

# On the concept of reduced difference in differential GNSS

André Lannes

*L2S, Supélec, 3, rue Joliot-Curie, 91192 Gif-sur-Yvette cedex, France*

Received 31 January 2007; accepted after revision 18 September 2007

Available online 30 October 2007

Presented by Évariste Sanchez-Palencia

## Abstract

In differential GNSS (Global Navigation Satellite System), the clock errors of satellites  $s_1, s_2, \dots, s_n$  are eliminated by forming for each type of data  $\psi$  the single differences  $\psi^i := \psi(r_2, s_i) - \psi(r_1, s_i)$ ; here,  $r_1$  denotes the reference receiver, and  $r_2$  that of the user. In the traditional approach, one then gets rid of the receiver clock errors by considering the double differences  $\psi_j^i := \psi^i - \psi^j$  where  $j$  is the subscript of the reference satellite. The aim of this Note is to present an equivalent way of proceeding based on the ‘reduced differences’  $\psi_0^i := \psi^i - \psi^0$  where  $\psi^0$  denotes the mean value of the  $\psi^i$ ’s. The interest of this ‘barycentric’ approach is to reveal remarkable properties which were hidden hitherto. The main application concerns the identification of outliers among which the cycle slips in particular. **To cite this article:** *A. Lannes, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

## Résumé

**Sur le concept de différence réduite en GNSS différentiel.** Dans les techniques différentielles GNSS (Global Navigation Satellite System), on élimine les erreurs d’horloge des satellites  $s_1, s_2, \dots, s_n$  en formant pour chaque type de donnée  $\psi$  les simples différences  $\psi^i := \psi(r_2, s_i) - \psi(r_1, s_i)$ ;  $r_1$  désigne ici le récepteur de référence, et  $r_2$  celui de l’utilisateur. Dans l’approche traditionnelle, on se débarrasse ensuite des erreurs d’horloge des récepteurs en considérant les doubles différences  $\psi_j^i := \psi^i - \psi^j$  où  $j$  est l’indice du satellite de référence. L’objet de cette Note est de présenter une façon équivalente de procéder fondée sur les « différences réduites »  $\psi_0^i := \psi^i - \psi^0$  où  $\psi^0$  désigne la valeur moyenne des  $\psi^i$ . L’intérêt de cette approche « barycentrique » est de révéler des propriétés remarquables qui étaient cachées jusqu’ici. La principale application concerne l’identification des données aberrantes dont les sauts de cycles en particulier. **Pour citer cet article :** *A. Lannes, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

**Keywords:** Signal processing; GNSS; DGPS; DIA

**Mots-clés :** Traitement du signal ; GNSS ; DGPS ; DIA

## Version française abrégée

### Introduction

Les systèmes de positionnement global sont fondés sur l’Éq. (1) pour les données de code à l’époque  $t$ , et sur l’Éq. (2) pour les données de phase des ondes porteuses à cette même époque [1]. Dans ces équations, qui sont

*E-mail address:* [Andre.Lannes@cerfacs.fr](mailto:Andre.Lannes@cerfacs.fr).

exprimées en unités de longueur,  $(r, s)$  est un couple récepteur–satellite quelconque, et  $\nu$  l'indice de la fréquence de l'onde porteuse ( $\lambda_\nu$  est la longueur d'onde correspondante);  $\rho_t(r, s)$  est la distance entre le satellite  $s$  (à l'instant  $t - \tau$  de l'émission du signal) et le récepteur  $r$  (à l'instant  $t$  de sa réception). Les entiers relatifs  $a_\nu(r, s) \equiv N_\nu(r, s)$  sont les ambiguïtés entières de l'information de phase. Les retards instrumentaux et les erreurs d'horloge qui à  $(\nu, t)$  fixé ne dépendent que de  $r$  ou  $s$  sont regroupés dans les termes d'erreur  $dt_{\nu,t}(r)$ ,  $dt_{\nu,t}(s)$  pour le code, et  $\delta t_{\nu,t}(r)$ ,  $\delta t_{\nu,t}(s)$  pour la phase;  $\varphi_{\nu,0}(r)$  et  $\varphi_{\nu,0}(s)$  sont des phases initiales (exprimées en cycles) relatives au récepteur  $r$  et au satellite  $s$ , respectivement.

Pour en venir aux objectifs de cette Note, portons maintenant notre attention sur l'Éq. (2) en mode monofréquence, i.e., Éq. (3). Désignons à présent par  $\psi^i$  les simples différences (SD) en  $\psi : \psi^i := \psi(r_2, s_i) - \psi(r_1, s_i)$ ;  $r_1$  est le récepteur de référence, et  $r_2$  celui de l'utilisateur;  $s_1, s_2, \dots, s_n$  sont les satellites impliqués dans le processus observationnel. L'Éq. (3) entraîne alors l'Éq. (5). On se débarrasse ainsi des termes d'erreur satellitaire. Dans l'approche traditionnelle du GNSS différentiel, on se débarrasse ensuite des termes d'erreur récepteur en considérant les  $n - 1$  doubles différences (DD)  $\psi_j^i := \psi^i - \psi^j$  ( $i \neq j$ ), où  $j$  est l'indice d'un satellite de référence. On obtient ainsi l'Éq. (7) où l'on dit que les  $a_j^i$  sont les ambiguïtés entières des données de phase DD.

Dans l'approche présentée dans cette Note, nous considérons une façon totalement homogène de se débarrasser des termes d'erreur récepteur. L'idée est de considérer les  $n$  « différences réduites » (RD)  $\psi_0^i := \psi^i - \psi^0$  où  $\psi^0$  désigne la valeur moyenne des  $\psi^i$  [Éqs. (8) et (9)]. On obtient alors l'Éq. (10) où l'on dit que les  $a_0^i$  sont les ambiguïtés rationnelles des données de phase RD (ces nombres ne sont généralement pas des entiers).

### Equivalence des approches DD et RD

Les simples différences  $\psi^i$  définissent un vecteur de  $\mathcal{H} := \mathbb{R}^n$  noté  $\psi$  (cf. Éq. (4) et Fig. 1). Dans cette Note, pour éviter toute confusion, la fonction  $\psi(r, s)$  n'est jamais désigné par le symbole  $\psi$  isolé.

Désignons à présent par  $\mathcal{K}_0$  le sous-espace de  $\mathcal{H}$  défini par la relation (11). Le supplément orthogonal de  $\mathcal{K}_0$  dans  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{K}_0^\perp$ , est l'espace des vecteurs  $\psi \in \mathcal{H}$  dont les composantes  $\psi^i$  sont identiques; c'est un espace unidimensionnel;  $\mathcal{K}_0$  est donc de dimension  $n - 1$ . En ce qui concerne l'approche RD, l'on a  $\psi_0 = Q_0\psi$  où  $Q_0$  est la projection orthogonale  $Q_0$  de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{K}_0$  [cf. Eqs. (8), (9) et voir Fig. 1].

Dans l'approche DD, on est conduit à considérer le sous-espace  $\mathcal{K}_j$  de  $\mathcal{H}$  défini par la relation (12). Cet espace, de dimension  $n - 1$ , dépend du choix du satellite de référence. L'on a alors  $\psi_j = Q_j\psi$  où  $Q_j$  est la projection oblique de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{K}_j$  parallèlement à  $\mathcal{K}_0^\perp$  (voir Fig. 1).

Les points  $a_j \in \mathcal{K}_j$  dont les composantes  $a_j^i$  (dans la base standard de  $\mathcal{K}_j$ ) sont des entiers relatifs forment un réseau de rang  $n - 1$  noté  $\mathcal{L}_j$ : le réseau d'ambiguïté DD. Sa projection dans  $\mathcal{K}_0$  est le réseau d'ambiguïté RD des points  $a_0$  (voir Fig. 1).

Les espaces  $\mathcal{K}_j$  et  $\mathcal{K}_0$  sont isomorphes. Plus précisément, l'opérateur  $R$  défini par la relation (13) envoie  $\mathcal{K}_j$  sur  $\mathcal{K}_0$ , et  $\mathcal{L}_j$  sur  $\mathcal{L}_0$ .

Les problèmes de moindres carrés à gérer conduisent à définir dans  $\mathcal{K}_j$  et  $\mathcal{K}_0$  les produits scalaires (15). L'on obtient alors la propriété exprimée via les Éqs. (16) et (17). Cette propriété montre finalement, qu'en ce qui concerne les problèmes à gérer, les approches DD et RD sont bien équivalentes, mais que l'approche RD est « l'approche naturelle » du problème. De plus, dans le cas limite important où la matrice de covariance des données de simple différence est diagonale, la quantité  $q(\vartheta_0)$  définie dans la relation (16) se décompose en composantes satellitaires. Par exemple, quand la variance de  $\psi^i$  ne dépend pas de  $i$ , cette propriété s'explique comme indiqué dans l'Éq. (18). Lorsqu'on exprime ce résultat en fonction des doubles différences  $\psi_j^i$ , la décomposition euclidienne en question est totalement occultée.

### Assimilation des données en mode RD

Dans l'énoncé des problèmes de positionnement global, la variable de position à l'époque  $t$ ,  $\xi_t$ , apparaît via la linéarisation des quantités  $\rho_t^i$  par rapport à la variable de position du récepteur  $r_2$  (cf. Éq. (19)). En mode monofréquence, la variable d'état du problème est  $x_t = (\alpha, \xi_t)$  avec  $\alpha \equiv a_0$  dans  $\mathcal{K}_0$ ; « l'ambiguïté flottante »  $\alpha$  ne dépend pas de  $t$ . Soit  $y_t$  le vecteur des données  $(Q_0 p_t, Q_0 \phi_t)$  modifié par les termes induits par la linéarisation. La relation entre  $x_t$  et  $y_t$  est alors de la forme  $y_t = A_t x_t$  (plus des termes d'erreur) où  $A_t$  est un opérateur linéaire. Dans le processus

d'assimilation des données, la solution des moindres carrés  $\hat{x}$  s'obtient via des opérations de filtrage RLS [2] (voir le contexte de l'Éq. (20)). La « solution flottante »  $\hat{\alpha}$  et sa matrice de covariance  $C_{\hat{\alpha}}$  sont ainsi progressivement affinées. A chaque époque, on cherche alors le point  $\check{\alpha}$  de  $\mathcal{L}_0$  le plus proche de  $\hat{\alpha}$  [3], la distance étant définie en relation avec  $C_{\hat{\alpha}}$ . Comme indiqué dans la version anglaise de cette Note, le problème de résolution d'ambiguïté auquel on est alors confronté se ramène à celui de l'approche DD habituelle. Quand dans le processus d'assimilation des données,  $\check{\alpha}$  devient compatible avec le modèle (au bruit près), l'on dit que les ambiguïtés sont fixées. Les positions sont alors affinées via des processus LS.

Pour éviter que des erreurs de modélisation, comme des biais sur les données SD, se propagent sans détection et correction sur les ambiguïtés, des méthodes spécifiques ont été développées (e.g., [4]). En mode RLS, l'approche de ces problèmes est fondée sur une analyse du « résidu effectif »  $w_k \equiv w_{t_k}$  [Éq. (21)]. En omettant l'indice  $k$ , désignons à présent par  $w_p$  et  $w_\phi$  les composantes de code et de phase de  $w$ . Comme indiqué dans la relation (22), la taille quadratique de  $w$  est une somme de contributions satellitaires de type code ou phase. Quand cette taille est trop importante, au dessus d'un seuil défini par des critères statistiques, on cherche alors à identifier un biais SD global  $\beta$  de la forme (23), où les ensembles de « données aberrantes »  $\Omega_p$  et  $\Omega_\phi$  sont de petits jeux d'entiers choisis dans l'intervalle  $[1, n]$ . Le problème est de construire  $\Omega_p$  et  $\Omega_\phi$  tout en obtenant des estimations des biais correspondants  $\beta_{i_p}$  et  $\beta_{i_\phi}$ . Il s'agit alors de résoudre, au sens des moindres carrés, l'équation  $M\beta = w$  où  $M$  est défini dans l'Éq. (24). La spécificité de ce problème réside dans le fait qu'on doit alors choisir soigneusement les vecteurs colonnes de  $M$ , les  $f_{i_p}$  et  $f_{i_\phi}$ . En pratique, ce problème se résout via un processus d'orthogonalisation de Gram–Schmidt [2] particulier qui est interrompu dès que les données corrigées sont compatibles avec le modèle (au bruit près). Le résidu  $w$  est ainsi réduit progressivement. Le processus d'identification correspondant tire alors profit de l'Éq. (22) de façon récursive. Tous ces points ont été validés sur des données GPS réelles (en modes bi- et mono-fréquence) dans le cadre d'une action européenne intitulée HPLE<sup>1</sup> (cf. Tableau 1).

### Commentaire conclusif

Les approches DD et RD sont équivalentes. En particulier, d'un point de vue technique, les problèmes d'ambiguïtés à résoudre sont les mêmes. L'approche RD est néanmoins préférable pour les raisons suivantes. Il est bien connu que les résultats de l'approche DD ne dépendent pas du satellite de référence. Le cadre théorique homogène de l'approche RD est donc bien adapté au problème. Par exemple, dans l'approche RD, la disparition du satellite de référence de l'approche DD se gère comme celle d'un satellite quelconque. Mais l'intérêt majeur de cette nouvelle approche est de révéler des propriétés remarquables qui étaient cachées jusque là (cf. Éqs. (16) à (18)). Comme indiqué en fin de Section 3, la principale application concerne l'identification des données aberrantes, et en particulier les sauts de cycles.

## 1. Introduction

The global positioning systems are based on the following equations. For each frequency  $f_\nu$ , for each receiver–satellite pair  $(r, s)$ , and at each epoch  $t$ , the code and carrier-phase data are respectively of the form (e.g., Sect. 14 in [1])

$$p_{\nu,t}(r, s) = \rho_t(r, s) + c[dt_{\nu,t}(r) - dt_{\nu,t}(s)] + \epsilon_{\nu,t}(r, s) \quad (1)$$

$$\phi_{\nu,t}(r, s) = \rho_t(r, s) + c[\delta t_{\nu,t}(r) - \delta t_{\nu,t}(s)] + \lambda_\nu[\varphi_{\nu,0}(r) - \varphi_{\nu,0}(s)] + \lambda_\nu N_\nu(r, s) + \varepsilon_{\nu,t}(r, s) \quad (2)$$

In these equations, which are expressed in length units,  $\rho_t(r, s)$  is the receiver–satellite range: the distance between satellite  $s$  (at the time  $t - \tau$  where the signal is emitted) and receiver  $r$  (at the time  $t$  of its reception). Clearly, the  $\lambda_\nu$ 's denote the wavelengths of the carrier waves; the rational integers  $N_\nu(r, s)$  are the integer carrier-phase ambiguities. The instrumental delays and clock errors that for a given  $(\nu, t)$  depend only on  $r$  and  $s$  are lumped together in the

<sup>1</sup> Le projet HPLE (High Precision Local Element) a été co-financé par l'Autorité Européenne de Surveillance GNSS avec des fonds du Sixième Programme-Cadre de la Communauté Européenne pour la recherche et le développement technologique, le principal instrument communautaire de financement de la recherche. L'Autorité Européenne de Surveillance GNSS est l'agence de la Commission Européenne chargée de la mise en place de Galileo, le futur système européen de navigation par signal satellitaire.

receiver and satellite error terms  $dt_{v,t}(r)$ ,  $dt_{v,t}(s)$  for the code, and  $\delta t_{v,t}(r)$ ,  $\delta t_{v,t}(s)$  for the phase;  $\varphi_{v,0}(r)$  and  $\varphi_{v,0}(s)$  are the initial phases (expressed in cycles) in receiver  $r$  and satellite  $s$ , respectively. At this introductory level, we consider that the code and phase errors  $\epsilon_{v,t}(r, s)$  and  $\varepsilon_{v,t}(r, s)$  include both noise and model errors.

For our present purposes, we now concentrate on Eq. (2) in the single-frequency mode:

$$\phi_t(r, s) = \rho_t(r, s) + c[\delta t_t(r) - \delta t_t(s)] + \lambda[\varphi_0(r) - \varphi_0(s)] + \lambda a(r, s) + \varepsilon_t(r, s) \quad (a := N) \tag{3}$$

Let  $r_1$  be the reference receiver, and  $r_2$  be that of the user. Let us now denote by  $s_1, s_2, \dots, s_n$  the satellites involved in the observational process. A quantity such as

$$\psi^i := \psi(r_2, s_i) - \psi(r_1, s_i) \tag{4}$$

is then referred to as a single difference (SD) in  $\psi$ . By using this notation, Eq. (3) then yields

$$\phi_t^i = \rho_t^i + c[\delta t_t(r_2) - \delta t_t(r_1)] + \lambda[\varphi_0(r_2) - \varphi_0(r_1)] + \lambda a^i + \varepsilon_t^i \quad (a^i \in \mathbb{Z}) \tag{5}$$

One thus gets rid of the satellite error terms. The  $a^i$ 's are the integer ambiguities of the SD phase data.

### 1.1. Double differences

In the traditional approach to differential GNSS, one then gets rid of the receiver error terms by forming the double differences (DD) in  $\psi$

$$\psi_j^i := \psi^i - \psi^j \quad (i \neq j) \tag{6}$$

where  $j$  is the index of the reference satellite. Indeed, by subtracting from Eq. (5), term by term, its expression for  $i = j$ , the reference equation is then of the form

$$\phi_{t;j}^i = \rho_{t;j}^i + \lambda a_{t;j}^i + \varepsilon_{t;j}^i \quad (a_{t;j}^i \in \mathbb{Z}) \tag{7}$$

The  $a_{t;j}^i$ 's are the integer ambiguities of the DD phase data.

### 1.2. Reduced differences

In the approach presented in this Note, we consider a homogeneous way of eliminating the receiver error terms. The idea is to consider the ‘reduced differences’ (RD) in  $\psi$

$$\psi_0^i := \psi^i - \psi^0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{8}$$

where  $\psi^0$  denotes the mean value of the  $\psi^i$ 's:

$$\psi^0 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi^i \tag{9}$$

Clearly, this barycentric value can be regarded as a ‘virtual single difference’ associated with a ‘virtual reference satellite’  $s_0$ . Subtracting from Eq. (5), term by term, its expression in terms of mean values, the reference equation is then of the form

$$\phi_{t;0}^i = \rho_{t;0}^i + \lambda a_{t;0}^i + \varepsilon_{t;0}^i \quad (a_{t;0}^i \in \mathbb{Q}) \tag{10}$$

The  $a_{t;0}^i$ 's are the rational ambiguities of the RD phase data. (In general, these ambiguities are not rational integers.)

## 2. Equivalence of the DD and RD approaches

The single differences  $\psi^i$  define a vector of  $\mathbb{R}^n$  denoted by  $\psi$  (see Eq. (4) and Fig. 1). In this Note, to avoid any confusion, the function  $\psi(r, s)$  is never denoted by the isolated symbol  $\psi$ . Clearly, the  $\psi^i$ 's are the components of  $\psi$  in the standard basis  $\mathcal{B}$  of  $\mathcal{H} := \mathbb{R}^n$ . In this context, we say that  $\mathcal{H}$  is the ‘SD data space’.

Let us now denote by  $\mathcal{K}_0$  the following subspace of  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{K}_0 := \left\{ \vartheta \in \mathcal{H} : \sum_{i=1}^n \vartheta^i = 0 \right\} \tag{11}$$

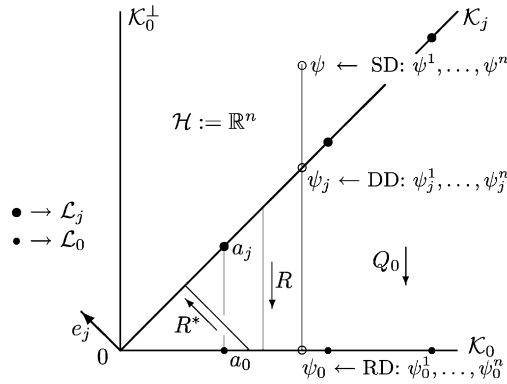


Fig. 1. Geometrical illustration (for  $n = 2$ ) of the equivalence of the DD and RD approaches. Here,  $e_j$  is the basis vector associated with the reference satellite  $s_j$ . Note that  $\psi_j^j = 0$  and  $\sum_{i=1}^n \psi_0^i = 0$  (see text).

Fig. 1. Illustration géométrique (pour  $n = 2$ ) de l'équivalence des approches DD et RD. Dans cette représentation,  $e_j$  est le vecteur de base associé au satellite de référence  $s_j$ . Noter que  $\psi_j^j = 0$  et  $\sum_{i=1}^n \psi_0^i = 0$  (voir le texte).

The space of vectors  $\vartheta \in \mathcal{H}$  whose components  $\vartheta^i$  are identical is the orthogonal complement of  $\mathcal{K}_0$  into  $\mathcal{H}$ :  $\mathcal{K}_0^\perp$ ; it's a one-dimensional space. As a result,  $\mathcal{K}_0$  is of dimension  $n - 1$ . With regard to the RD approach, we have  $\psi_0 = Q_0\psi$  where  $Q_0$  is the orthogonal projection of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{K}_0$ . Indeed, the components of  $Q_0\psi$  are obtained by subtracting from each component of  $\psi$  the mean value of its components [see Eqs. (8), (9) and Fig. 1]. The components of  $\psi_0$  are the  $n$  reduced differences  $\psi_0^i$ ;  $\mathcal{K}_0$  can therefore be referred to as the 'RD data space'.

In the DD approach, one is led to consider the  $n - 1$  dimensional subspace of  $\mathcal{H}$

$$\mathcal{K}_j := \{\vartheta \in \mathcal{H}: \vartheta^j = 0\} \tag{12}$$

We then have  $\psi_j = Q_j\psi$  where  $Q_j$  is the oblique projection of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{K}_j$  along  $\mathcal{K}_0^\perp$ . Indeed, the components of  $Q_j\psi$  are obtained by subtracting from each component of  $\psi$  the value of its  $j$ th component [see Eq. (6) and Fig. 1]. Let  $\mathcal{B}_j$  be the standard basis of  $\mathcal{K}_j \sim \mathbb{R}^{n-1}$ . The components of  $\psi_j$  in  $\mathcal{B}_j$  are the  $n - 1$  double differences  $\psi_j^i$ ;  $\mathcal{K}_j$  can therefore be regarded a 'DD data space'.

The points  $a_j$  of  $\mathcal{K}_j$  whose components  $a_j^i$  (in  $\mathcal{B}_j$ ) are rational integers form a lattice of rank  $n - 1$ : the 'DD ambiguity lattice'  $\mathcal{L}_j$ ; clearly  $\mathcal{L}_j = \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{K}_j$ . The projection of  $\mathcal{L}_j$  onto  $\mathcal{K}_0$  (which is also that of  $\mathbb{Z}^n$ ) is the 'RD ambiguity lattice'  $\mathcal{L}_0$  (see Fig. 1).

The DD and RD spaces are isomorphic. More precisely, the restriction of  $Q_0$  to  $\mathcal{K}_j$ , the operator

$$R: \mathcal{K}_j \rightarrow \mathcal{K}_0, \quad R\vartheta_j := Q_0\vartheta_j \tag{13}$$

maps  $\mathcal{K}_j$  onto  $\mathcal{K}_0$ , and  $\mathcal{L}_j$  onto  $\mathcal{L}_0$  (see Fig. 1). Its inverse is the operator

$$S: \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_j, \quad S\vartheta_0 := Q_j\vartheta_0 \tag{14}$$

The components of a point  $\vartheta_0$  of  $\mathcal{K}_0$  in  $R\mathcal{B}_j$  (the projection of basis  $\mathcal{B}_j$  onto  $\mathcal{K}_0$ ) are the  $n - 1$  DD components  $\vartheta_j^i$  of  $\vartheta_j = S\vartheta_0$ . The components of  $a_0$  in  $R\mathcal{B}_j$  are therefore the  $n - 1$  integer ambiguities  $a_j^i$  of  $a_j = Sa_0$ . Clearly, the components of a point  $a_0$  of  $\mathcal{L}_0$  in  $\mathcal{B}$  are the  $n$  rational ambiguities  $a_0^i$ .

In what follows,  $(\cdot)$  denotes the standard inner product on  $\mathbb{R}^n$ . Let  $T$  now be the orthogonal projection of  $\mathcal{H}$  onto  $\mathcal{K}_j$  restricted to  $\mathcal{K}_0$ . For any  $\vartheta'_j$  in  $\mathcal{K}_j$  and any  $\vartheta_0$  in  $\mathcal{K}_0$ , we have  $(\vartheta'_j \cdot \vartheta_0) = (R\vartheta'_j \cdot \vartheta_0) = (\vartheta'_j \cdot T\vartheta_0)$ . Denoting by  $R^*$  the adjoint of  $R$ , we therefore have:  $R^* = T$  (see Fig. 1). Clearly,  $(R^*\vartheta_0)^i = \vartheta_0^i$  if  $i \neq j$ ,  $(R^*\vartheta_0)^j = 0$ . As  $S$  is the inverse of  $R$ ,  $S^*$  is the inverse of  $R^*$ :  $(S^*\vartheta_j)^i = \vartheta_j^i$  if  $i \neq j$ ,  $(S^*\vartheta_j)^j = -\sum_{i \neq j} \vartheta_j^i$ .

Let  $C_{\psi_j}$  be the covariance matrix (expressed in  $\mathcal{B}_j$ ) of the DD data  $\psi_j$ . Likewise, let  $C_{\psi_0}$  be the covariance matrix (expressed in  $\mathcal{B}$ ) of the RD data  $\psi_0$ . In what follows,  $C_{\psi_j}$  is the operator on  $\mathcal{K}_j$  induced by  $C_{\psi_j}$ . The operator  $C_{\psi_0}$  is defined similarly. An example is to be found further on, in the context of Eq. (18). As  $C_{\psi_j} = SC_{\psi_0}S^*$ , we have  $C_{\psi_j}^{-1} = R^*C_{\psi_0}^{-1}R$ .

With regard to the least-squares problems to be dealt with, we are then led to introduce the inner products

$$(\vartheta_j | \vartheta'_j)_{\mathcal{K}_j; \psi} := (\vartheta_j \cdot C_{\psi_j}^{-1} \vartheta'_j), \quad (\vartheta_0 | \vartheta'_0)_{\mathcal{K}_0; \psi} := (\vartheta_0 \cdot C_{\psi_0}^{-1} \vartheta'_0) \tag{15}$$

As  $C_{\psi_j}^{-1} = R^* C_{\psi_0}^{-1} R$ , we have  $(\vartheta_j | \vartheta'_j)_{\mathcal{K}_j; \psi} = (\vartheta_j \cdot R^* C_{\psi_0}^{-1} R \vartheta'_j) = (R \vartheta_j \cdot C_{\psi_0}^{-1} R \vartheta'_j) = (\vartheta_0 | \vartheta'_0)_{\mathcal{K}_0; \psi}$  (for  $\vartheta_0 = R \vartheta_j$  and  $\vartheta'_0 = R \vartheta'_j$ ). Introducing the quadratic form

$$q : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(\vartheta_0) := \|\vartheta_0\|_{\mathcal{K}_0; \psi}^2 \tag{16}$$

we therefore have

$$\|\vartheta_j\|_{\mathcal{K}_j; \psi}^2 = q(\vartheta_0) \quad (\text{for } \vartheta_0 = R \vartheta_j) \tag{17}$$

This finally shows that with regard to the problems to be solved, the DD and RD approaches are effectively equivalent, but that the RD approach is the ‘natural approach’ to the problem. Moreover, in the important limiting case where the covariance matrix  $C_\psi$  of the SD data of type  $\psi$  is diagonal,  $q(\vartheta_0)$  can be expanded in ‘satellite components’. For example, in the special case where  $C_\psi = 2\sigma_\psi^2 \mathbf{I}$  (the identity matrix), we have  $C_{\psi_0} = 2\sigma_\psi^2 Q_0$  where  $Q_0$  is the matrix of  $Q_0$  expressed in  $\mathcal{B}$ . We then have  $C_{\psi_0} = 2\sigma_\psi^2 I_0$  where  $I_0$  is the identity operator on  $\mathcal{K}_0$ . Consequently,

$$q(\vartheta_0) = \frac{1}{2\sigma_\psi^2} \sum_{i=1}^n |\vartheta_0^i|^2 \tag{18}$$

When this result is expressed in terms of the double differences  $\vartheta_j^i$ , this Euclidean expansion is completely hidden.

### 3. Data assimilation in RD mode

In the statement of the global positioning problems, the position variable at epoch  $t$ ,  $\xi_t$ , appears via the linearization of the quantities  $\rho_t^i$  with respect to the position variable  $\xi_{2;t}$  of receiver  $r_2$ :  $\xi_{2;t} = \tilde{\xi}_{2;t} + \xi_t$ . As  $\rho_t^i = \rho_t(r_2, s_i) - \rho_t(r_1, s_i)$ , the linear expansion of  $\rho_t^i$  is of the form

$$\rho_t^i = \tilde{\rho}_t^i + (u_t^i \cdot \xi_t)_{\mathbb{R}^3} \tag{19}$$

Here,  $u_t^i$  is the unitary vector that characterizes the direction  $s_i \rightarrow r_2$  of the received signal at epoch  $t$ . In single-frequency mode, the state vector of the problem is  $x_t = (\alpha, \xi_t)$  with  $\alpha \equiv a_0$  in  $\mathcal{K}_0$ . Clearly, the ‘float ambiguity’  $\alpha$  does not depend on  $t$ .

Let  $y_t$  be the RD data vector  $(Q_0 p_t, Q_0 \phi_t)$  modified by the terms induced by the linearization. The relation between  $x_t$  and  $y_t$  is then of the form  $y_t = A_t x_t$  (plus error terms) where  $A_t$  is a linear operator.

In the data assimilation process, the least-squares solution  $\hat{x}$  is obtained through RLS filtering operations [2] of the form

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k v_k, \quad v_k = y_k - A_k \hat{x}_{k|k-1} \tag{20}$$

where  $\hat{x}_{k|k} := (\hat{\alpha}_k, \hat{\xi}_k)$  and  $\hat{x}_{k|k-1} := (\hat{\alpha}_{k-1}, 0)$ . Here,  $K_k$  is the RLS filter at epoch  $t_k$ ;  $v_k$  is the ‘predicted residue’ for that epoch. The float solution  $\hat{\alpha}$  is thus refined together with its covariance matrix  $C_{\hat{\alpha}}$ . At each epoch, one then searches for the point  $\check{\alpha}$  of  $\mathcal{L}_0$  closest to  $\hat{\alpha}$  [3], the distance being that induced by the quadratic form on  $\mathcal{K}_0$ :  $\vartheta_0 \mapsto (\vartheta_0 \cdot C_{\hat{\alpha}}^{-1} \vartheta_0)$ . This amounts to solving the nearest-lattice-point problem of the DD approach. Indeed, the problem is then to search for the point of  $\mathcal{L}_j$  closest to  $S\hat{\alpha}$  in  $\mathcal{K}_j$  (for any  $j$ ), the distance being that induced by the quadratic form on  $\mathcal{K}_j$ :  $\vartheta_j \mapsto (\vartheta_j \cdot C_{S\hat{\alpha}}^{-1} \vartheta_j)$ ; but  $C_{S\hat{\alpha}} = S C_{\hat{\alpha}} S^*$ , hence  $C_{S\hat{\alpha}}^{-1} = R^* C_{\hat{\alpha}}^{-1} R$ , and the equivalence in question since  $(\vartheta_j \cdot R^* C_{\hat{\alpha}}^{-1} R \vartheta_j) = (\vartheta_0 \cdot C_{\hat{\alpha}}^{-1} \vartheta_0)$ .

When in the data assimilation process,  $\check{\alpha}$  becomes consistent with the model (up to the noise), the ambiguities are said to be fixed. The positions  $\hat{\xi}_k$  are then refined via LS processes in which the ambiguities are fixed at these values.

To prevent that model errors, such as biases on the SD data, propagate undetected into the ambiguity solution, particular methods have been developed to identify them and to correct for their effects (e.g., [4]). The RLS approach to these problems of detection, identification and adaptation (DIA) is based on the analysis of the ‘actual residue’

$$w_k := y_k - A_k \hat{x}_{k|k} = B_k v_k, \quad B_k := I - A_k K_k \tag{21}$$

Here,  $I$  is the identity operator. Omitting the time subscript  $k$ , let us now denote by  $w_p$  and  $w_\phi$  the code and phase components of  $w$ , respectively. We then have from Eq. (18)

$$\|w\|^2 := \|w_p\|_{\mathcal{K}_0; p}^2 + \|w_\phi\|_{\mathcal{K}_0; \phi}^2 = \frac{1}{2\sigma_p^2} \sum_{i=1}^n |w_p^i|^2 + \frac{1}{2\sigma_\phi^2} \sum_{i=1}^n |w_\phi^i|^2 \tag{22}$$

Table 1  
SD biases  $\beta_{i_\psi}$  in the dual-frequency mode: an example

$i_\psi$	Frequency $f_1$				$i_\psi$	Frequency $f_2$			
	1	2	3	5		1	2	3	5
$p$	-2.812			-4.007	$p$				
$\phi$		<b>0.189</b>			$\phi$				<b>0.490</b>

At the epoch under consideration, eight satellites were available ( $i = 1, \dots, 8$ ). The biases are expressed in meters. Note that the cycle slips are correctly identified:  $\beta_{2_\phi} \simeq \lambda_1$ ,  $\beta_{5_\phi} \simeq 2\lambda_2$ .

When  $\|w\|^2$  is too large, above some threshold defined by statistical criteria, we then search to identify a global SD bias of the form

$$\beta = \left( \sum_{i_p \in \Omega_p} \beta_{i_p} e_{i_p}, \sum_{i_\phi \in \Omega_\phi} \beta_{i_\phi} e_{i_\phi} \right) \quad (23)$$

where the ‘outlier sets’  $\Omega_p$  and  $\Omega_\phi$  are some small sets of integers chosen in the interval  $[1, n]$ ;  $\{e_i\}_{i=1}^n$  is the standard basis  $\mathcal{B}$ . The problem is to build  $\Omega_p$  and  $\Omega_\phi$  while getting least-squares estimates of the corresponding SD biases  $\beta_{i_p}$  and  $\beta_{i_\phi}$ . From Eqs. (21) and (20), the contribution of  $\beta$  to  $w$  is of the form

$$M\beta := \sum_{i \in \Omega_p} \beta_{i_p} f_{i_p} + \sum_{i \in \Omega_\phi} \beta_{i_\phi} f_{i_\phi}, \quad f_{i_p} := B \cdot (Q_0 e_{i_p}, 0), \quad f_{i_\phi} := B \cdot (0, Q_0 e_{i_\phi}) \quad (24)$$

We then have to solve, in the least-square sense, the equation  $M\beta = w$ , in which the column vectors of  $M$ , the  $f_{i_p}$ 's and  $f_{i_\phi}$ 's, have to be thoroughly selected. In practice, this problem is solved via a particular Gram–Schmidt orthogonalization process [2] which is interrupted as soon as the corrected data are consistent with the model (up to the noise). The residue  $w$  is thus reduced step by step. The corresponding identification process then benefits from Eq. (22) in a recursive manner. As a general rule, at each step, the  $i_p$  or  $i_\phi$  to be finally selected is that corresponding to the maximal value of  $|w_p^i|/\sigma_p$  and  $|w_\phi^i|/\sigma_\phi$  for  $i = 1, n$ . Further details will be presented in a forthcoming paper.

The RD approach in RLS mode was validated in the framework of a European action entitled HPLE.<sup>1</sup> Real GPS data and simulated Galileo data were thus processed in the single and dual-frequency modes. Cycle slips, combined with miscellaneous SD biases, were thus detected and identified. An example is presented in Table 1.

#### 4. Concluding comments

The DD and RD approaches prove to be equivalent. In particular, from a technical point of view, the ambiguity problems to be solved are the same. The RD approach is however preferable for the following reasons. It is well known that in the DD approach, the results do not depend on the reference satellite. The theoretical framework of the RD approach is therefore well suited to the problem. Indeed, all the satellites are then handled in the same manner. For example, in the RD approach, the disappearance of the reference satellite of the DD approach is handled like that of any satellite. But the main interest of this new approach is to reveal remarkable properties which were hidden hitherto (see for instance Eqs. (16) to (18)). As pointed out at the end of Section 3, these properties make the identification of the outliers easier, among which outliers the cycle slips if any. More generally, and more concretely for the user, the results obtained in the HPLE<sup>1</sup> framework have shown that the RD approach was very efficient in reducing the number of reinitializations of the data assimilation process. Some pre-processing steps could also be avoided: the DIA procedure of the RD approach solved the problems in a more efficient way.

#### References

- [1] G. Strang, K. Borre, Linear Algebra, Geodesy, and GPS, Wellesley–Cambridge Press, Massachusetts, 1997.
- [2] A. Björck, Numerical Methods for Least-Squares Problems, SIAM, 1996.
- [3] E. Agrell, T. Eriksson, A. Vardy, K. Zeger, Closest point search in lattices, IEEE Trans. Inform. Theory 48 (2002) 2201–2214.
- [4] P.J.G. Teunissen, An integrity and quality control procedure for use in multi sensor integration, in: Proc. ION GPS-90, Colorado Springs, Colorado, USA, 1990, pp. 513–522.