepancies, for values of  $St$  higher than 8; the method used by these authors may be the cause of the discrepancies. We proposed numerical linear solutions, validated for  $Pr = 1$ , in order precisely to examine the dependence on Prandtl number of an essential parameter of a homogeneous turbulence sheared and stably stratified, namely the transition Richardson number. Holt, Koseff and Ferziger [2] define this number as being the value of the Richardson number that signals a change from shear driven turbulence regime to stratification turbulence regime. The criterion of definition of  $Ri_t$  retained by these authors correspond to an asymptotic behaviour of  $c_{3t}$  and  $c_{13} = -\overline{u_1u_3}/\sqrt{\overline{u_1^2}}\sqrt{\overline{u_3^2}}$  approaching zero at large  $St$ . For various values of  $Pr$  ( $0.3 \leq Pr \leq 50.0$ ), we carried out numerical tests for different values of  $Ri$ . The  $Ri_t$  values obtained result in a decrease represented well by a linear regression  $Ri_t = 0.0661Pr^{-0.2762}$  ( $0.3 \leq Pr \leq 50.0$ ).

### 1. Introduction

Ce travail rentre dans le cadre d'une étude des mécanismes physiques caractéristiques du comportement d'une turbulence homogène cisailée stablement stratifiée (THCSS). Comme préalable à cette étude, nous commençons par une analyse linéaire. Celle-ci consiste à déterminer numériquement des solutions obtenues par résolution des équations linéaires d'évolution des spectres de corrélations doubles en deux points. Ces solutions linéaires permettent d'accéder aux grandeurs caractéristiques de ce type de turbulence, dans l'espace physique, à savoir les tensions de Reynolds, les flux de chaleur turbulents ainsi que l'énergie cinétique moyenne et l'énergie potentielle du mouvement fluctuant  $PE = \overline{\theta^2}/2N^2$ . Plus précisément, l'objectif de cette étude est d'analyser l'effet du nombre de Prandtl sur un paramètre caractéristique de la THCSS, à savoir le nombre de Richardson de transition. Un certain nombre d'auteurs se sont justement intéressés à la THCSS. Ainsi, Hanazaki et Hunt [1,3] ont étudié les principaux mécanismes gouvernant l'évolution d'une telle turbulence. Dans le cadre de la théorie de distorsion rapide (RDT), Hanazaki et Hunt [1] ont obtenu des solutions semi analytiques à partir de fonctions de Legendre de degré complexe. Justement, nous faisons référence aux résultats de Hanazaki et Hunt [1] pour valider les solutions linéaires obtenues numériquement.

### 2. Étude linéaire dans l'espace spectral

Comme nous l'avons déjà indiqué dans l'introduction, nous nous proposons de déterminer numériquement les solutions linéaires dans l'espace spectral. Pour ce faire, nous commençons par définir les spectres  $\hat{u}_i$ ,  $\hat{p}$  et  $\hat{\theta}$  à partir des transformées de Fourier (TF) des composantes  $u_i$  de la fluctuation de vitesse, de la fluctuation de pression  $p$  et de la fluctuation de température  $\theta$  respectivement :  $\hat{u}_i(\underline{k}, t) = \text{TF}(u_i(\underline{x}, t))$ ,  $\hat{p}(\underline{k}, t) = \text{TF}(p/\rho_0(\underline{x}, t))$  et  $\hat{\theta} = \text{TF}(\alpha g\theta(\underline{x}, t))$ .

$\rho_0$  est une masse volumique de référence,  $\alpha$  est le coefficient de dilatation du fluide l'espace. Rappelons que nous nous intéressons à l'étude d'une turbulence homogène cisailée stablement stratifiée ( $S = \partial U_1/\partial x_3$  est le taux de cisaillement ;  $U_1$  est la composante horizontale de la vitesse moyenne,  $x_3$  est l'axe vertical ascendant et  $N = \sqrt{\alpha g dT/dx_3}$  est la fréquence de Brunt-Väisälä). Dans le cadre d'une analyse linéaire, les équations qui gouvernent l'évolution de ces spectres ont été déjà établies par Hanazaki et Hunt [1] et Rehmann et Hwang [3] et s'écrivent :

$$k_i \hat{u}_i = 0 \tag{1}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \nu k^2\right) \hat{u}_i = S \left(\frac{2k_i k_1}{k^2} - \delta_{i1}\right) \hat{u}_3 - \left(\frac{k_i k_3}{k^2} - \delta_{i3}\right) \hat{\theta} \tag{2}$$

$$\left(\frac{d}{dt} + \chi k^2\right) \hat{\theta} = -N^2 \hat{u}_3 \tag{3}$$

Dans ces équations,  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $\chi$  est la diffusivité thermique. L'opérateur  $d/dt$  est défini par :  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - S k_1 \frac{\partial}{\partial k_3}$ . Ces équations permettent d'établir les équations d'évolution des spectres de corrélations doubles de vitesse et de température :

$$2e_{ij}(k)\delta(k+k') = \overline{\hat{u}_i(k')\hat{u}_j(k)} + \overline{\hat{u}_i(k)\hat{u}_j(k')}, \quad 2e_\theta(k)\delta(k+k') = \overline{\theta(k')\theta(k)} \quad \text{et}$$

$$2e_{i\theta}(k)\delta(k+k') = \overline{\hat{u}_i(k')\hat{\theta}(k)} + \overline{\hat{u}_i(k)\hat{\theta}(k')}$$

La condition d'incompressibilité (1) se traduit, pour ces spectres, par les relations :  $k_i e_{ij} = 0$ ,  $k_i e_{i\theta} = 0$  qui permettent de retenir six fonctions de base ; nous faisons le choix des spectres  $e_{13}$ ,  $e_{33}$ ,  $e_{1\theta}$ ,  $e_{3\theta}$ ,  $e_\theta$  et  $2e = e_{ii}$ .

Écrivons leurs équations d'évolution à partir des Éqs. (1), (2) et (3) :

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu k^2\right)e = -Se_{13} + e_{3\theta} \quad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\chi k^2\right)e_\theta = -N^2 e_{3\theta} \quad (5)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + (\nu + \chi)k^2\right)e_{3\theta} = -\left(\frac{k_3^2}{k^2} - 1\right)e_\theta + N^2 e_{33} + 2S\frac{k_1 k_3}{k^2} e_{3\theta} \quad (6)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu k^2\right)e_{33} = -2\left(\frac{k_3^2}{k^2} - 1\right)e_{3\theta} + 4S\frac{k_1 k_3}{k^2} e_{33} \quad (7)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + 2\nu k^2\right)e_{13} = -\frac{k_1 k_3}{k^2} e_{3\theta} + \left(1 - \frac{k_3^2}{k^2}\right)e_{1\theta} + S\left(2\frac{k_1^2}{k^2} - 1\right)e_{33} + 2S\frac{k_1 k_3}{k^2} e_{13} \quad (8)$$

$$\left(\frac{d}{dt} + (\nu + \chi)k^2\right)e_{1\theta} = S\left(2\frac{k_1^2}{k^2} - 1\right)e_{3\theta} - 2\frac{k_1 k_3}{k^2} e_\theta + N^2 e_{13} \quad (9)$$

### 3. Méthode numérique de résolution

Les Éqs. (4)–(9) sont d'abord écrites, de manière équivalente, en formulation lagrangienne dans l'espace spectral (en utilisant les variables de Lagrange  $k_{10}$ ,  $k_{20}$ ,  $k_{30}$  et  $t$ , l'indice 0 étant associé à l'instant initial  $t = 0$ ).

L'intégration dans le temps de ces équations est alors effectuée le long des trajectoires spectrales définies par  $\underline{k}(t) = (k_1, k_2, k_3(t)) = (k_{10}, k_{20}, k_{30} - Stk_{10})$ . Nous utilisons un schéma d'intégration temporel simple, précis au second ordre :  $f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + (\Delta t)^2 f''(t)/2$ . Il y a lieu de préciser que, dans ce schéma d'intégration, les dérivées d'ordre deux sont obtenues analytiquement par une simple dérivation appliquée aux différents termes des Éqs. (4)–(9). L'espace spectral est discrétisé dans ses trois directions en coordonnées sphériques : le logarithme du module  $k$  du nombre d'onde est réparti avec un pas constant entre un minimum et un maximum. La direction angulaire  $\varphi$  est répartie avec un pas constant sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et on introduit une variable  $z = \cos \alpha$  répartie avec un pas constant sur l'intervalle  $[-1, 1]$ . Considérant une turbulence initiale isotrope, nous prenons comme spectre tridimensionnel d'énergie cinétique initiale  $E_0(k)$ , un spectre classique utilisé par Hanazaki et Hunt [1] (voir [1], expression (4.11)). Le spectre d'énergie potentielle initiale  $PE_0$  (valeur de  $PE$  à  $t = 0$ ) est par contre pris égal à zéro. Nous adoptons les mêmes valeurs initiales de certains paramètres physiques adimensionnés qui celles de Hanazaki et Hunt [1] :  $\nu = 0,01742$ ,  $E_{c0} = 1,015$  et  $S = 2,729$  ( $E_{c0}$  est l'énergie cinétique initiale).

### 4. Résultats

Nous commençons par présenter des résultats relatifs à un nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\chi = 1$  ( $\chi$  est la diffusivité thermique) et à différentes valeurs du nombre de Richardson  $Ri = N^2/S^2$ . La Fig. 1(b) compare nos résultats à ceux de Hanazaki et Hunt [1] Fig. 1(a) qui, rappelons le, sont issus d'une analyse linéaire ; ces résultats sont relatifs à l'évolution du coefficient de corrélation  $c_{3t} = -\overline{u_3\theta}/\sqrt{\overline{u_3^2}\overline{\theta^2}}$  associé au flux de chaleur turbulent vertical et à  $Pr = 1$ . Nos résultats confirment en particulier le résultat établi analytiquement par Hanazaki et Hunt (voir [1], p. 12) et concernant le comportement pour  $St$  tendant vers zéro de  $c_{3t}$  :  $c_{3t} = 1 - (St)^2/35 + O(t^4)$ . Globalement, il y a bien une bonne concordance entre nos résultats Fig. 1(b) et ceux de Hanazaki et Hunt [1] (Fig. 1(a)) malgré de légères différences, pour des valeurs de  $St$  supérieures à 8, dues probablement à la méthode complexe de résolution adoptée par ces auteurs, méthode consistant notamment à déterminer les effets visqueux à partir de solution non visqueuses (correspondant à  $\nu = 0$ ).

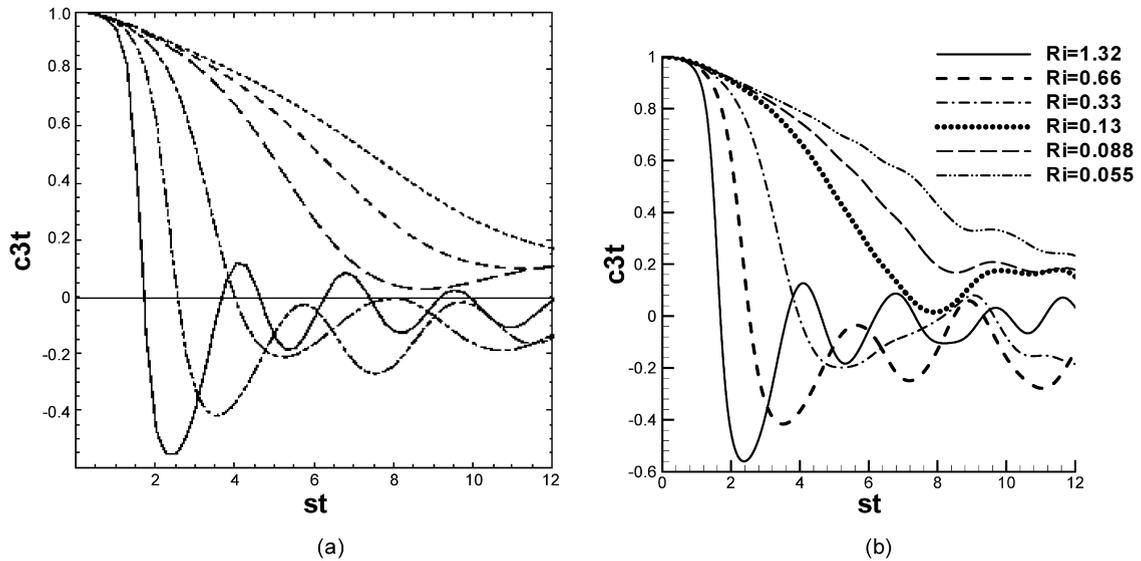


Fig. 1. Évolution du coefficient de flux de chaleur vertical pour  $Pr = 1$ . (a) Hanazaki et Hunt, (b) nos résultats.

Fig. 1. Evolution of the vertical heat flux coefficient for  $Pr = 1$ . (a) Hanazaki and Hunt, (b) our results.

Nos solutions linéaires numériques ayant été validées pour  $Pr = 1$ , nous nous proposons d'examiner l'influence justement du nombre de Prandtl sur un paramètre essentiel d'une turbulence homogène cisailée stablement stratifiée, à savoir le nombre de Richardson de transition  $Ri_t$ . Ce nombre est défini par Holt, Koseff et Ferziger [2] comme étant la valeur du nombre de Richardson séparant le régime dominé par la stratification de celui dominé par le cisaillement. Le critère de définition de  $Ri_t$ , retenu par ces auteurs, correspond à un comportement asymptotique ( $St$  grand) des coefficients de corrélation  $c_{3t}$  et  $c_{13} = -\overline{u_1 u_3} / \sqrt{\overline{u_1^2}} \sqrt{\overline{u_3^2}}$  se traduisant par une décroissance vers zéro. Pour différentes valeurs de  $Pr$  (0,3; 0,4; 0,5; 1,0; 2,0; 4,0; 5,0; 7,0; 9,0; 12,0; 20,0; 25,0; 40,0 et 50,0), nous avons effectué des essais numériques systématiques correspondant à différentes valeurs de  $Ri$ ; la tendance asymptotique ( $St$  grand, supérieur à 12) des coefficients  $c_{3t}$  et  $c_{13}$  vers zéro fournit les valeurs de  $Ri_t$  pour les différentes valeurs de  $Pr$ . Ces valeurs de  $Ri_t$  relatives aux différentes valeurs de  $Pr$  se traduisent par une décroissance bien représentée par une loi régression linéaire d'équation :  $Ri_t = 0,0661Pr^{-0,2762}$  (pour  $0,3 \leq Pr \leq 50,0$ ).

## 5. Conclusion

Grâce à un code de résolution numérique des équations d'évolution des spectres de corrélations double en deux points, nous avons pu, dans le cadre d'une analyse linéaire, déterminer l'évolution des grandeurs physiques caractéristiques d'une turbulence homogène cisailée stablement stratifiée. Nous avons déterminé, en particulier, la variation du nombre de Richardson de transition en fonction du nombre de Prandtl dans l'intervalle [0,3; 50]. Il s'agit d'une décroissance bien représentée par une loi en puissance. Nous nous proposons, à l'issue de cette première étape, d'inclure dans cette démarche les effets non linéaires par un modèle dans l'espace spectral en vue de mettre en évidence justement la contribution de ces effets non linéaires.

## Références

- [1] H. Hanazaki, J.C.R. Hunt, Structure of unsteady stably stratified turbulence with mean shear, *J. Fluid Mech.* 507 (2004) 1–42.
- [2] S.E. Holt, J.R. Koseff, J.H. Ferziger, A numerical study of the evolution and structure of homogeneous stably stratified turbulence, *J. Fluid Mech.* (1992) 499–539.
- [3] C.R. Rehmann, J.H. Hwang, Small-scale structure of strongly stratified turbulence, *J. Phys. Oceanogr.* 35 (2005) 151–164.