

## Rupture dynamique et fissuration quasi-statique instable

Pierre-Emmanuel Dumouchel<sup>a,b</sup>, Jean-Jacques Marigo<sup>b,\*</sup>, Miguel Charlotte<sup>c</sup>

<sup>a</sup> LaMSID (UMR 2832), EDF R&D

<sup>b</sup> Institut Jean-le-Rond-d'Alembert (UMR 7190), Université Paris VI, 75005 Paris, France

<sup>c</sup> LMS (UMR 7649), École Polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 25 mai 2007 ; accepté le 10 juillet 2007

Disponible sur Internet le 5 septembre 2007

Présenté par Huy Duong Bui

### Résumé

Sur un problème modèle unidimensionnel de rupture avec énergie de surface de Griffith, on montre que la solution dynamique converge, lorsque la vitesse de chargement tend vers 0, vers une solution quasi-statique présentant une phase instable de propagation. En particulier, le saut de fissuration induit par cette instabilité est régi par le principe de conservation de l'énergie *quasistatique*, l'énergie cinétique pouvant être négligée. **Pour citer cet article :** P.-E. Dumouchel et al., *C. R. Mecanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**Dynamic fracture and unstable quasi-static cracking.** Considering a one-dimensional problem of debonding in the context of Griffith theory, we show that the dynamical solution converges, when the speed of loading goes to 0, to a quasi-static solution including an unstable phase of propagation. In particular, the jump of the debonding induced by this instability is governed by a principle of balance of the total quasi-static energy, the kinetic energy being negligible. **To cite this article:** P.-E. Dumouchel et al., *C. R. Mecanique* 335 (2007).

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Rupture ; Dynamique ; Mécanique de la rupture ; Théorie de Griffith

*Keywords :* Rupture; Dynamics; Fracture mechanics; Griffith theory

### Abridged English version

We consider a one-dimensional dynamical problem of debonding of a semi-infinite inextensible film. The opening of the film at the end  $x = 0$ , say  $T$ , is prescribed like  $T = \epsilon t$ , that is, with a constant speed  $\epsilon$ , see Fig. 1. That speed  $\epsilon$  will be considered as a small parameter. The main goal of this Note is to analyze the asymptotic behavior of the response when  $\epsilon$  goes to 0. The opening of the film  $u^\epsilon$  is considered as a function of  $(x, T)$  and the debonding length  $\ell^\epsilon$  as a function of  $T$ . Moreover, the debonding of the film is governed by Griffith's law:  $\dot{\ell}^\epsilon > 0$  if and only

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [marigo@lmm.jussieu.fr](mailto:marigo@lmm.jussieu.fr) (J.-J. Marigo).

if the dynamical energy release rate  $G^\epsilon$  is equal to the local toughness  $k(\ell^\epsilon)$ , see (3). We let the toughness takes two values: the stronger,  $k_2$ , for  $0 < x < \ell_I$ ; the weaker,  $k_1$ , for  $x > \ell_I$ . Assuming that the film is initially bonded to a plane support, the dynamical response is governed by the (linear and homogeneous) wave equation, Hadamard’s compatibility condition, Griffith’s law and the boundary condition, see (1)–(4). The discontinuity of the toughness induces the appearance of a shock wave which interacts with the propagation front of the debonding. The multiple reflections of this shock wave at the boundary  $x = 0$  and at the front of propagation delimit a family of sectors  $\mathcal{Q}_i^\epsilon$  of the  $(x, T)$  quarter-plane in which the strain  $e^\epsilon$  and the velocity  $v^\epsilon$  are constant. For the same reason, the debonding length velocity is piecewise constant. Those families of constants  $e_i^\epsilon$ ,  $v_i^\epsilon$  and  $\dot{\ell}_i^\epsilon$  are obtained by induction, from the initial and the boundary conditions, see Proposition 1.1. We can distinguish four phases in the debonding evolution. During the first phase, the debonding grows at a small constant speed in the zone with stronger toughness. When the debonding enters in the zone with weaker toughness, then a shock wave is created and the speed of the debonding is of the order of the sound velocity. This second phase stops when the shock wave reaches again the front of propagation after reflection at the boundary, cf. Fig. 2. The length of the debonding is then  $\ell_2^\epsilon$ , see (12). Once the shock wave has reached the front of propagation,  $G^\epsilon$  becomes smaller than  $k_1$  and the debonding stops. This phase of arrest lasts between  $T_3^\epsilon$  and  $T_{2n^\epsilon+1}^\epsilon$ , the time of  $n^\epsilon - 1$  back and forth of the shock wave so that  $G^\epsilon$  becomes equal to  $k_1$ , see (14). Then, the debonding starts again, its small velocity oscillates around the velocity corresponding to a propagation in an homogeneous medium with toughness  $k_1$ . The calculation of the different energies shows that the kinetic energy is almost always negligible (of the order of  $\epsilon^2$ ), except during the second phase. Indeed, at the beginning of that phase, the kinetic energy is small, but increases rapidly; it becomes maximal and of order 1 at  $T_2^\epsilon$  when the shock wave is reflected at  $x = 0$ ; finally, it decreases rapidly to become small at the end of the second phase. Then, it remains small for ever.

Passing to the limit when  $\epsilon$  goes to 0 leads to a limit debonding evolution  $T \mapsto \ell^0(T)$  given by (17). The main result of this Note consists in showing that the limit can be obtained by considering only quasi-static energetic quantities. The first and the fourth phases simply follow the quasi-static Griffith law, the potential energy release rate obtained from static considerations is equal to the toughness, see (18). The second phase corresponds to an unstable phase of propagation where the Griffith law does not more hold. The debonding length jump at  $T = \ell_I \sqrt{2k_2}$  and that jump is such that the total quasi-static energy of the film remains constant, see (19). Consequently, the jump is larger than that envisaged by Griffith’s criterion and the debonding stops as long as the potential energy release rate remains smaller than  $k_1$ . In conclusion, contrary to a spread idea, one can treat unstable phases of propagation always in a quasi-static framework. It suffices to replace Griffith’s criterion by the conservation of the total energy when the debonding length jumps.

### 1. Position du problème

Le problème unidimensionnel que l’on traite peut être considéré comme une version linéarisée d’un essai de décollement dynamique d’un film mince semi-infini inextensible, cf. [3] et Fig. 1. Les unités ont été choisies de façon à ce que les principales données matérielles comme la masse linéique ou la tension du film soient égales à 1, ce qui simplifie la plupart des expressions. On impose une ouverture  $T = \epsilon t$  du film en  $x = 0$ ,  $t$  désignant le temps. La

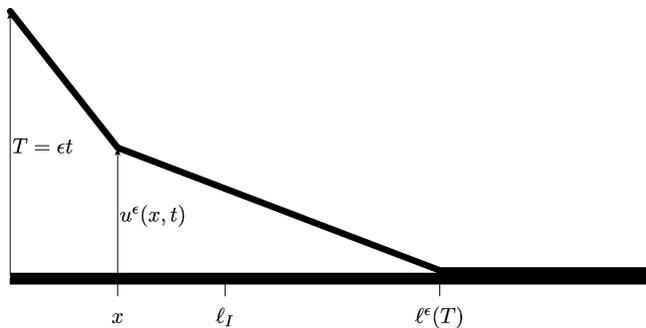


Fig. 1. L’essai de décollement.

Fig. 1. Debonding test.

vitesse d'ouverture imposée  $\epsilon$  est un paramètre destiné à tendre vers 0. Pour comparer les solutions du problème dynamique correspondant à différentes valeurs de  $\epsilon$ , l'ouverture  $u^\epsilon$  est considérée comme fonction de  $x$  et  $T$  (et non de  $x$  et  $t$ ) définie sur le quadrant  $\mathcal{Q} = [0, +\infty)^2$ . L'état de décollement du film à l'« instant »  $T$  correspond aux points  $x$  tels que  $u^\epsilon(x, T) > 0$ . Pour simplifier la présentation, on suppose a priori que le décollement progresse depuis  $x = 0$  et notons  $\ell^\epsilon(T)$  la longueur de décollement à  $T$ . On note  $e^\epsilon$  et  $v^\epsilon$  les gradients de  $u^\epsilon$  par rapport à  $x$  et  $T$  :  $e^\epsilon = \partial u^\epsilon / \partial x$ ,  $v^\epsilon = \partial u^\epsilon / \partial T$ ,  $v^\epsilon$  représentant donc  $1/\epsilon$  fois la vitesse réelle des points matériels. La « vitesse » de propagation de la fissure dans l'espace  $(x, T)$  est notée  $\dot{\ell}^\epsilon = d\ell^\epsilon/dT$ . La dynamique du film en amont du front de propagation est régie par l'équation des ondes :  $\epsilon^2 \partial^2 u^\epsilon / \partial x^2 - \partial^2 u^\epsilon / \partial T^2 = 0$ , les ondes se propageant donc dans l'espace  $(x, T)$  à la célérité  $\pm 1/\epsilon$ . L'ouverture  $u^\epsilon$  est nécessairement continue, mais des ondes de choc se propagent. Ce sous-ensemble « unidimensionnel » de  $\mathcal{Q}$  où  $e^\epsilon$  ou  $v^\epsilon$  sont discontinus est noté  $S^\epsilon$ . Il contient en particulier le front de propagation  $S_0^\epsilon = \{(\ell^\epsilon(T), T) : T > 0\}$ . Les sauts de quantité à travers  $S^\epsilon$  sont notés avec un double crochet,  $\llbracket f \rrbracket = f^+ - f^-$  sur  $S^\epsilon$ , l'orientation étant choisie de façon à ce que le côté + corresponde aux  $T$  plus grands, i.e. les valeurs après passage de l'onde de choc.

On suit l'hypothèse de Griffith cf. [2], et on suppose que le développement du décollement s'accompagne d'une augmentation de l'énergie de surface caractérisée par la densité  $x \mapsto k(x)$ . Cette densité prend 2 valeurs, passant de  $k_2$  à  $k_1 < k_2$  à partir du point d'abscisse  $\ell_I$ . La discontinuité de ténacité engendre elle-même une onde de choc lorsque le front de propagation atteint le point  $x = \ell_I$ . Cette onde de choc rétrograde se propage à la célérité  $-1/\epsilon$  dans l'espace  $(x, T)$  avant de se réfléchir en  $x = 0$  pour se transformer en onde de choc directe se propageant à la célérité  $+1/\epsilon$ . Elle rejoint le front de propagation, modifie la vitesse de décollement et se transforme à nouveau en onde de choc rétrograde qui ira se réfléchir en  $x = 0$ , ce ballet des ondes se reproduisant indéfiniment. On partitionne donc  $S^\epsilon$  en 3 sous-ensembles : le front de propagation  $S_0^\epsilon$ , les ondes de choc directes  $S_+^\epsilon$  et les rétrogrades  $S_-^\epsilon$ . Sur  $S^\epsilon$  la condition de compatibilité d'Hadamard traduisant la continuité de  $u^\epsilon$  s'écrit :

$$\epsilon \llbracket v^\epsilon \rrbracket - \llbracket e^\epsilon \rrbracket = 0 \text{ sur } S_-^\epsilon, \quad \epsilon \llbracket v^\epsilon \rrbracket + \llbracket e^\epsilon \rrbracket = 0 \text{ sur } S_+^\epsilon, \quad \llbracket v^\epsilon \rrbracket + \dot{\ell}^\epsilon \llbracket e^\epsilon \rrbracket = 0 \text{ sur } S_0^\epsilon \quad (1)$$

L'évolution du décollement suit la loi de Griffith et se formule en terme du taux de restitution dynamique  $G^\epsilon$ . De façon générale le taux de restitution d'énergie dynamique est défini par une intégrale de contour avec un contour tendant vers la pointe de la fissure, cf. [1]. En l'appliquant ici,  $G^\epsilon$  est donné par

$$2G^\epsilon = \llbracket e^{\epsilon^2} \rrbracket - \epsilon^2 \llbracket v^{\epsilon^2} \rrbracket \quad (2)$$

les sauts étant évalués sur  $S_0^\epsilon$ . La loi de Griffith s'écrit classiquement

$$\dot{\ell}^\epsilon \geq 0, \quad G^\epsilon \leq k(\ell^\epsilon), \quad (G^\epsilon - k(\ell^\epsilon)) \dot{\ell}^\epsilon = 0 \quad (3)$$

la première inégalité traduisant l'irréversibilité du décollement, la deuxième est le critère de Griffith alors que l'égalité stipule que la fissure ne se propage que quand le taux de restitution d'énergie dynamique est égal à la ténacité locale. Il ne reste plus qu'à écrire la condition à la limite et la condition initiale

$$v^\epsilon(0, T) = 1, \quad \forall T > 0, \quad e^\epsilon(x, 0) = v^\epsilon(x, 0) = 0, \quad \forall x > 0 \quad (4)$$

pour obtenir le système complet d'équations du problème dynamique.

Une fois le problème résolu, les énergies potentielle, cinétique et de surface au niveau  $T$  s'en déduisent à l'aide de

$$\mathcal{P}^\epsilon(T) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell^\epsilon(T)} e^\epsilon(x, T)^2 dx, \quad \mathcal{K}^\epsilon(T) = \frac{\epsilon^2}{2} \int_0^{\ell^\epsilon(T)} v^\epsilon(x, T)^2 dx, \quad \mathcal{S}^\epsilon(T) = \int_0^{\ell^\epsilon(T)} k(x) dx \quad (5)$$

Comme la condition à la limite et les conditions initiales sont des constantes en terme de la déformation et de la vitesse, on cherche des solutions où  $e^\epsilon$ ,  $v^\epsilon$  et  $\dot{\ell}^\epsilon$  sont constants par morceaux. L'équation des ondes étant donc automatiquement vérifiée dans  $\mathcal{Q} \setminus S^\epsilon$ , il reste à déterminer les secteurs dits d'état constant et la valeur de ces états à l'aide de (1)–(4). Ces différents secteurs sont délimités par les différents segments de droite constituant  $S^\epsilon$  et sont notés  $\mathcal{Q}_i^\epsilon$ , l'indice  $i$  croissant avec  $T$ ;  $\mathcal{Q}_0^\epsilon$  correspond au secteur où  $e^\epsilon = v^\epsilon = 0$ , cf. Fig. 2. Dans le secteur  $\mathcal{Q}_i^\epsilon$  l'état constant est noté  $(e_i^\epsilon, v_i^\epsilon)$ . La célérité de propagation avant l'arrivée en  $x = \ell_I$ , i.e. sur le segment de droite séparant  $\mathcal{Q}_0^\epsilon$  et  $\mathcal{Q}_1^\epsilon$  est notée  $\dot{\ell}_0^\epsilon$  et le taux de restitution d'énergie  $G_0^\epsilon$ . Après, la célérité de propagation de la fissure sur le segment de droite séparant  $\mathcal{Q}_0^\epsilon$  et  $\mathcal{Q}_{2i}^\epsilon$  est notée  $\dot{\ell}_i^\epsilon$  et le taux de restitution d'énergie  $G_i^\epsilon$ . Les valeurs de  $T$  où les ondes de choc rétrogrades se réfléchissent en  $x = 0$  et se transforment en ondes directes sont notés  $T_{2i}^\epsilon$ ,  $i \geq 1$ . Les valeurs de  $T$  et

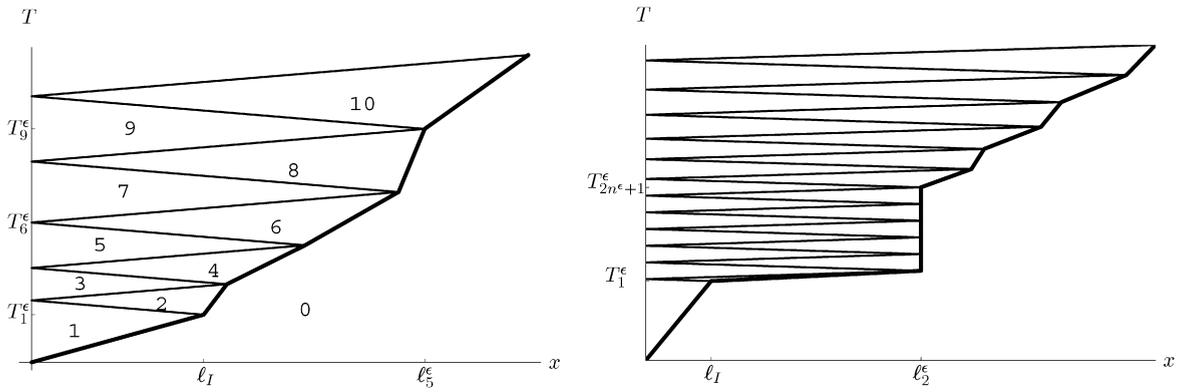


Fig. 2. A gauche : Structure de la solution dynamique et numérotation des secteurs ; A droite : Les 4 phases de propagation, front de propagation et ondes de choc pour  $k_1 = 0,5, k_2 = 2$  et  $\epsilon = 0,05$ .

Fig. 2. Left: structure of the dynamic solution and numbering of the sectors; right: the 4 phases of propagation, the propagation front and the shock wave for  $k_1 = 0.5, k_2 = 2$  et  $\epsilon = 0.05$ .

la position de la pointe de la fissure où les ondes de choc directes se réfléchissent sur le front de propagation et se transforment en ondes rétrogrades sont notés  $T_{2i-1}^\epsilon$  et  $l_i^\epsilon, i \geq 1$ .

La résolution du problème s'appuie sur la formule de récurrence suivante :

**Proposition 1.1.** Soit  $i \geq 1$ . Dans  $Q_{2i-1}^\epsilon, v_{2i-1}^\epsilon = 1$  ; supposons connus  $e_{2i-1}^\epsilon$  et  $l_i^\epsilon$ . Alors  $e_{2i}^\epsilon, v_{2i}^\epsilon$  et  $l_i^\epsilon$  sont donnés par

$$\dot{l}_i^\epsilon = \frac{1 \left( (e_{2i-1}^\epsilon - \epsilon)^2 - 2k_1 \right)^+}{\epsilon \left( (e_{2i-1}^\epsilon - \epsilon)^2 + 2k_1 \right)}, \quad e_{2i}^\epsilon = \frac{e_{2i-1}^\epsilon - \epsilon}{1 + \epsilon \dot{l}_i^\epsilon}, \quad v_{2i}^\epsilon = -\dot{l}_i^\epsilon e_{2i}^\epsilon \tag{6}$$

l'exposant + désignant la partie positive, alors que  $e_{2i+1}^\epsilon, v_{2i+1}^\epsilon$  et  $l_{i+1}^\epsilon$  sont donnés par

$$e_{2i+1}^\epsilon = (1 - \epsilon \dot{l}_i^\epsilon) e_{2i}^\epsilon - \epsilon, \quad v_{2i+1}^\epsilon = 1, \quad l_{i+1}^\epsilon = \frac{1 + \epsilon \dot{l}_i^\epsilon}{1 - \epsilon \dot{l}_i^\epsilon} l_i^\epsilon \tag{7}$$

Les différentes énergies sont des fonctions affines par morceaux de  $T$ . Leurs valeurs à  $T_i^\epsilon$  sont données par

$$\mathcal{P}^\epsilon(T_{2i-1}^\epsilon) = \frac{1}{2} e_{2i-1}^{\epsilon 2} l_i^\epsilon, \quad \mathcal{K}^\epsilon(T_{2i-1}^\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2} l_i^\epsilon, \quad \mathcal{S}(T_{2i-1}^\epsilon) = (k_2 - k_1) l_I + k_1 l_i^\epsilon \tag{8}$$

$$\mathcal{P}^\epsilon(T_{2i}^\epsilon) = \frac{1}{2} e_{2i}^{\epsilon 2} (1 + \epsilon \dot{l}_i^\epsilon) l_i^\epsilon, \quad \mathcal{K}^\epsilon(T_{2i}^\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2} v_{2i}^{\epsilon 2} (1 + \epsilon \dot{l}_i^\epsilon) l_i^\epsilon, \quad \mathcal{S}(T_{2i}^\epsilon) = (k_2 - k_1) l_I + k_1 (1 + \epsilon \dot{l}_i^\epsilon) l_i^\epsilon \tag{9}$$

## 2. Réponse dynamique

On distingue 4 phases dans l'évolution du décollement, cf. Fig. 2.

1. Phase de propagation dans la zone à forte ténacité. Dans le secteur  $Q_1^\epsilon$ , on déduit de (1)–(4) que

$$\dot{l}_0^\epsilon = \frac{1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}}, \quad e_1^\epsilon = -\sqrt{2k_2 + \epsilon^2}, \quad v_1^\epsilon = 1, \quad T_1^\epsilon = l_I \sqrt{2k_2 + \epsilon^2}. \tag{10}$$

A partir de  $T_1^\epsilon$ , les évolutions sont régies par la Proposition 1.1.

2. Phase de propagation « rapide » dans la zone à faible ténacité. On déduit de (6) que

$$\epsilon \dot{l}_1^\epsilon = \frac{(\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon)^2 - 2k_1}{(\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon)^2 + 2k_1} \tag{11}$$

et donc que  $\epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon$  est de l'ordre de 1, i.e. le décollement se propage à une vitesse de l'ordre de la célérité du son qui reste une vitesse que l'on ne peut dépasser. L'onde de choc rétrograde arrive en  $x = 0$  à  $T_2^\epsilon = T_1^\epsilon + \epsilon \ell_I$ . Elle se réfléchit alors et l'onde directe engendrée rattrape le front de propagation au point  $(\ell_2^\epsilon, T_3^\epsilon)$  :

$$\ell_2^\epsilon = \frac{1 + \epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon}{1 - \epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon} \ell_I, \quad T_3^\epsilon = T_1^\epsilon + \frac{2\epsilon \ell_I}{1 - \epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon} \quad (12)$$

En  $T_1^\epsilon$  et  $T_3^\epsilon$ , l'énergie cinétique est d'ordre  $\epsilon^2$  alors qu'elle est d'ordre 1 en  $T_2^\epsilon$ . Précisément, on a

$$\mathcal{K}^\epsilon(T_1^\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2} \ell_I, \quad \mathcal{K}^\epsilon(T_2^\epsilon) = \frac{(\epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon)^2 (\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon)^2}{2(1 + \epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon)} \ell_I, \quad \mathcal{K}^\epsilon(T_3^\epsilon) = \frac{\epsilon^2 (1 + \epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon)}{2(1 - \epsilon \dot{\ell}_1^\epsilon)} \ell_I \quad (13)$$

3. *Phase d'arrêt en  $x = \ell_2^\epsilon$ .* À  $T = T_3^\epsilon$ , l'onde de choc rattrape le front de propagation et le décollement s'arrête. Cet arrêt a lieu durant  $n^\epsilon - 1$  aller-retours de l'onde de choc, i.e. entre  $T_3^\epsilon$  et  $T_{2n^\epsilon+1}^\epsilon$  avec

$$T_{2n^\epsilon+1}^\epsilon = T_3^\epsilon + 2\epsilon(n^\epsilon - 1)\ell_2^\epsilon, \quad n^\epsilon = \left\lfloor \frac{1}{2\epsilon} \left( \sqrt{2k_1} - \frac{2k_1}{\sqrt{2k_2 + \epsilon^2} + \epsilon} + 3\epsilon \right) \right\rfloor \quad (14)$$

(.) désignant la partie entière. Durant cette phase l'énergie cinétique reste d'ordre  $\epsilon^2$ .

4. *Phase de propagation « lente » dans la zone à faible ténacité.* A partir de  $T = T_{2n^\epsilon+1}^\epsilon$  la fissure redémarre. Pour  $i \geq n^\epsilon + 1$ ,  $\dot{\ell}_i^\epsilon$  peut s'écrire

$$\epsilon \dot{\ell}_i^\epsilon = \frac{2k_1 - (X_{i-n^\epsilon-1}^\epsilon)^2}{2k_1 + (X_{i-n^\epsilon-1}^\epsilon)^2}, \quad X_0^\epsilon = \frac{1}{|e_{2n^\epsilon+1}^\epsilon| + \epsilon} \quad (15)$$

$$\frac{2\sqrt{2k_1 + \epsilon^2}}{X_i^\epsilon + \epsilon + \sqrt{2k_1 + \epsilon^2}} - 1 = (-1)^i \left( \sqrt{1 + \frac{\epsilon^2}{2k_1}} - \frac{\epsilon}{\sqrt{2k_1}} \right)^{2i} \left( \frac{2\sqrt{2k_1 + \epsilon^2}}{X_0^\epsilon + \epsilon + \sqrt{2k_1 + \epsilon^2}} - 1 \right) \quad (16)$$

On en déduit que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{\ell}_i^\epsilon = (2k_1 + \epsilon^2)^{-1/2}$ , i.e. la vitesse de décollement tend vers celle correspondant au cas d'une propagation dans un milieu homogène de ténacité  $k_1$ . Elle oscille autour de cette valeur limite et y tend exponentiellement (avec  $i$ ). Durant cette phase l'énergie cinétique reste d'ordre  $\epsilon^2$ .

### 3. Convergence vers une réponse quasi-statique

**Proposition 3.1.** *Quand  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $T \mapsto \ell^\epsilon(T)$  converge vers  $T \mapsto \ell^0(T)$  défini par*

$$\ell^0(T) = \begin{cases} T/\sqrt{2k_2} & \text{si } 0 \leq T < \ell_I \sqrt{2k_2} \\ \ell_I k_2 / k_1 & \text{si } \ell_I \sqrt{2k_2} < T \leq \ell_I 2k_2 / \sqrt{2k_1} \\ T/\sqrt{2k_1} & \text{si } T \geq \ell_I 2k_2 / \sqrt{2k_1} \end{cases} \quad (17)$$

Donc  $\ell^0$  saute de  $\ell_I$  à  $\ell_I k_2 / k_1$  quand  $T = \ell_I \sqrt{2k_2}$ .

Ce résultat de convergence donne lieu à l'interprétation suivante en terme d'énergie et d'évolution quasi-statique. En quasistatique, on néglige l'énergie cinétique et on calcule l'énergie potentielle  $\mathcal{P}^0(t, \ell)$  du film, décollé sur une longueur  $\ell$  et soumis à une ouverture  $T$  en  $x = 0$ , en supposant qu'il est en équilibre. Le taux de restitution d'énergie potentielle *statique*  $G^0(T, \ell)$  s'en déduit par dérivation. En notant  $\mathcal{S}^0(\ell)$  l'énergie de surface et  $\mathcal{E}^0(T, \ell)$  l'énergie totale quasi-statique, on obtient

$$\mathcal{P}^0(T, \ell) = \frac{T^2}{2\ell}, \quad G^0(T, \ell) = \frac{T^2}{2\ell^2}, \quad \mathcal{S}^0(\ell) = \int_0^\ell k(x) dx, \quad \mathcal{E}^0(T, \ell) = \frac{T^2}{2\ell} + \int_0^\ell k(x) dx \quad (18)$$

On voit donc que durant la première phase,  $T < \ell_I \sqrt{2k_2}$ , on a  $G(T, \ell^0(T)) = k_2$ , l'évolution limite suit la loi de Griffith. De même durant la dernière phase,  $T \geq \ell_I 2k_2 / \sqrt{2k_1}$ , on a  $G(T, \ell^0(T)) = k_1$  et l'évolution limite suit aussi la loi de Griffith. Par contre, le saut à  $T = \ell_I \sqrt{2k_2}$  vérifie :

$$\mathcal{E}^0(\ell_I \sqrt{2k_2}, \ell_I) = \mathcal{E}^0(\ell_I \sqrt{2k_2}, \ell_I k_2 / k_1) = 2k_2 \ell_I \quad (19)$$

Autrement dit, il y a *conservation de l'énergie totale quasi-statique* durant le saut. Ce faisant, on a  $G(\ell_I \sqrt{2k_2}, \ell_I k_2/k_1) < k_1$ , la longueur de décollement sautant « plus » que ce que prévoit le critère de Griffith. D'où la phase d'arrêt, le décollement n'évoluant plus tant que le taux de restitution d'énergie quasi-statique n'a pas atteint la valeur critique  $k_1$ .

Analysons l'évolution des énergies lors de la deuxième phase de la réponse dynamique. Pour l'énergie cinétique, on déduit de (13)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_1^\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_3^\epsilon) = 0, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{K}_\epsilon(T_2^\epsilon) = \frac{(k_2 - k_1)^2}{2(k_2 + k_1)} \ell_I \quad (20)$$

alors que pour l'énergie potentielle et l'énergie de surface on trouve

$$\mathcal{S}^\epsilon(T_1^\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}^\epsilon(T_1^\epsilon) = k_2 \ell_I = \mathcal{P}^0(\ell_I \sqrt{2k_2}, \ell_I) = \mathcal{S}^0(\ell_I) \quad (21)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}^\epsilon(T_3^\epsilon) = k_1 \ell_I = \mathcal{P}^0\left(\ell_I \sqrt{2k_2}, \frac{k_2}{k_1} \ell_I\right), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{S}^\epsilon(T_3^\epsilon) = (2k_2 - k_1) \ell_I = \mathcal{S}^0\left(\frac{k_2}{k_1} \ell_I\right). \quad (22)$$

On peut résumer tous les résultats obtenus en la proposition suivante :

**Proposition 3.2.** *L'évolution du décollement suit pratiquement la loi de Griffith quasi-statique jusqu'au changement de ténacité. Suit une phase de propagation durant laquelle la vitesse de décollement est du même ordre que la célérité du son. Cette phase dure le temps que l'onde de choc rétrograde engendrée par le changement de ténacité se réfléchisse au bord et rejoigne le front de propagation. Au début de cette phase, l'énergie cinétique est négligeable et les énergies potentielle et de surface sont pratiquement celles données par la réponse quasi-statique. L'énergie cinétique va augmenter rapidement pour devenir maximale au moment où l'onde de choc rétrograde se réfléchit au bord. A ce moment-là, sa valeur est du même ordre que les autres énergies. Elle va ensuite diminuer rapidement pour redevenir négligeable lorsque l'onde de choc rejoint le front de propagation. Durant cet aller-retour de l'onde de choc, une partie de l'énergie potentielle et toute l'énergie cinétique sont transformées en énergie de surface. Au moment où l'onde de choc rejoint le front de propagation, la longueur de décollement et les différentes énergies correspondent pratiquement à celles prédites par la solution quasi-statique juste après le saut. Juste après le saut, le taux de restitution d'énergie potentielle étant plus petit que la ténacité, le décollement s'arrête pour ne reprendre que lorsque le taux de restitution d'énergie potentielle devient égal à la ténacité. Le décollement suit alors pratiquement la loi de Griffith quasi-statique.*

#### 4. Conclusion et perspectives

On peut retenir de ce problème de rupture dynamique en milieu hétérogène sous vitesse de chargement faible deux résultats majeurs : (i) Contrairement à une idée répandue, on peut traiter la phase de propagation rapide du décollement en ne considérant que des grandeurs quasi-statiques à l'équilibre, l'énergie cinétique ne jouant qu'un rôle éphémère. (ii) La condition donnant la valeur du saut du décollement lors de cette phase de propagation instable n'est pas le critère de Griffith portant sur le taux de restitution d'énergie critique, mais la conservation de l'énergie totale.

Il s'agirait de généraliser ces résultats à des milieux bi- ou tri-dimensionnels et au cas où il y a un grand nombre de discontinuités. En particulier, en s'intéressant à des matériaux composites bi-couches (voire multicouches), on pourrait obtenir ainsi leur comportement effectif à rupture (dont la ténacité).

#### Références

- [1] L.B. Freund, *Dynamic Fracture Mechanics*, Cambridge Monographs on Mechanics and Applied Mathematics, Cambridge University Press, 1998.
- [2] A. Griffith, The phenomena of rupture and flow in solids, *Philos. T. Roy. Soc. A* CCXXI-A (1920) 163–198.
- [3] A. Jaubert, J.-J. Marigo, Justification of Paris-type fatigue laws from cohesive forces model via a variational approach, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 18 (1) (2006) 23–45.