

# Comportement élastique non linéaire d'un milieu granulaire : approche micromécanique

Yamen Maalej<sup>a,\*</sup>, Luc Dormieux<sup>a</sup>, Julien Sanahuja<sup>b</sup>

<sup>a</sup> *LMSGC, Institut Navier, École nationale des ponts et chaussées, 6 et 8, avenue Blaise-Pascal, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée, France*

<sup>b</sup> *Lafarge centre de recherche, 95, rue du Montmurier, BP 15, 38291 Saint-Quentin Fallavier cedex, France*

Reçu le 15 janvier 2007 ; accepté le 21 juin 2007

Disponible sur Internet le 1<sup>er</sup> août 2007

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

## Résumé

Les milieux granulaires, comme les poudres ou encore les sables, sont des matériaux formés d'une assemblée de particules. La microstructure est donc discrète par nature. Le comportement mécanique de ces derniers a été largement traité dans la littérature, essentiellement sous l'angle expérimental ou dans le cadre de simulations numériques qui prennent en compte cette nature discrète. On aborde ici la modélisation de ces matériaux dans le cadre d'une approche micromécanique continue. Le comportement au niveau local y est modélisé par une loi d'interface intergranulaire. On met en œuvre une méthode d'homogénéisation non linéaire qui permet de retrouver la dépendance du module de Young tangent par rapport à la contrainte moyenne observée expérimentalement.

**Pour citer cet article :** *Y. Maalej et al., C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Elastic nonlinear behaviour of a granular medium: micromechanical approach.** Granular media, like powders or sands, are made up of a particle assembly. The microstructure is thus discontinuous in nature. The mechanical properties of such materials have been widely studied in the literature, essentially in experimental studies or in numerical simulation taking into account the discontinuous nature of the microstructure. We adopt here a continuous micromechanical approach in which the local behavior is described through an interface law at the intergranular contact. We use a nonlinear homogenization technique which retrieves the dependence of the tangent Young modulus with respect to the mean stress that is observed experimentally. **To cite this article:** *Y. Maalej et al., C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Milieux granulaires ; Interface ; Micromécanique ; Élasticité non linéaire ; Schéma auto-cohérent

*Keywords :* Granular media; Interface; Micromechanics; Nonlinear elasticity; Self-consistent scheme

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [maalej@lmsgc.enpc.fr](mailto:maalej@lmsgc.enpc.fr) (Y. Maalej), [dormieux@lmsgc.enpc.fr](mailto:dormieux@lmsgc.enpc.fr) (L. Dormieux), [julien.sanahuja@lafarge.com](mailto:julien.sanahuja@lafarge.com) (J. Sanahuja).

## Abridged English version

The elastic properties of a sand in the range of small strains prove to be nonlinear. In particular, the tangent Young modulus in the vicinity of a nondeviatoric stress state is proportional to the confining pressure [1,2]. The purpose of the present paper is to provide a micromechanical model consistent with such experimental evidences.

Consider a representative elementary volume  $\Omega$  made up of an assembly of grains  $\mathcal{G}_i$  and of pore space. At the interface  $\mathcal{I}_{ij}$  between two grains, we first consider a linear state equation relating the stress vector  $\underline{T}$  to the displacement discontinuity  $[[\underline{\xi}]]$  in the form (1), where  $\mathbf{1}$  is the unit tensor of second order, while  $K_n$  and  $K_t$  denote the normal and tangential stiffnesses, respectively. Under the assumption of isotropy, the corresponding macroscopic behavior is characterized by the bulk and shear moduli  $k^{\text{hom}}$  and  $\mu^{\text{hom}}$ . Following [3], (3) provides the quadratic averages over the intergranular interfaces  $\mathcal{I}$  of the normal and tangential components of  $[[\underline{\xi}]]$  as functions of the macroscopic stress  $\underline{\Sigma}$  and its deviatoric part  $\underline{\Sigma}_d$ , with  $\Sigma_m = \text{tr } \underline{\Sigma}/3$  and  $\Sigma_d = \sqrt{\underline{\Sigma}_d : \underline{\Sigma}_d}/2$ .

A self-consistent scheme is adopted for estimating  $k^{\text{hom}}$  and  $\mu^{\text{hom}}$  as functions of  $K_n$  and  $K_t$ . The solid grains are represented by spherical rigid inclusions (radius  $a$ ), surrounded by elastic interfaces with normal and tangential stiffnesses  $K'_n$  and  $K'_t$ , respectively. The displacement  $[\underline{\xi}]$  in the surrounding (fictitious) interface taking into account one half of the total discontinuity  $[[\underline{\xi}]]$ , it is found that  $K_n^T = K_n/2$  (resp.  $K'_t = K_t/2$ ). Also, referring to classic results of the grain compaction theory [4], note that the ratio  $|\mathcal{I}|/|\Omega|$  can be derived as a function of the porosity (see (6) and (7)).

The dimensional analysis reveals that the self-consistent estimates  $k^{\text{ac}}$  and  $\mu^{\text{ac}}$  of  $k^{\text{hom}}$  and  $\mu^{\text{hom}}$  take the form (9) and (10), where  $\mathcal{F}(\rho, \varphi)$  is a dimensionless function of  $\rho = K'_t/K'_n$  and of the porosity  $\varphi$  which is solution to (8). Eq. (3) is now replaced by (11).

Consider now the nonlinear case where the interface stiffness depends on the displacement discontinuity (see (14)). Assuming that the ratio  $\rho$  is constant, it is shown that both  $K'_n$  and  $K'_t$  are functions of the so-called equivalent displacement  $\xi^e = \sqrt{[\xi_n]^2 + \rho[\xi_t]^2}$ . According to the ideas of the modified secant method [5,6], the latter is estimated by the average  $\bar{\xi}^e = \sqrt{([\xi_n]^2 + \rho[\xi_t]^2)_{\mathcal{I}}}$  which is derived from a combination of (7) and (11) yielding (17).

We finally examine the particular nonlinearity defined by (18), for which the secant bulk, shear and Young moduli are given in (19) and (20). For purpose of comparison with experimental data, we have to link the secant formulation with the tangent one. Using (19), it is shown that the macroscopic tangent stiffness tensor at a nondeviatoric stress state ( $\underline{\Sigma}_d = 0$ ) is isotropic, the bulk and shear tangent moduli being given in (23). Accordingly, the tangent Young modulus is found to be proportional to the confining pressure (see (24)) and the Poisson ratio is a constant. These findings are in agreement with the experimental observations. It is emphasized that the ratio  $\rho$  and the constant  $aK_n^0$  which intervenes in (24) completely characterize the mechanical properties of the intergranular interfaces. Once they are determined, the macroscopic behavior only depends on the porosity. Figs. 2(a) and 2(b) compare the prediction of the micromechanical model for the ratio  $E_{\text{tan}}^{\text{ac}}/\sqrt{|\Sigma_m|}$  and the Poisson ratio (obtained with  $\rho = 7.7 \times 10^{-3}$  and  $aK_n^0 = 3.6 \times 10^9 \text{ N/mm}^2$ ) with the experimental data. An excellent agreement is observed for porosity ranging from 0.34 (dense Fontainebleau sand) to 0.41 (loose sand).

## 1. Introduction

L'étude expérimentale du comportement mécanique des sables dans le domaine des très petites déformations ( $\epsilon \approx 10^{-5}$ ) fait apparaître un comportement élastique non linéaire. Plus précisément, au voisinage d'un état de contrainte non déviatorique, le module de Young tangent  $E_{\text{tan}}$  est proportionnel à la racine carrée de la pression de confinement [1,2]. L'objectif de cette note est de construire un modèle micromécanique de matériau granulaire permettant d'interpréter ce résultat. L'idée consiste à traiter le milieu granulaire comme un polycristal poreux. L'accent est mis sur la loi de contact qui régit les discontinuités de déplacement dans les interfaces intergranulaires lors de l'application d'une charge. On se place d'abord dans le cadre de l'élasticité linéaire. On met ensuite en œuvre une méthode d'homogénéisation non linéaire inspirée de [7] afin d'appréhender le comportement macroscopique réel d'un sable.

## 2. Description du modèle élastique linéaire

On considère un volume élémentaire représentatif (VER)  $\Omega$ , de volume  $|\Omega|$ , constitué par un assemblage de grains rigides  $\mathcal{G}_i$  et d’une phase poreuse (Fig. 1(a)). La partie de la frontière  $\partial\mathcal{G}_i$  en face des pores est libre de contrainte. Dans l’interface  $\mathcal{I}_{ij}$  entre les grains  $\mathcal{G}_i$  et  $\mathcal{G}_j$ , on adopte une loi d’interface qui définit la relation entre le vecteur-contrainte  $\underline{T}$  appliqué à l’interface et la discontinuité de déplacement  $[[\underline{\xi}]]$  qui s’y établit :

$$\underline{T} = \mathbf{K} \cdot [[\underline{\xi}]] \quad \text{avec } \mathbf{K} = K_n \underline{n} \otimes \underline{n} + K_t (\mathbf{1} - \underline{n} \otimes \underline{n}) \quad (1)$$

dans laquelle  $\mathbf{1}$  désigne le tenseur identité d’ordre 2.  $K_n$  et  $K_t$  sont les rigidités normale et tangentielle du contact intergranulaire. Le comportement macroscopique, supposé isotrope, est caractérisé par un module de compression  $k^{\text{hom}}$  et un module de cisaillement  $\mu^{\text{hom}}$ . Soit  $\underline{\Sigma}$  le tenseur de contrainte macroscopique et  $\underline{\Sigma}_d$  sa partie déviatorique.  $\underline{E}$  désignant la déformation macroscopique,  $\underline{E}_d$  sa partie déviatorique et  $E_v = \text{tr } \underline{E}$  la déformation volumique, on a donc :

$$\underline{\Sigma} = k^{\text{hom}} E_v \mathbf{1} + 2\mu^{\text{hom}} \underline{E}_d \quad (2)$$

On introduit encore les quantités  $\Sigma_m = \text{tr } \underline{\Sigma} / 3$  et  $\Sigma_d = \sqrt{\underline{\Sigma}_d : \underline{\Sigma}_d} / 2$ . En raisonnant comme dans [3], on obtient la moyenne quadratique des discontinuités de déplacement normal et tangentiel à l’interface en fonction de  $\Sigma_m$  et de  $\Sigma_d$  :

$$\frac{|\mathcal{I}|}{|\Omega|} \langle [[\xi_n]]^2 \rangle_{\mathcal{I}} = - \left[ \frac{\partial k^{\text{hom}^{-1}}}{\partial K_n} \Sigma_m^2 + \frac{\partial \mu^{\text{hom}^{-1}}}{\partial K_n} \Sigma_d^2 \right] \quad \text{et} \quad \frac{|\mathcal{I}|}{|\Omega|} \langle [[\xi_t]]^2 \rangle_{\mathcal{I}} = - \left[ \frac{\partial k^{\text{hom}^{-1}}}{\partial K_t} \Sigma_m^2 + \frac{\partial \mu^{\text{hom}^{-1}}}{\partial K_t} \Sigma_d^2 \right] \quad (3)$$

où  $|\mathcal{I}|$  désigne la surface totale des contacts intergranulaires ( $|\mathcal{I}| = \bigcup |\mathcal{I}_{ij}|$ ), et  $\langle \cdot \rangle_{\mathcal{I}}$  l’opérateur de moyenne sur  $\mathcal{I}$ .

L’utilisation de (3) nécessite un schéma d’homogénéisation permettant d’estimer les dérivées partielles de  $k^{\text{hom}}$  et de  $\mu^{\text{hom}}$  par rapport à  $K_n$  et  $K_t$ . On propose à cet effet de mettre en œuvre un schéma auto-cohérent. Les grains de sable sont représentés par une inclusion composite constituée d’un noyau sphérique rigide (rayon  $a$ ) entouré par une interface de raideurs normale et tangentielle  $K'_n$  et  $K'_t$  à déterminer (Fig. 1(b)). Le rayon  $a$  désigne ici la taille caractéristique des grains. Les pores sont représentés par des cavités sphériques. Celles-ci, de même que les inclusions solides, sont plongées dans le milieu dont on cherche à déterminer les caractéristiques, conformément à l’esprit du schéma autocohérent.

L’interface fictive entourant le noyau rigide prend en compte par construction la moitié de la différence de déplacement intergranulaire, notée  $[[\underline{\xi}]]$ . On a donc  $[\underline{\xi}] = \mathbf{K}'^{-1} \cdot \underline{T} = [[\underline{\xi}]] / 2$ . Ceci conduit à poser  $\mathbf{K}' = 2\mathbf{K}$ . Dans la suite, on décompose  $[\underline{\xi}]$  sur une interface de normale  $\underline{n}$  en une partie normale et une partie tangentielle :  $[\underline{\xi}] = [\xi_n] \underline{n} + [\xi_t] \underline{t}$ .

On peut également justifier la définition de  $\mathbf{K}'$  par un raisonnement énergétique. D’une part, l’énergie élastique  $W$  des interfaces réelles de l’assemblage granulaire (Fig. 1(a)) s’exprime par :

$$W = \frac{1}{2|\Omega|} \sum_{\{i,j\}} \int_{\mathcal{I}_{ij}} \underline{T} \cdot [[\underline{\xi}]] \, dS = \frac{1}{2|\Omega|} \sum_i \left( \sum_{j \neq i} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}_{ij}} \underline{T} \cdot [[\underline{\xi}]] \, dS \right) = \frac{1}{4|\Omega|} \sum_i \int_{\partial\mathcal{G}_i^*} \underline{T} \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \underline{T} \, dS \quad (4)$$

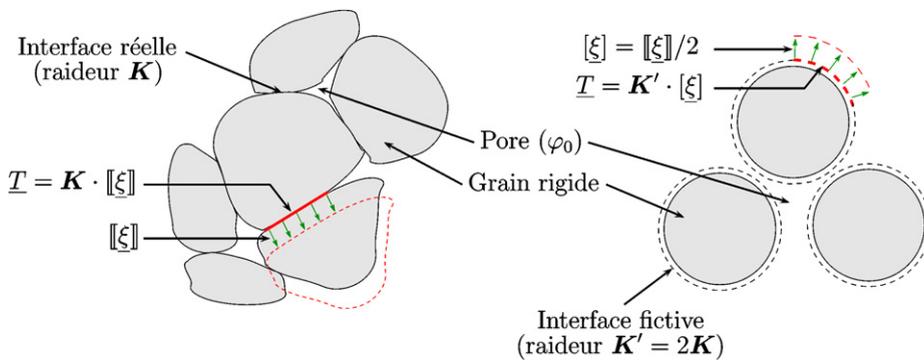


Fig. 1. Équivalence entre l’interface réelle (a) et l’interface fictive (b).

Fig. 1. Equivalence between the real interface (a) and the fictitious interface (b).

où  $\partial\mathcal{G}_i^s$  désigne la partie de la frontière du grain  $\mathcal{G}_i$  en contact avec d'autres grains. D'autre part, l'énergie élastique  $W'$  stockée dans le modèle des composites noyau-interface fictive (Fig. 1(b)) s'écrit :

$$W' = \frac{1}{2|\Omega|} \sum_i \int_{\partial\mathcal{G}_i^s} \underline{T} \cdot \mathbf{K}'^{-1} \cdot \underline{T} \, dS \quad (5)$$

L'équivalence des deux modèles au sens de l'énergie élastique, c'est-à-dire la relation  $W = W'$ , est assurée pour  $\mathbf{K}' = 2\mathbf{K}$ .

Dans le cadre du modèle de grain sphérique, on introduit la proportion  $\chi$  de la surface de contact intergranulaire  $|\partial\mathcal{G}_i^s|$  par rapport à la surface totale du grain  $|\partial\mathcal{G}_i|$ , on obtient ainsi :

$$\frac{|\mathcal{I}|}{|\Omega|} = \frac{N|\partial\mathcal{G}_i^s|}{2|\Omega|} = \frac{N}{2} \frac{4\pi a^2 \chi}{N^{\frac{4}{3}} \pi a^3 \frac{1}{1-\varphi}} = \frac{3\chi(1-\varphi)}{2a} \quad (6)$$

où  $N$  est le nombre de grains par unité de volume et  $\varphi$  la porosité.  $\chi$  peut être estimé comme dans les théories de compaction de poudres [4]. En adoptant l'estimation de la densité minimale donnée par le schéma auto-cohérent ( $\varphi = 1/2$ ), il vient :

$$\chi = (1 - 2\varphi)(1 - \varphi) \quad (7)$$

### 3. Réponse macroscopique dans le cadre de l'élasticité linéaire

On note  $k^{\text{ac}}$  et  $\mu^{\text{ac}}$  les estimations autocohérentes de  $k^{\text{hom}}$  et de  $\mu^{\text{hom}}$ . La détermination de  $k^{\text{ac}}$  et  $\mu^{\text{ac}}$  passe par la résolution du problème d'Eshelby pour l'inclusion composite noyau-interface fictive. Le principe de la résolution a été présenté dans [3] et conduit à une équation du 3<sup>ème</sup> degré en  $X = \frac{\mu^{\text{ac}}}{aK'_n}$  paramétrée par  $\rho = K'_t/K'_n$  et  $\varphi$  :

$$128X^3 + 16(3\varphi + 2 + 2\rho(3\varphi - 1))X^2 + 2(3(3\varphi - 1) + 2\rho(12\varphi - 5))X + 3\rho(2\varphi - 1) = 0 \quad (8)$$

La résolution de l'Éq. (8) nous fournit  $X$  puis  $\mu^{\text{ac}}$  sous la forme :

$$\mu^{\text{ac}} = aK'_n \mathcal{F}(\rho, \varphi) \quad (9)$$

où  $\mathcal{F}(\rho, \varphi) = X$  est une fonction sans dimension, solution de (8).  $k^{\text{ac}}$  s'écrit ensuite sous la forme :

$$k^{\text{ac}} = aK'_n \mathcal{G}(\rho, \varphi) \quad \text{avec} \quad \mathcal{G} = \frac{4(1-\varphi)\mathcal{F}}{3(4\mathcal{F} + \varphi)} \quad (10)$$

En introduisant (9) et (10) dans (3) et en utilisant (7), les moyennes quadratiques des composantes normale  $\sqrt{\langle [\xi_n]^2 \rangle_{\mathcal{I}}}$  et tangentielle  $\sqrt{\langle [\xi_t]^2 \rangle_{\mathcal{I}}}$  prennent la forme :

$$\begin{cases} \sqrt{\langle [\xi_n]^2 \rangle_{\mathcal{I}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\langle [\|\xi_n\|^2] \rangle_{\mathcal{I}}} = \frac{1}{K'_n \sqrt{3(1-\varphi)\chi}} \left[ \left( \frac{1}{\mathcal{G}} - \frac{\rho}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho} \right) \Sigma_m^2 + \left( \frac{1}{\mathcal{F}} - \frac{\rho}{\mathcal{F}^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} \right) \Sigma_d^2 \right]^{1/2} \\ \sqrt{\langle [\xi_t]^2 \rangle_{\mathcal{I}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\langle [\|\xi_t\|^2] \rangle_{\mathcal{I}}} = \frac{1}{K'_n \sqrt{\rho} \sqrt{3(1-\varphi)\chi}} \left[ \frac{\rho}{\mathcal{G}^2} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \rho} \Sigma_m^2 + \frac{\rho}{\mathcal{F}^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \rho} \Sigma_d^2 \right]^{1/2} \end{cases} \quad (11)$$

Ces relations vont à présent être mises à profit pour l'étude du comportement élastique non linéaire.

### 4. Comportement élastique non linéaire de l'interface

La raideur de l'interface est maintenant fonction de la discontinuité de déplacement entre grains :  $\mathbf{K}' = \mathbf{K}'([\xi])$ . On fait cependant l'hypothèse que le rapport  $\rho = K'_t/K'_n$  est constant.  $\psi$  désignant l'énergie élastique de l'interface par unité de surface, la nullité de la dissipation s'écrit :

$$\dot{\psi} = \underline{T} \cdot [\dot{\xi}] = \frac{\partial \psi}{\partial [\xi]} \cdot [\dot{\xi}] \quad (12)$$

Puisque cette égalité a lieu pour tout choix de  $[\underline{\xi}]$ , on en tire :

$$\underline{T} = \frac{\partial \psi}{\partial [\underline{\xi}]} \quad (13)$$

En utilisant la loi d'interface et en projetant (13) sur la normale et sur la tangente de l'interface on obtient :

$$T_n = \frac{\partial \psi}{\partial [\xi_n]} = K'_n([\underline{\xi}])[\xi_n]; \quad T_t = \frac{\partial \psi}{\partial [\xi_t]} = K'_t([\underline{\xi}])[\xi_t] \quad (14)$$

En combinant les deux équations de (14) et en utilisant  $K'_t = \rho K'_n$ , on déduit l'équation différentielle conditionnant l'existence d'un potentiel  $\psi$  :

$$[\xi_n] \frac{\partial K'_n}{\partial [\xi_t]} = \rho [\xi_t] \frac{\partial K'_n}{\partial [\xi_n]} \quad (15)$$

La résolution de (15) montre que  $K'_n([\underline{\xi}])$  s'écrit sous la forme :

$$K'_n([\underline{\xi}]) = \mathfrak{F}([\xi_n]^2 + \rho[\xi_t]^2) \quad (16)$$

On introduit la discontinuité de déplacement équivalente  $\xi^e = \sqrt{[\xi_n]^2 + \rho[\xi_t]^2}$ . Dans l'esprit de la méthode sécante modifiée [5,6], on approche cette dernière par la moyenne  $\bar{\xi}^e = \sqrt{([\xi_n]^2 + \rho[\xi_t]^2)\mathcal{I}}$  dont on obtient l'expression en utilisant (7) et (11) en fonction du chargement macroscopique  $\Sigma$  et des propriétés de l'interface intergranulaire :

$$\bar{\xi}^e = \frac{1}{K'_n(\bar{\xi}^e)(1-\varphi)\sqrt{3(1-2\varphi)}} \left[ \frac{\Sigma_m^2}{\mathcal{G}} + \frac{\Sigma_d^2}{\mathcal{F}} \right]^{1/2} \quad (17)$$

## 5. Homogénéisation du comportement élastique non linéaire

En vue de parvenir à un comportement macroscopique du polycrystal modélisant celui du sable pour lequel le module de Young tangent trouvé expérimentalement est proportionnel à  $\sqrt{|\Sigma_m|}$  [1], on considère une variation linéaire de  $K'_n(\xi^e)$  en fonction de  $\xi^e$  :

$$K'_n(\xi^e) = K_n^0 \frac{\xi^e}{a} \quad (18)$$

$K_n^0$  est un paramètre qui sera déterminé expérimentalement. En combinant (17) et (18), on obtient successivement  $\bar{\xi}^e$  et  $K'_n$  en fonction du chargement macroscopique  $\Sigma$ . On fait ensuite appel à l'estimation de  $\mu^{\text{ac}}$  (9) et  $k^{\text{ac}}$  (10) donnée par le schéma d'homogénéisation dans le cadre de l'élasticité linéaire. On obtient ainsi l'expression des modules de cisaillement  $\mu_{\text{sec}}^{\text{ac}}(\Sigma)$  et de compression  $k_{\text{sec}}^{\text{ac}}(\Sigma)$  homogénéisés sécants du polycrystal poreux en fonction du chargement macroscopique :

$$\mu_{\text{sec}}^{\text{ac}}(\Sigma) = \frac{\sqrt{aK_n^0}\mathcal{F}}{\sqrt{1-\varphi}(3(1-2\varphi))^{1/4}} \left[ \frac{\Sigma_m^2}{\mathcal{G}} + \frac{\Sigma_d^2}{\mathcal{F}} \right]^{1/4}; \quad k_{\text{sec}}^{\text{ac}}(\Sigma) = \frac{\sqrt{aK_n^0}\mathcal{G}}{\sqrt{1-\varphi}(3(1-2\varphi))^{1/4}} \left[ \frac{\Sigma_m^2}{\mathcal{G}} + \frac{\Sigma_d^2}{\mathcal{F}} \right]^{1/4} \quad (19)$$

On en déduit encore le module de Young sécant  $E_{\text{sec}}^{\text{ac}}(\Sigma)$  et le coefficient de Poisson  $\nu^{\text{ac}}$  :

$$E_{\text{sec}}^{\text{ac}}(\Sigma) = \frac{9\mathcal{G}\mathcal{F}}{3\mathcal{G} + \mathcal{F}} \frac{\sqrt{aK_n^0}}{\sqrt{1-\varphi}(3(1-2\varphi))^{1/4}} \left[ \frac{\Sigma_m^2}{\mathcal{G}} + \frac{\Sigma_d^2}{\mathcal{F}} \right]^{1/4}; \quad \nu^{\text{ac}} = \frac{3\mathcal{G} - 2\mathcal{F}}{2(3\mathcal{G} + \mathcal{F})} \quad (20)$$

On remarque que le coefficient de Poisson reste indépendant de la contrainte macroscopique appliquée, ce qui est en accord avec les données expérimentales relatives au sable dans le cadre d'essais triaxiaux en petites déformations [2]. Ce type d'essai fournit l'évolution du module de Young tangent en fonction de la contrainte de confinement  $|\Sigma_m|$ . Ce dernier est mesuré en exerçant sur l'éprouvette un incrément de chargement déviatorique  $d\Sigma_d$  à partir de l'état déviatorique nul  $\Sigma_d = 0$  et pour une contrainte sphérique  $\Sigma_m$  donnée. Le lien entre la formulation tangente et sécante s'obtient en écrivant que :

$$d\Sigma = \mathbb{C}_{\text{tan}} : dE = (dk_{\text{sec}}E_v + k_{\text{sec}}dE_v)\mathbf{1} + 2(d\mu_{\text{sec}}E_d + \mu_{\text{sec}}dE_d) \quad (21)$$

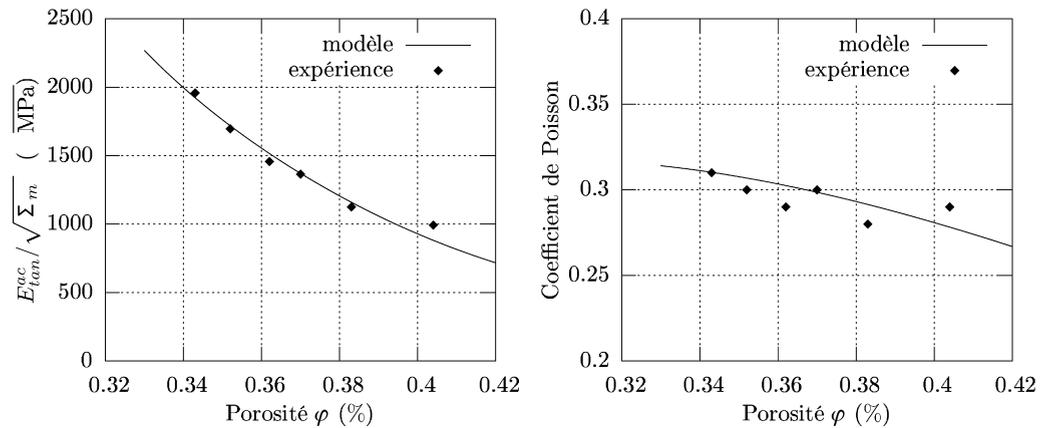


Fig. 2. Confrontation modèle / expérience : (a) rapport  $E_{\tan}^{\text{ac}} / \sqrt{|\Sigma_m|}$ ; (b) coefficient de Poisson.

Fig. 2. Comparison model/experiment: (a) ratio  $E_{\tan}^{\text{ac}} / \sqrt{|\Sigma_m|}$ ; (b) the Poisson ratio.

Au voisinage d'un état non déviatorique  $\Sigma_d$ ,  $E_d = 0$ , et en remarquant que  $\frac{\partial k_{\text{sec}}}{\partial \Sigma_d} / \Sigma_d = 0$  s'annule (voir (19)), l'Éq. (21) devient :

$$d\Sigma = \left( \frac{\partial k_{\text{sec}}}{\partial \Sigma_m} d\Sigma_m E_v + k_{\text{sec}} dE_v \right) \mathbf{1} + 2\mu_{\text{sec}} dE_d \quad (22)$$

Finalement en identifiant terme à terme dans (22) avec  $d\Sigma = d\Sigma_m \mathbf{1} + d\Sigma_d$ , on montre que le tenseur d'élasticité tangent  $\mathbb{C}_{\tan}$  est isotrope et que :

$$\mu_{\tan} = \mu_{\text{sec}}; \quad k_{\tan} = \frac{k_{\text{sec}}}{1 - \frac{\Sigma_m}{k_{\text{sec}}} \frac{\partial k_{\text{sec}}}{\partial \Sigma_m} / \Sigma_d = 0} = 2k_{\text{sec}} \quad (23)$$

On obtient ensuite le module de Young tangent  $E_{\tan}^{\text{ac}}$  sous la forme :

$$E_{\tan}^{\text{ac}}(\Sigma) = \mathcal{E}_{\tan}^{\text{ac}}(\rho, \varphi) \sqrt{aK_n^0} \sqrt{|\Sigma_m|} \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\tan}^{\text{ac}}(\rho, \varphi) = \frac{6}{5 + 2\nu^{\text{ac}}} \frac{9\mathcal{G}^{3/4} \mathcal{F}}{3\mathcal{G} + \mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{1 - \varphi(3(1 - 2\varphi))^{1/4}}} \quad (24)$$

La proportionnalité du module de Young tangent macroscopique  $E_{\tan}^{\text{ac}}$  par rapport à  $\sqrt{|\Sigma_m|}$  est conforme aux observations expérimentales. Le coefficient de proportionnalité  $\mathcal{E}_{\tan}^{\text{ac}}(\rho, \varphi) \sqrt{aK_n^0}$  est une fonction qui dépend uniquement des paramètres intrinsèques de l'assemblage granulaire, à savoir la porosité  $\varphi$  et les caractéristiques de l'interface  $\rho$  et  $aK_n^0$ . Le calcul de  $\mathcal{E}_{\tan}^{\text{ac}}(\rho, \varphi)$  (24) nécessite d'explicitier la fonction  $\mathcal{F}$  solution de l'Éq. (8) ( $\mathcal{G}$  étant reliée à  $\mathcal{F}$  par (10)). L'optimisation des paramètres  $\rho$  et  $aK_n^0$  à partir de données expérimentales relatives à un sable de Fontainebleau conduit à une solution numérique unique :  $\rho = 7,7 \times 10^{-3}$  et  $aK_n^0 = 3,6 \times 10^9 \text{ N/mm}^2$ . Soulignons que  $aK_n^0$  et  $\rho$  sont des caractéristiques intrinsèques du contact intergranulaire, indépendantes de la densité du sable.

Les Figs. 2(a) et 2(b) font apparaître un très bon accord entre les prévisions du modèle et les résultats expérimentaux concernant le module de Young tangent et le coefficient de Poisson sur toute la gamme de porosité étudiée.

## Références

- [1] P.-Y. Hicher, Elastic properties of soils, *Journal of Geotechnical Engineering* (August 1996) 641–648.
- [2] Y. Maalej, Comportement mécanique d'un milieu granulaire injecté par un coulis de ciment : étude expérimentale et modélisation micromécanique, Thèse de doctorat de l'ENPC, France, 2007.
- [3] L. Dormieux, J. Sanahuja, Y. Maalej, Résistance d'un polycristal avec interfaces intergranulaires imparfaites, *C. R. Mecanique* 335 (1) (2007) 25–31.
- [4] N.A. Fleck, L.T. Kuhn, R.M. Mc Meeking, Yielding of metal powder bonded by isolated contacts, *J. Mech. Phys. Solids* 40 (5) (1992) 1139–1162.
- [5] P. Ponte-Castaneda, The effective mechanical properties of non linear isotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids* 39 (1991) 45–71.
- [6] P. Suquet, Effective behavior of non linear composites, in: *Continuum Micromechanics*, in: CISM Courses and Lectures, vol. 377, Springer, 1997.
- [7] L. Dormieux, D. Kondo, F.-J. Ulm, *Microporomechanics*, Wiley, 2006.