

# Étude de la phase finale d'un rendez-vous spatial

Alain Bioget<sup>a</sup>, Badaoui El Mabsout<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup> Département de physique, Palais de la découverte, avenue F.D. Roosevelt, 75008 Paris, France

<sup>b</sup> Institut Jean Le Rond d'Alembert, couloir 55–65, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 15 mai 2007 ; accepté après révision le 21 juin 2007

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

## Résumé

Nous considérons un satellite tournant sur une orbite circulaire autour de la terre au voisinage d'une station spatiale tournant elle-même sur une orbite circulaire autour de la terre. Nous montrons que dans un système de coordonnées cartésiennes centré sur la station, ce sont les équations de Hill qui régissent le mouvement du satellite. Dans son mouvement final d'approche le satellite, dans une première étape subit une force de rappel qui l'amène à une distance de quelques mètres de la station. Dans une deuxième étape on change la force de rappel afin que le satellite puisse entamer la manœuvre d'arrimage à la station. **Pour citer cet article : A. Bioget, B. El Mabsout, C. R. Mécanique 335 (2007).**

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**The study of the final phase of a space rendezvous.** We consider a satellite having a circular orbit around Earth, in the neighbourhood of a space station having also a circular orbit around Earth. We show that in a frame having the space station as origin, the motion of the satellite is determined by Hill's equations. In its final approach a returning force permits, in a first stage, to bring the satellite near the station to about several meters. In a second stage, we change the returning force to permit the docking with the station. **To cite this article: A. Bioget, B. El Mabsout, C. R. Mécanique 335 (2007).**

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Mécanique analytique ; Mécanique céleste ; Satellite ; Station spatiale ; Force de rappel

*Keywords :* Analytical mechanics; Celestial mechanics; Satellite; Space station; Returning force

## 1. Introduction

Nous considérons une station spatiale assimilée à un point  $O$ , en orbite circulaire autour de la Terre ou d'une planète. L'orbite circulaire est centrée au point  $O'$ , centre de la planète ; son rayon est égal à  $R$ , où  $R = R' + h$ ,  $R'$  étant le rayon de la planète et  $h$  l'altitude de la station. On a alors :  $\Omega^2.R^3 = G.(M + m') \approx G.M$ , où  $G$  est la constante de gravitation,  $M$  la masse de la planète, la masse de la station  $m$  étant négligeable par rapport à  $M$ .

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [alain.bioget@palais-decouverte.fr](mailto:alain.bioget@palais-decouverte.fr) (A. Bioget), [bae@ccr.jussieu.fr](mailto:bae@ccr.jussieu.fr) (B. El Mabsout).

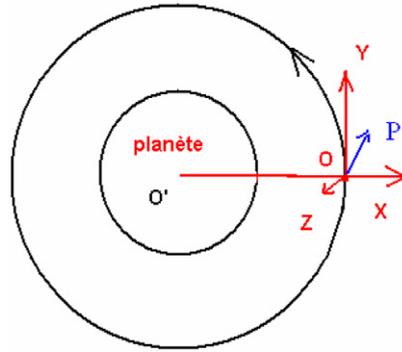


Fig. 1. Le modèle.

On suppose (Fig. 1) qu'un satellite  $P$ , de masse  $m$  elle aussi négligeable devant  $M$ , est repéré dans un système de coordonnées d'origine  $O$ , tel que  $Ox$  est radial orienté vers l'extérieur,  $Oy$  est tangent à l'orbite dans le sens du mouvement.

Nous allons utiliser une nouvelle méthode d'approche finale du satellite vers la station. Cette méthode consiste à appliquer au satellite une force de rappel vers la station dont le module est choisi de façon à assurer la stabilité du mouvement du satellite au voisinage de la station. Cette force apparaît dans le second membre des équations de Hill qui régissent le mouvement du satellite. Cela nous permettra d'optimiser le temps d'approche du satellite. C'est ce que nous montrerons par un exemple où nous comparons la durée d'approche par notre méthode avec celle obtenue par la méthode classique utilisant les équations de Hill sans second membre.

## 2. Équations du mouvement du satellite

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées de  $P$  dans le repère tournant  $(O, x, y, z)$  :

$$\overrightarrow{OP} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}. \text{ Notons } r = |\overrightarrow{OP}|$$

Dans le repère galiléen  $(O', x_1, y_1, z_1)$ , on suppose que l'orbite de la station se trouve dans le plan  $(O', x_1, y_1)$ . On pose alors :

$$\overrightarrow{O'O} = X.\vec{i}_1 + Y.\vec{j}_1$$

Notons que l'on a :

$$\vec{i} = \frac{1}{R} \cdot (X.\vec{i}_1 + Y.\vec{j}_1), \quad \vec{j} = \frac{1}{R} \cdot (-Y.\vec{i}_1 + X.\vec{j}_1), \quad \vec{k} = \vec{k}_1$$

On a ainsi :

$$\overrightarrow{O'P} = \left[ X \cdot \left( 1 + \frac{x}{R} \right) - y \cdot \frac{Y}{R} \right] \cdot \vec{i}_1 + \left[ Y \cdot \left( 1 + \frac{x}{R} \right) + y \cdot \frac{X}{R} \right] \cdot \vec{j}_1 + z \cdot \vec{k}_1$$

On suppose que le satellite  $P$  se trouve au voisinage de la station spatiale  $O$  (à quelques kilomètres) :  $|\overrightarrow{OP}|/|\overrightarrow{O'O}| \ll 1$  (ce rapport est en fait de l'ordre de  $10^{-3}$ ), ce qui permet de développer le second membre des équations du mouvement ; alors en négligeant les termes du second ordre, on obtient après calcul les équations dites de Hill [1,2] :

$$(I) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2.\Omega.\dot{y} - 3.\Omega^2.x = 0 \\ \ddot{y} + 2.\Omega.\dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + \Omega^2.z = 0 \end{cases}$$

$$\text{où } \Omega^2 = \frac{G.M}{R^3}.$$

### 3. Méthode d'approche systématique

Si l'on veut amener le satellite, qui se trouve à l'instant initial au point  $(x_0, y_0)$ , au point  $(x_1, y_1)$  à un instant  $t_1$  à déterminer, on résout les deux relations :

$$x(t_1) = x_1 \quad \text{et} \quad y(t_1) = y_1$$

par rapport aux composantes de la vitesse initiale. On constate que l'on peut choisir arbitrairement  $\dot{x}_0$  ou  $\dot{y}_0$  et déterminer la plus petite valeur possible de  $t_1$  ainsi que la deuxième composante non arbitraire de la vitesse initiale.

Par ailleurs si l'on impose les vitesses initiales et l'altitude  $x_1$  à l'instant  $t_1$ ,  $y_1$  sera imposé.

Dans le plan de l'orbite de la station, l'approche finale du satellite  $P$  vers la station, peut se faire dans les deux directions radiale et orthoradiale. Nous allons ainsi procéder de deux manières.

#### 3.1. Première méthode

Pour effectuer une approche radiale, nous appliquons sur le satellite  $P$  une force de rappel [3] dans le plan de l'orbite de la station, de la forme :

$$-m.k.(x.\vec{i} + y.\vec{j}), \quad k > 0$$

Nous constatons que la stabilité des solutions du système (II) obtenu :

$$(II) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2.\Omega.\dot{y} + (k - 3.\Omega^2)x = 0 \\ \ddot{y} + 2.\Omega.\dot{x} + k.y = 0 \\ \ddot{z} + \Omega^2.z = 0 \end{cases}$$

dépend de la valeur de  $k$ . Pour  $k \geq 3.\Omega^2$ , le système (II) possède des solutions stables, alors que pour  $k < 3.\Omega^2$  (comprenant le cas où  $k = 0$ ), il existe une valeur propre positive entraînant l'instabilité des solutions. C'est pourquoi nous prenons  $k = 3.\Omega^2$  pour avoir une solution *stable et simple*, dans le plan de l'orbite, sous la forme :

$$x(t) = \frac{2}{7.\Omega} [1 - \cos(\sqrt{7}.\Omega.t)].\dot{y}_0 + \frac{6}{7} \cdot \left[ \frac{\sin(\sqrt{7}.\Omega.t)}{\sqrt{7}} - \Omega.t \right] .\dot{y}_0 + \frac{1}{7} \cdot \left[ \frac{4.\sin(\sqrt{7}.\Omega.t)}{\sqrt{7}.\Omega} + 3.t \right] .\dot{x}_0 + x_0$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{7}.\Omega} .\sin(\sqrt{7}.\Omega.t).\dot{y}_0 + \frac{1}{7} .[3.\cos(\sqrt{7}.\Omega.t) + 4] .y_0 + \frac{2}{7.\Omega} .[\cos(\sqrt{7}.\Omega.t) - 1] \dot{x}_0$$

**Remarque.** Il est tout à fait possible d'appliquer une force de rappel à l'aide de moteurs électriques spatiaux comme les moteurs à plasma à poussée modulée. Pour  $k = 3.\Omega^2$ , nous avons  $k = 3,8988 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ , en prenant

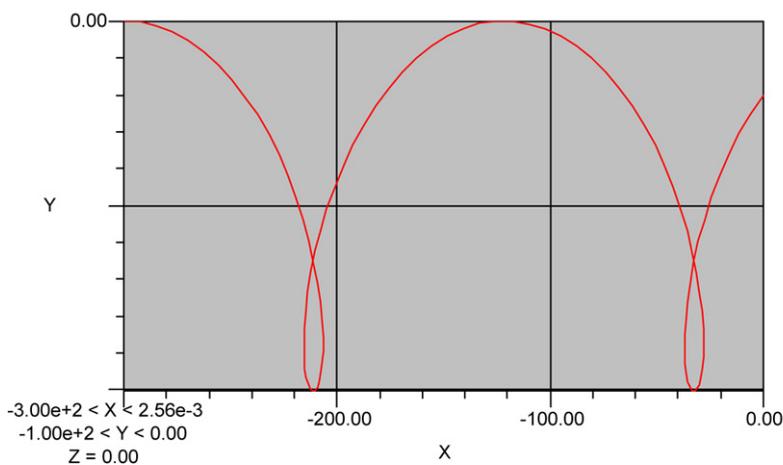


Fig. 2. Exemple 1.

$\Omega = 0,00114 \text{ s}^{-1}$ . Ainsi la poussée maximale dont on a besoin à une distance de 500 m pour un satellite de 1000 kg est à peu près égale à 2 N.

Donnons l'exemple suivant pour illustrer cette méthode qui permet au satellite qui est en dessous de la station de s'approcher de celle-ci :

**Exemple 1.** Prenons  $x_0 = -300 \text{ m}$ ,  $y_0 = 0 \text{ m}$ ,  $\dot{x}_0 = 0,20 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\dot{y}_0 = -0,12578 \text{ m s}^{-1}$  et  $x_1 = 0$ . On constate que  $y_1 = -20,4037 \text{ m}$  et que le temps nécessaire pour atteindre le point  $(x_1, y_1)$  est 3856 s (Fig. 2).

3.2. Deuxième méthode

Pour effectuer une approche orthoradiale, nous appliquons une force de rappel radiale de la forme :

$$6\Omega^2 \cdot x \cdot \vec{i}$$

alors les équations s'écrivent :

$$(III) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2 \cdot \Omega \cdot \dot{y} + 3 \cdot \Omega^2 \cdot x = 0 \\ \ddot{y} + 2 \cdot \Omega \cdot \dot{x} = 0 \\ \ddot{z} + \Omega^2 \cdot z = 0 \end{cases}$$

La solution de (III) dans le plan de l'orbite s'écrit alors :

$$x(t) = \frac{1}{7} \cdot \left( 3 \cdot x_0 - 2 \cdot \frac{\dot{y}_0}{\Omega} \right) \cdot \cos(\sqrt{7} \cdot \Omega \cdot t) + \frac{\dot{x}_0 \cdot \sin(\sqrt{7} \cdot \Omega \cdot t)}{\sqrt{7} \cdot \Omega} + \frac{2}{7} \cdot \left( \frac{\dot{y}_0}{\Omega} + 2 \cdot x_0 \right)$$

$$y(t) = \frac{-2}{7 \cdot \sqrt{7}} \cdot \left( 3 \cdot x_0 - 2 \cdot \frac{\dot{y}_0}{\Omega} \right) \cdot \sin(\sqrt{7} \cdot \Omega \cdot t) + \frac{2 \cdot \dot{x}_0 \cdot \cos(\sqrt{7} \cdot \Omega \cdot t)}{7 \cdot \Omega} + \frac{3}{7} \cdot (\dot{y}_0 + 2 \cdot \Omega \cdot x_0) \cdot t + y_0 - \frac{2 \cdot \dot{x}_0}{7 \cdot \Omega}$$

Donnons l'exemple suivant pour illustrer cette méthode qui permet au satellite qui se trouve derrière la station de s'approcher de celle-ci :

**Exemple 2.** Prenons  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -380 \text{ m}$ ,  $\dot{x}_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\dot{y}_0 = 0,20 \text{ m s}^{-1}$ , et  $x_1 = 0$ . On constate que la valeur de  $y_1$  qui donne la position la plus proche de la station est  $y_1 = -22,955 \text{ m}$  et que le temps nécessaire pour atteindre le point  $(x_1, y_1)$  est 4166,36 s (Fig. 3).

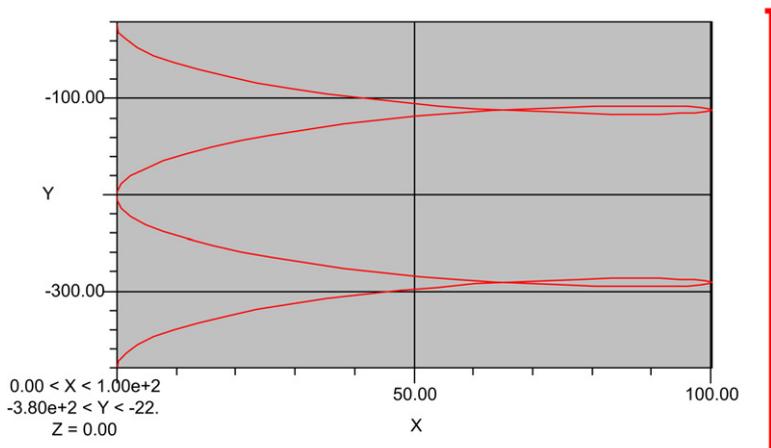


Fig. 3. Exemple 2.

#### 4. L'approche finale

A la fin de l'étape précédente le satellite arrive à proximité de la station. Alors une approche finale est nécessaire pour réduire la distance afin de permettre l'amarrage. A cet effet nous proposons d'appliquer au satellite une force de rappel radiale qui compense le terme  $3.\Omega^2$  dans la première des équations (I) :

$$(IV) \quad \begin{cases} \ddot{x} - 2.\Omega.\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + 2.\Omega.\dot{x} = 0 \end{cases}$$

La solution s'écrit alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2.\Omega} \cdot [1 - \cos(2.\Omega.t)] \cdot \dot{y}_0 + \frac{1}{2.\Omega} \cdot \sin(2.\Omega.t) \dot{x}_0 + x_0 \\ y(t) &= \frac{-1}{2.\Omega} \cdot [1 - \cos(2.\Omega.t)] \cdot \dot{x}_0 + \frac{1}{2.\Omega} \cdot \sin(2.\Omega.t) \dot{y}_0 + y_0 \end{aligned}$$

**Remarque.** La poussée maximale dont on a besoin à une distance de 4 m pour un satellite de 5000 kg est égale à : 0,07798 N.

Ainsi le satellite décrit un cercle d'équation :

$$\left[ x - \left( x_0 + \frac{\dot{y}_0}{2.\Omega} \right) \right]^2 + \left[ y - \left( y_0 - \frac{\dot{x}_0}{2.\Omega} \right) \right]^2 = \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}{4.\Omega^2}$$

dont le centre et le rayon ne dépendent que de sa vitesse initiale et dont la pulsation est égale à  $(-2.\Omega)$ .

Supposons que le point final d'approche du satellite soit  $(0, -0,15)$  ; alors les composantes de la vitesse initiale doivent vérifier :

$$\frac{x_0.\dot{y}_0 + (0,15 + y_0).\dot{x}_0}{2.\Omega} + x_0^2 + (0,15 + y_0)^2 = 0$$

Donnons un exemple, où  $x_0 = 0, y_0 = -22,955$  m,  $\dot{y}_0 = 0, \dot{x}_0 = -0,026$  m s<sup>-1</sup>, d'où la trajectoire semi-circulaire (voir Fig. 4).

#### 5. Conclusion

Nous proposons d'effectuer l'approche finale d'une station spatiale par un satellite, en deux étapes. La première étape consiste à approcher le satellite à quelques dizaines de mètres, au maximum, de la station, en utilisant une force

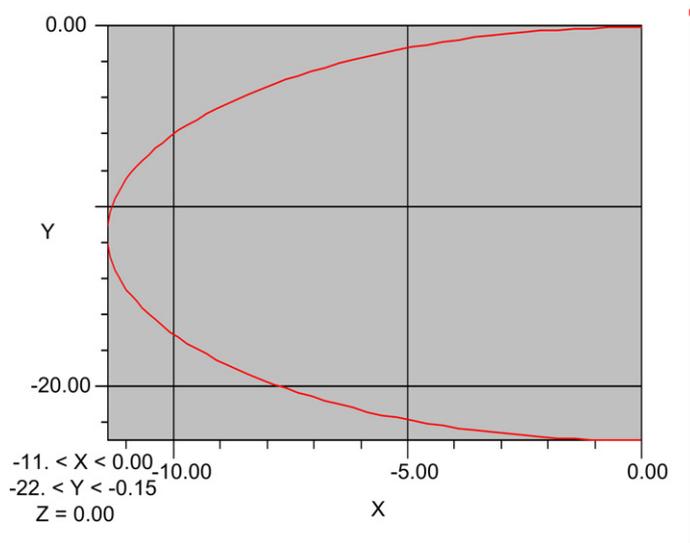


Fig. 4. L'approche finale.

de rappel, qui modifie les équations de Hill régissant le mouvement du satellite au voisinage de la station. Cette force de rappel est exercée dans le plan de l'orbite de la station.

Une première méthode consiste à prendre cette force colinéaire au rayon vecteur et son intensité est déterminée pour compenser la force centrifuge radiale que subit le satellite au voisinage de la station ; elle introduit une force centripète tangentielle à l'orbite. Cette méthode permet au satellite lorsqu'il se trouve au dessous de la station de s'approcher de celle-ci

Une seconde méthode consiste à prendre une force radiale dont l'intensité est deux fois plus grande que celle utilisée dans la première méthode. Cette méthode permet au satellite qui se trouve derrière la station de s'approcher de celle-ci.

On obtient par l'une ou l'autre des deux méthodes une trajectoire cycloïdale qui amène le satellite à quelques dizaines de mètres de la station.

Une telle force de rappel est réalisable à l'aide de moteurs électriques spatiaux comme les moteurs à plasma dont on modulera la poussée. De tels moteurs ont l'avantage sur les moteurs à propulsion chimique utilisés jusqu'à maintenant, de fournir des poussées modulables et de l'ordre de celles calculées par notre méthode, alors que les moteurs à propulsion chimique ont une poussée constante.

A la deuxième étape la force de rappel est centripète et purement radiale. Elle permet d'approcher le satellite à une distance inférieure à un mètre suivant une trajectoire semi-circulaire indirecte.

Notre travail consistera, par la suite, à imaginer une approche globale du satellite vers la station, à partir d'une orbite de transfert.

**Remarque.** Ce travail a fait l'objet en février 2006 d'un dépôt de brevet effectué conjointement par l'Université Pierre et Marie Curie, le Palais de la Découverte et le Centre National de la Recherche Scientifique.

## Références

- [1] B. El Mabsout, Méthode semi-numérique de résolution du problème de Hill-application à Phœbé, *Astron. & Astrophys.* 5 (1970) 68–83.
- [2] G.W. Hill, *Researches in the lunar theory*, *Am. J. Math.* 1 (1878) 5–26.
- [3] P. Gurfil, N.J. Kasdin, Canonical modelling of coorbital motion in Hill's problem using epicyclic orbital elements, *Astron. & Astrophys.* 409 (2003) 1135–1140.