

Mouvement relatif de deux bulles semblables qui évoluent dans un fluide au repos, à faibles nombres de Reynolds

Fabien Candelier¹

LEGI – (UMR 5519), BP 53, 38041 Grenoble cedex 9, France

Reçu le 24 octobre 2006 ; accepté après révision le 12 septembre 2007

Disponible sur Internet le 17 octobre 2007

Présenté par Patrick Huerre

Résumé

A l'aide d'une approche inspirée de la méthode des réflexions, nous nous intéressons au mouvement relatif de deux bulles qui évoluent dans un fluide au repos, en prenant en compte les effets d'inertie du fluide. Les résultats bien connus d'aspiration (lorsque les deux bulles se déplacent en ligne l'une au dessus de l'autre), ou encore de répulsion lorsqu'elles évoluent côte à côte sont, bien entendu, retrouvés, mais de plus, il est possible d'évaluer le mouvement relatif des deux bulles, quelles que soient leurs positions initiales. Ce résultat est alors utilisé afin d'obtenir l'ensemble des trajectoires relatives que peut adopter une bulle dont le mouvement est affecté par la présence d'une autre. *Pour citer cet article : F. Candelier, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Relative motion of two identical bubbles, rising in a fluid at rest, at small Reynolds numbers. By using an iterative approach close to the method of reflections, the relative motion of two identical bubbles rising in a fluid at rest is investigated theoretically. The classical phenomena concerning the motion of two bubbles rising in line, or the repulsion of two bubbles rising side by side are obviously recovered, but moreover, the relative motion of the two particles may be obtained whatever their initial positions, requiring that they satisfy the basis assumption made in this study. This result is therefore used in order to represent all the possible relative trajectories adopted by a particle interacting with an other one. *To cite this article: F. Candelier, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Écoulement diphasique ; Faibles nombre de Reynolds ; Interactions entre bulles

Keywords : Fluid mechanics; Diphasic flow; Small Reynolds number; Bubble interactions

Abridged English version

In this Note, the motion of two identical bubbles rising in a fluid at rest is investigated theoretically in the limit of small Reynolds numbers (see Fig. 1). The temporal evolution of their relative positions, say $X(t)$, is given by Eq. (1),

Adresse e-mail : fabien.candelier@emn.fr.

¹ Adresse actuelle : École des Mines de Nantes, La Chantrerie, 4, rue Alfred-Kastler, BP 20722, 44307 Nantes cedex 3, France.

where F_2 and F_1 correspond respectively to the force acting on bubble 2 and on bubble 1, and m_p denotes the mass of the particles. In the framework corresponding to the assumption: $1 \ll |X|/a \ll 1/Re$ where a is the radius of the bubbles and Re is the Reynolds number, these forces may be approximated by using an approach similar to the method of reflections.

In the reference frame attached to the first bubble, and because we are not interested in the close velocity field, the flow generated by the inclusion may be written under the form $V^{(1)} \simeq -U_1 + W_1(x)$, where $W_1(x)$ corresponds to the solution of the Oseen’s equation, where the bubble is treated like a point-force, and which is known analytically (see for example [4], p. 83).

In addition, it may be shown that if the conditions $S_t \ll Re$ (where S_t is the Strouhal number) and if $Re^{1/2} \gg a/|X| \gg Re$ and $(a/|X|)^{1/2} \ll 1$, are fulfilled, the leading term of the force acting on the bubble is given by (5). Also, the force acting on the first bubble is identical to one acting on the second bubble (5), excepted that the velocity U_2 must be replaced by U_1 , and that the Oseen-flow field must be evaluated at $W_1(-X)$ instead of $W_1(X)$. After an analysis of the various terms appearing in the relative motion equation, one can obtain, in this problem, the relative velocity of the bubbles. In order to determine the trajectories adopted by a bubble interacting with an other one, one can realize that this relative velocity can actually be seen as a steady Eulerian velocity field. Then, the trajectories correspond to the streamlines of this field, which can be determined by introducing the classical stream function Ψ . These trajectories are plotted on Fig. 2, together with the value of the relative velocity in the background.

1. Introduction

Dans cette étude, nous nous intéressons à l’évolution temporelle de la position relative : $X = X_2 - X_1 = Xe_1 + Ye_2 + Ze_3$, de deux bulles de rayons a (voir Fig. 1), qui évoluent, à faibles nombres de Reynolds, dans un fluide au repos, de densité ρ et de viscosités dynamique μ . Notons bien que dans la littérature, il existe de nombreuses études théoriques concernant les interactions dues aux effets d’inertie du fluide entre deux particules solides qui évoluent en ligne ou côte à côte, comme par exemple [1,2], ou plus récemment entre deux bulles [3] et que les phénomènes observés dans une telle configuration, sont de nos jours bien connus. Cependant, et malgré l’apparente simplicité d’une telle étude, il est à souligner que la prise en compte des effets d’inertie n’est pas chose aisée, et que bien souvent, ces différents travaux analytiques s’appuient sur des hypothèses supplémentaires qui reposent sur la position relative des bulles, cela afin de pouvoir utiliser l’existence de diverses symétries qui simplifient alors le problème. L’objet de cette note est donc, d’une part, d’appliquer une méthode simple qui permet de retrouver ces résultats bien connus mais cela quelle que soit la position initiale des bulles, et d’autre part, d’établir une cartographie de l’ensemble des trajectoires adoptées par une bulle qui interagit avec une autre.

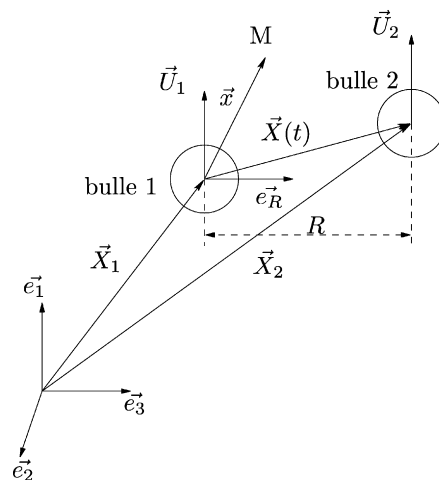


Fig. 1. Configuration de l’étude. Les deux bulles ont le même rayon (a) et sédimentent dans un fluide au repos.

Fig. 1. Configuration of this study. Bubbles have the same radius (a) and rise in a fluid at rest.

L'équation qui régit l'évolution de $\mathbf{X}(t)$ est donnée par

$$m_p \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \quad (1)$$

où m_p est la masse des bulles, et \mathbf{F}_2 et \mathbf{F}_1 sont respectivement les forces qui s'exercent sur les bulles 2 et 1. Aussi, outre le fait de supposer que les bulles évoluent à faibles nombres de Reynolds, nous sommes ici amenés à faire différentes hypothèses simplificatrices. Ainsi, dans un premier temps, nous allons restreindre cette étude au cas où

$$1 \ll |\mathbf{X}|/a \ll 1/Re \quad (2)$$

où $Re = aU/\nu \ll 1$ est le nombre de Reynolds construit à partir d'une vitesse U que l'on pourra considérer comme la vitesse d'ascension que la bulle adopterait si celle-ci était isolée. Enfin, nous nous proposons de ne retenir ici que les corrections du premier ordre en $\mathcal{O}(Re)$ et étant donné que dans une telle configuration, les bulles évoluent avec des vitesses absolues (i.e. \mathbf{U}_1 et \mathbf{U}_2), très proches l'une de l'autre, nous pouvons d'ores et déjà écrire ces vitesses de la manière suivante : $\mathbf{U}_1 = U\mathbf{e}_1 + Re\mathbf{U}'_1(t)$ et $\mathbf{U}_2 = U\mathbf{e}_1 + Re\mathbf{U}'_2(t)$ ce qui présente l'intérêt de ne faire apparaître qu'un seul nombre de Reynolds.

2. Calcul des forces qui s'exercent sur les bulles

Pour pouvoir calculer les forces qui s'appliquent sur les bulles, nous allons à présent appliquer une méthode inspirée de la méthode des réflexions. L'idée sous-jacente est donc d'estimer le champ de vitesse solution de ce problème, sous la forme d'une série $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{(1)} + \mathbf{V}^{(2)} + \dots$, où $\mathbf{V}^{(1)}$ correspond à la vitesse de l'écoulement généré par la bulle 1, sans tenir compte de l'existence de la bulle 2, puis $\mathbf{V}^{(2)}$, à la vitesse de l'écoulement généré par la bulle 2, etc. Cependant, ici nous ne nous intéresserons précisément qu'aux premiers termes de la somme, sachant que les suivants induisent des corrections en puissance successive de $a/|\mathbf{X}|$ et que celles-ci seront négligées dans cette étude.

Dans le référentiel lié à la bulle 1, l'écoulement généré par cette dernière peut se mettre sous la forme $\mathbf{V}^{(1)} \simeq -\mathbf{U}_1 + \mathbf{W}_1(\mathbf{x})$, où nous recherchons l'expression de $\mathbf{W}_1(\mathbf{x})$. Loin de la bulle, et puisque nous ne nous intéressons qu'aux corrections du premier ordre en Reynolds, il est possible de considérer que $\mathbf{W}_1(\mathbf{x})$ tend vers la solution de l'équation d'Oseen : $-\rho U \frac{\partial \mathbf{W}_1}{\partial x} = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{W}_1 + 4\pi a \mu U \mathbf{e}_1 \delta(\mathbf{x})$ où l'inclusion est perçue comme une force ponctuelle d'intensité égale et de sens opposé à la traînée de Stokes. La solution de cette équation peut être obtenue analytiquement, et dans le cadre de l'hypothèse (2), celle-ci peut être approchée, voir par exemple [4], par :

$$\mathbf{W}_1 = \frac{aU}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \mathbf{e}_1 - \frac{aU}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{e}_2 - \frac{aU}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{e}_3 \quad \text{où } \psi \simeq (r-x) + \frac{U}{8\nu} (r-x)^2 \quad (3)$$

sachant que l'on a noté $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, et $r = |\mathbf{x}|$. Notons bien que compte tenu du fait que cette étude se limite aux corrections du premier ordre en Re , la solution obtenue à l'aide de l'Éq. (3) est bien valable dans la région définie par (2), comme cela est démontré, par exemple dans [5], ou encore dans [6].

A présent, nous nous intéressons à l'expression de la force qui s'exerce dans ce contexte, sur la bulle 2, en nous inspirant par exemple de [7]. En introduisant le nombre de Stokes $S_t = a^2/(\tau_c \nu)$ où τ_c est le temps caractéristique de variation de la vitesse relative, et en supposant que la condition $S_t \ll Re$ soit vérifiée, alors il est possible de montrer que les contributions du gradient de pression de l'écoulement non perturbé, de la masse ajoutée, de la force d'histoire et de la non uniformité locale de l'écoulement (correction de Faxén, voir [8]), peuvent être négligées comparativement à la force de traînée de Stokes. Mais dans cette étude, nous cherchons à tenir compte des effets d'inertie du fluide. Pour ce faire, nous pouvons déjà écrire que pour un observateur lié à la bulle 2, il est clair qu'à l'infini, l'écoulement tend vers un écoulement uniforme donné par $-\mathbf{U}_2$ puisque la distance entre les bulles est bornée par hypothèse, et que l'écoulement de perturbation généré par la bulle 1 tend à disparaître loin des inclusions. Dans le même temps, il convient aussi noter qu'en fonction de sa position, l'écoulement perçu par la bulle 2 n'est pas uniforme, et que de ce fait, il devrait aussi exister une force de portance de type Saffman (voir [9]). Connaissant l'expression de $\mathbf{W}_1(\mathbf{x})$, il est possible de montrer que l'ordre de grandeur du taux de cisaillement au voisinage de la bulle 2 (i.e. de $\overline{\nabla} \mathbf{W}_1$) est en $\mathcal{O}(\max[Ua/|\mathbf{X}|^2; ReU/|\mathbf{X}|])$ et comparativement à la force de traînée, celle-ci est donc en $\mathcal{O}(\max[Re^{1/2}(a/|\mathbf{X}|); Re(a/|\mathbf{X}|)^{1/2}])$. De ce fait, la contribution de cette force de portance ne pourra être rigou-

reusement négligée que si sa contribution est faible devant Re , ce qui reste néanmoins compatible avec les hypothèses de départ. Dans la suite, et compte tenu de (2) nous allons maintenant limiter cette étude aux cas où

$$Re^{1/2} \gg a/|X| \gg Re \quad \text{et} \quad (a/|X|)^{1/2} \ll 1 \tag{4}$$

Dans ce cadre là, si la force qui s'exerce sur la bulle 2 est calculée à l'aide la méthode classique des développements asymptotiques raccordés, alors le problème traité sera semblable au problème d'Oseen, sauf que l'inclusion est fluide (voir [10,11]), et la force qui s'exerce sur la bulle 2 sera donc donnée par

$$\frac{F_2}{4\pi\mu aU} \simeq \left(1 + \frac{Re}{4}\right) (W_{1*}(X_*) - U_{2*}) \tag{5}$$

où les grandeurs étoilées sont sans dimensions, les vitesses ayant été réduites par U et X par a .

A ce stade, il est intéressant de noter que l'expression obtenue ici peut être comparée à celle obtenue par Legendre, Magnaudet et Mougin (2003) [3] dans le cas particulier où les deux bulles évoluent côte à côte (i.e. en posant $X_* = 0$, $R_* = (Y_*^2 + Z_*^2)^{1/2} = S$, conformément aux notations des auteurs). Ces derniers ont en effet obtenu $C_D = 2|F_2 \cdot e_1|/(\rho U^2 \pi a^2) = (16/Re_D)(1 + 1/(2S))^{-1}$ et $C_L = 2|F_2 \cdot e_R|/(\rho U^2 \pi a^2) = 1 + \mathcal{O}(Re)$, où Re_D est le nombre de Reynolds basé sur le diamètre de la bulle (i.e. $Re_D = 2Re$), et en notant que $(1 + 1/(2S))^{-1} = 1 - 1/(2S) + \mathcal{O}(S^2)$, nous retrouvons bien ici la même expression.

Revenons à présent à l'expression de la force qui s'exerce sur la bulle 1. De manière analogue à ce qui a été fait précédemment, et dans la mesure où nous ne nous intéressons qu'aux termes en $\mathcal{O}(Re)$, il est possible de montrer que la force qui s'exerce sur la bulle 1 est semblable à celle qui s'exerce sur la bulle 2, à condition d'une part, de remplacer U_2 par U_1 , et d'autre part, d'exprimer le champ de vitesse généré par la bulle 2 et qui correspond à la solution d'Oseen, non plus en X , mais en $-X$ du fait de la relativité des positions des bulles. Cela nous conduit donc à écrire : $F_1/(4\pi\mu aU) \simeq (1 + Re/4)(W_{1*}(-X_*) - U_{1*})$, et par conséquent nous allons maintenant pouvoir calculer l'évolution temporelle de $X(t)$.

Après avoir introduit la vitesse relative des bulles de la manière suivante : $Re U_r = U_2 - U_1 = Re(U'_2 - U'_1)$, et après normalisation, l'Éq. (1) peut s'écrire $(1 + Re/4)(W_{1*}(X_*) - W_{1*}(-X_*) - Re U_{r*}) \simeq 0$. En calculant explicitement les différents termes de cette dernière équation, il est possible de montrer que $W_{1*}(X_*) - W_{1*}(-X_*) = \mathcal{O}(Re)$ et compte tenu des hypothèses que nous avons faites, nous pouvons donc écrire que $Re U_{r*} \simeq W_{1*}(X_*) - W_{1*}(-X_*)$, ce qui implique que la vitesse relative de la bulle 2 par rapport à la bulle 1 est donnée, sous sa forme dimensionnelle, et dans le repère cylindrique (e_1, e_R) (voir Fig. 1), par : $U_r = -(U/4)(X(2X^2 + R^2)/|X|^3 e_1 + R^3/|X|^3 e_R)$ où $R = (Y^2 + Z^2)^{1/2}$ et $|X| = (R^2 + X^2)^{1/2}$.

3. Trajectoires relatives

Pour obtenir les trajectoires adoptées par la bulle 2 dans le référentiel lié à la bulle 1, il nous suffit de remarquer que la vitesse relative, précédemment obtenue, peut être vu comme un champ de vitesse eulérien, stationnaire de surcroît, et compte tenu du fait que nous avons négligé l'inertie des bulles, ces trajectoires sont confondues avec les lignes de courant de ce champ. Après avoir introduit la fonction de courant classique $\Psi(X, R)$ (écrite en coordonnées cylindrique), il est alors simple de montrer que nous avons : $-X(2X^2 + R^2) \frac{\partial \Psi}{\partial X} + R^3 \frac{\partial \Psi}{\partial R} = 0$. Cette équation admet une solution générale de la forme $\Psi(X, R) = \mathcal{F}(XR^2/|X|)$, où $\mathcal{F}(\cdot)$ est une fonction arbitraire. De ce fait, nous pouvons en déduire que ces trajectoires correspondent à l'ensemble des courbes qui vérifie $X(Y^2 + Z^2)/(X^2 + Y^2 + Z^2)^{1/2} = A$, où A est une constante dont la valeur peut être calculée en fonction des coordonnées (X_0, Y_0, Z_0) de la position initiale de la bulle 2. Certaines d'entre elles sont représentées sur la Fig. 2, avec, en arrière plan, la répartition des valeurs de la vitesse de la bulle 2 par rapport à la bulle 1.

4. Conclusion

A l'issue de cette étude, nous pouvons remarquer que cette approche permet d'obtenir l'expression de la force qui s'exerce sur une bulle en prenant en compte au premier ordre, les interactions de sillages.

Par ailleurs, il est à noter que ces résultats peuvent servir de cas asymptotique pour tester les modèles de fermeture des équations impliquées dans la modélisation dite hybride des écoulements diphasiques (voir par exemple [12]) où l'une des grandeurs clé est la probabilité conditionnelle de présence d'une bulle connaissant la position d'une autre

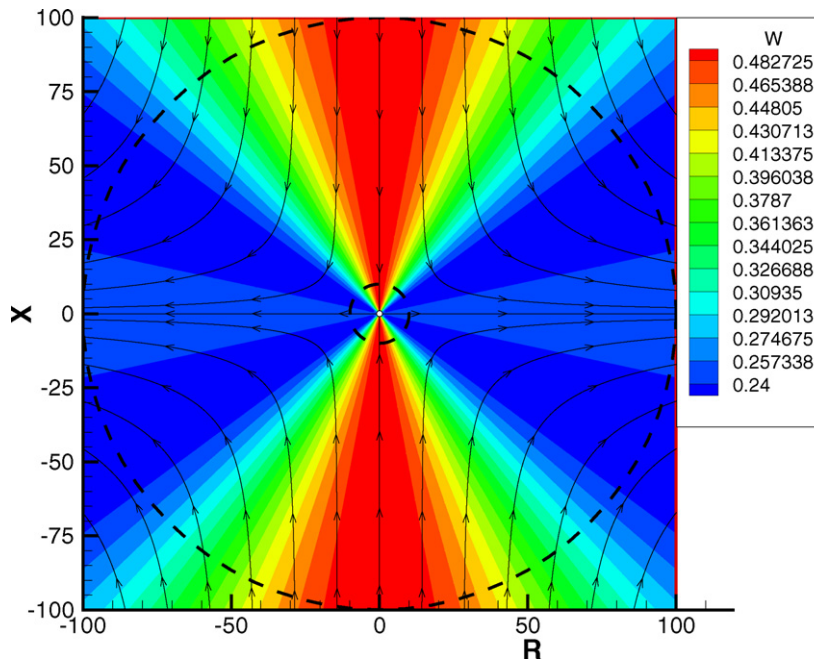


Fig. 2. Tracé des trajectoires relatives des bulles, avec en arrière plan, la valeur de la vitesse relative. Dans cette illustration, $Re = 10^{-2}$. Le grand cercle et le petit cercle en pointillé ont respectivement des rayons de $1/Re$ et de $1/Re^{1/2}$. L'étude est supposée valable dans la zone comprise entre ces deux cercles.

Fig. 2. Sketch of the relative trajectories together with the relative velocity in the background. In this illustration, $Re = 10^{-2}$ and the radius of the dashed circles corresponds to $1/Re$ and to $1/Re^{1/2}$. This investigation is expected to be valid into the area lying between the two dashed circles.

bulle. En effet, si cette probabilité est supposée proportionnelle au temps de présence moyen d'une bulle dans une certaine région de l'espace, celle-ci doit donc être inversement proportionnelle à la valeur de la vitesse relative. Par conséquent, les zones en rouges sur le graphe 2 qui correspondent aux zones où la vitesse relative est maximale, devraient coïncider avec les régions où cette probabilité conditionnelle est minimale.

Références

- [1] C.W. Oseen, Hydrodynamik, Akademische Verlag, Leipzig, 1927.
- [2] P. Vasseur, R.G. Cox, The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid, *J. Fluid Mech.* 80 (1977) 561–591.
- [3] D. Legendre, J. Magnaudet, G. Mougou, Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid, *J. Fluid Mech.* 497 (2003) 133–166.
- [4] J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds Hydrodynamics*, Kluwer Academic, London, 1983, pp. 82–83.
- [5] L. Landau, E. Lifchitz, *Physique théorique*, vol. 6, Edition Mir, 1989, pp. 93–94.
- [6] I. Proudman, J.R.A. Pearson, Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and circular cylinder, *J. Fluid Mech.* 2 (1957) 385–400.
- [7] M.R. Maxey, J.J. Riley, Equation of motion for a small rigid sphere in a nonuniform flow, *Phys. Fluids* 26 (4) (1983) 883–889.
- [8] J.M. Rallison, Note on the Faxén relations for a particle in a Stokes flow, *J. Fluid Mech.* 88 (1978) 529–533.
- [9] P.G. Saffman, The lift on a small sphere in a viscous flow, part 2, *J. Fluid Mech.* 22 (1965) 385–400 (and corrigendum 1968).
- [10] D. Legendre, J. Magnaudet, A note on the lift force on a spherical bubble or drop in a low-Reynolds-number shear flow, *Phys. Fluids* 9 (11) (1997) 3572–3574.
- [11] J. Magnaudet, Small inertial effects on a spherical bubble, drop or particle moving near a wall in a time dependent linear flow, *J. Fluid Mech.* 485 (2003) 115–142.
- [12] A. Cartellier, Screening mechanisms and induced agitation in bubbly flows at finite particle Reynolds numbers: experiments and preliminary modeling attempts using an hybrid approach, *Ercofac Bull.* 56 (2003) 27–39.