

# Simulation de l'écoulement autour de deux cylindres en tandem

Eric Didier

*Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa,  
2829-516 Monte de Caparica, Portugal*

Reçu le 10 mars 2006 ; accepté après révision le 25 septembre 2007

Présenté par Patrick Huerre

---

## Résumé

L'écoulement autour de deux cylindres circulaires en tandem de diamètre  $D$  est simulé numériquement, pour un nombre de Reynolds de 100. L'écoulement est laminaire et bidimensionnel. Une méthode de résolution totalement couplée permet de résoudre les équations de Navier–Stokes. La distance critique entre les cylindres est précisément définie entre  $3,95D$  et  $4,0D$ . La moyenne et la fluctuation des efforts ainsi que la fréquence de lâcher des vortex changent brutalement pour cet écartement. *Pour citer cet article : E. Didier, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Flow simulations over two circular cylinders in tandem.** Flow simulations over two circular cylinders in tandem are carried out at a Reynolds number of 100, using a fully coupled resolution method for solving the two-dimensional Navier–Stokes equations. A critical cylinder spacing was found between 3.95 and 4.0 cylinder diameters. The fluctuating forces jumped appreciably at this critical gap, like the shedding frequency and the mean drag. *To cite this article: E. Didier, C. R. Mecanique 335 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

*Mots-clés :* Mécanique des fluides numérique ; Méthode de résolution totalement couplée ; Cylindres circulaires en tandem

*Keywords:* Computational fluid mechanics; Fully coupled resolution method; Circular cylinders in tandem

---

## Abridged English version

Two-dimensional laminar flow simulations over two cylinders in tandem are carried out for cylinder spacing between  $1.5D$  and  $10D$ . The Reynolds number, based on the cylinder diameters  $D$  and the free-stream velocity  $U_o$ , is equal to 100. A fully coupled second order resolution method for unstructured cell-centered collocated grids is used for solving the Navier–Stokes equations, Didier and Borges [1]. No-slip condition is applied to the surface cylinder. The free-stream velocity condition is applied on the external boundary far from the cylinders. The numerical method consists to construct only one linear system gathering all discrete equations. It is solved using the iterative resolution algorithm BiCGSTAB- $\omega$  preconditioned  $LU$ . Study convergence demonstrates that independent results are obtained with a medium mesh  $R3$ , a time-step equal to  $10^{-2}$  and an external circular boundary situated at  $100D$  from the cylin-

---

Adresse e-mail : [deric@fct.unl.pt](mailto:deric@fct.unl.pt).

ders, Table 1. Strouhal number, mean drag and *rms* drag and lift coefficients show the existence of a large and sudden jump, Fig. 2. It corresponds to the critical spacing,  $L_c$ , precisely defined between  $3.95D$  and  $4.0D$ , when Sharman et al. [8] indicates it between  $3.75$  and  $4.0$  and Meneghini et al. [6] in the range  $3.0$  and  $4.0$ . This sudden jump is due to an alteration of the flow–cylinder interaction. Before  $L_c$ , the cylinders function like one body: the interaction is strong. A weak interaction occurs beyond the critical spacing. Fig. 2(a) shows that for small gaps, the Strouhal number, equal for the two cylinders, is lower than that of an isolated cylinder. Fig. 2(b) shows that the mean drag coefficient is negative for the downstream cylinder for gaps less than the critical, resulting in an attraction force. This cylinder immersed on a low momentum wake presents a mean drag coefficient smaller than that of a single cylinder. The same behavior is observed by Zdravkovich [2]. Fluctuating forces, in Figs. 2(c) and 2(d), follow similar trends. Fluctuations are small for sub-critical gaps. For  $L/D \geq 4.0$ , fluctuations of upstream cylinder remain close than those of a single cylinder but they are greater for the downstream one. Fig. 3 shows the phase lag of the fluctuating lift between the cylinders, calculated from cross-correlation. In-phase and out-of-phase situations appear, influencing forces acting on the cylinders. For  $L_c$ , cylinders are in-phase, as is observed in experiment [16]. Nevertheless, the fluctuating lift does not reach its maximum for this critical gap but for a particular gap,  $L/D = 5.25$ . For this gap the distance between the stagnation points of the two cylinders is  $6.25$ . The characteristic length  $\lambda$  between two vortex can be calculated using the Strouhal number and  $\lambda \simeq 6.1$ . A spatial synchronization exists between the vortex shedding of the front and the rear cylinders. For this particular gap, *rms* pressure coefficient on the rear cylinder is maximum.

## 1. Introduction

L'écoulement laminaire et bidimensionnel autour de deux cylindres circulaires en tandem est simulé numériquement, en adoptant une méthode de résolution totalement couplée, Didier et Borges [1], pour un nombre de Reynolds de 100, basé sur le diamètre  $D$  des cylindres et la vitesse amont  $U_o$ . L'arrangement de cylindres en tandem apparaît fréquemment en ingénierie et a fait l'objet de nombreuses investigations expérimentales. Zdravkovich [2], Igarashi [3] et Alam et al. [4] ont démontré que les efforts dépendent du nombre de Reynolds et de la distance entre les centres des cylindres,  $L$ . Pour une distance critique,  $L_c = 4,0$ , les efforts et le nombre de Strouhal augmentent soudainement. Zdravkovich [2] et Igarashi [3] identifient ainsi plusieurs régimes d'écoulement en fonction de la distance  $L$  : (a) les couches de cisaillement libres issues du cylindre amont englobent le cylindre aval, (b) les couches de cisaillement issues du premier cylindre se rattachent au cylindre aval et deux vortex symétriques se forment entre les cylindres, (c) les vortex deviennent instables, et (d) les vortex se détachent du cylindre amont et inter-agissent avec le second cylindre pour  $L/D > 4,0$ . Ces phénomènes d'interaction entre écoulement et cylindres sont complexes et la simulation numérique peut contribuer à leurs analyses. Pourtant, très peu d'études numériques ont été réalisées, Mittal et al. [5], Meneghini et al. [6], Li et al. [7] et plus récemment Sharman et al. [8] et Carmo [9]. Ces auteurs présentent des résultats seulement pour quelques distances entre les deux cylindres. Seul Sharman propose une étude plus détaillée, néanmoins succincte au-delà de la distance critique. Les présentes simulations numériques, réalisées pour de nombreux écartements  $L$ , entre  $1,5D$  et  $10D$ , mettent en évidence une synchronisation spatiale entre les deux cylindres grâce à une analyse systématique des efforts et de la fréquence de lâcher des vortex. Les résultats numériques sont également comparés à ceux de Li et Sharman et aux données expérimentales de Huhe-Aode [10].

## 2. Méthode de résolution implicite totalement couplée

Une méthode de résolution implicite totalement couplée permet de résoudre les équations de Navier–Stokes, Didier et Borges [1]. La discrétisation des équations, du second ordre en espace et en temps, s'appuie sur la technique des volumes finis. Les variables de vitesse et pression sont situées au centre des volumes de contrôle (CVs). L'intégration en temps est réalisée par un schéma de type Euler implicite. Les flux diffusifs sont estimés aux interfaces des CVs par un schéma de différence centrée et la pression est calculée par une interpolation linéaire. Le flux convectif est évalué par le schéma de 'deferred correction' [11], combinant le schéma UDS, du premier ordre, et WACEB [12], du troisième ordre, ce qui favorise le conditionnement du système linéaire :  $(u_i)_f = (u_i^{\text{UDS}})_f^{\text{implicit}} + (u_i^{\text{WACEB}} - u_i^{\text{UDS}})_f^{\text{explicit}}$ . Le terme convectif est de l'ordre du schéma WACEB à convergence non-linéaire. La vitesse convectée, définie comme la somme d'une pseudo-vitesse et du gradient de pression [13], est mise en évidence dans l'équation de quantité de mouvement. L'introduction de la pseudo-vitesse facilite la résolution du système linéaire. L'équation de pression s'obtient en introduisant la vitesse convectée dans l'équation de continuité, le gradient de pression étant reconstruit

par la méthode de Rhie et Chow [14]. Un unique système linéaire regroupant les équations discrètes est résolu en utilisant l'algorithme de résolution itératif BiCGSTAB- $\omega$  préconditionné  $LU$  et permet d'obtenir simultanément les champs de vitesse et de pression. Cette approche permet une réduction très rapide des résidus non-linéaires, typiquement 5 ordres de réduction en 4 itérations non-linéaires, et s'avère parfaitement adaptée à la simulation d'écoulements instationnaires.

### 3. Étude de convergence

La Fig. 1 présente les notations utilisées et le maillage pour  $L/D = 4,5$ . La vitesse à l'infini,  $U_o$ , est imposée sur la frontière extérieure circulaire du domaine de calcul de rayon  $R$ . Une condition d'adhérence est appliquée sur les cylindres. La convergence de la solution avec le maillage, le rayon  $R$  de la frontière extérieure et le pas de temps,  $dt$ , est étudiée pour  $L/D = 4,5$ . Le Tableau 1 présente les différents maillages :  $e$  est la distance du premier noeud à la paroi,  $N$  le nombre de noeuds discrétisant un cylindre. Un maillage en O permet de contrôler la résolution de la couche limite. Dans le reste du domaine, le maillage non-structuré est généré par une technique de triangulation de Delaunay.

La convergence est évaluée dans le Tableau 1 en analysant le nombre de Strouhal,  $St$ , le coefficient de traînée moyen,  $\bar{C}_D$ , et la fluctuation des efforts. L'indépendance des résultats avec le maillage est quasiment obtenue avec le maillage  $M3$ . Les résultats deviennent également indépendant de la position de la frontière pour un rayon de  $100D$ . Un pas de temps de  $10^{-2}$  est adapté pour la simulation. Ainsi, un maillage de type  $R3$  et un pas de temps de  $10^{-2}$  sont adoptés pour les simulations.

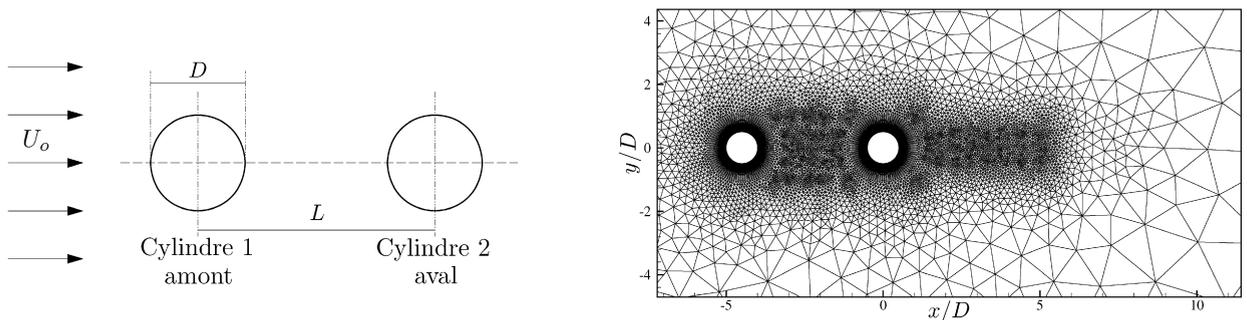


Fig. 1. Notations et détail du maillage,  $L/D = 4,5$ .

Fig. 1. Notations and close-up view of mesh,  $L/D = 4.5$ .

Tableau 1

Détails des maillages et convergence de la solution,  $L/D = 4,5$

Table 1

Grid details and convergence,  $L/D = 4.5$

Mesh	$e/D$	$N$	Elements	$R$	$dt$	$St_1$	$\bar{C}_{D1}$	$C_{D1,rms}$	$C_{L1,rms}$	$St_2$	$\bar{C}_{D2}$	$C_{D2,rms}$	$C_{L2,rms}$
$M1$	0,002	60	13496	35	0,01	0,150	1,233	0,0100	0,284	0,150	0,732	0,1250	1,025
$M3$	0,0008	140	47137	35	0,01	0,152	1,262	0,0098	0,291	0,152	0,760	0,1280	1,058
$M4$	0,0005	200	69663	35	0,01	0,151	1,261	0,0105	0,292	0,151	0,759	0,1290	1,060
$R1$	0,0008	140	47137	35	0,01	0,152	1,259	0,0144	0,289	0,152	0,766	0,1324	1,050
$R3$	0,0008	140	51127	100	0,01	0,151	1,237	0,0143	0,287	0,151	0,739	0,1278	1,030
$R5$	0,0008	140	53268	300	0,01	0,150	1,227	0,0142	0,287	0,150	0,732	0,1288	1,028
$R3$	0,0008	140	51127	100	0,02	0,150	1,231	0,0147	0,285	0,150	0,739	0,1306	1,031
$R3$	0,0008	140	51127	100	0,01	0,151	1,237	0,0143	0,287	0,151	0,739	0,1278	1,030
$R3$	0,0008	140	51127	100	0,005	0,151	1,236	0,0143	0,286	0,151	0,739	0,1275	1,030

#### 4. Analyse des résultats numériques

La Fig. 2 présente l'évolution des principaux paramètres en fonction de la distance  $L/D$ . Le nombre de Strouhal, évalué à partir de la fréquence dominante des forces de sustentation, est identique pour les deux cylindres comme observé expérimentalement [2]. Le nombre de Strouhal, Fig. 2(a), est comparé aux résultats numériques de Li et al. [7] et à ceux plus récents de Sharman et al. [8]. Ce dernier identifie  $L_c$  entre 3,75 et 4,0. Les présentes simulations permettent de définir  $L_c$  plus précisément entre 3,95 et 4,0. La distance critique est associée à une altération de la topologie de l'écoulement qui se traduit par un saut brutal de  $St$  mais aussi des efforts. Lorsque  $L_c < 4,0$  il existe une interaction forte entre les cylindres. L'analyse de la topologie de l'écoulement révèle la présence de deux vortex entre les cylindres, deux points de séparation sur le cylindre amont, deux points de recollement et deux points de séparation sur le corps aval. Lorsque  $L_c > 4,0$ , l'interaction devient faible. L'interférence entre les vortex lâchés du cylindre amont et le cylindre aval est caractérisée par la présence d'un seul point de recollement et de séparation sur ce cylindre. La comparaison avec les données expérimentales de Huhe-Aode et al. [10] est délicate. Leurs résultats sont dépendants du rapport entre la longueur des cylindres et la distance les séparant, particulièrement pour  $L/D > 4$ , ce qui explique la stagnation du  $St$  à 0,14, Norberg [15]. Néanmoins, pour  $L/D < 4$ , les résultats numériques et expérimentaux présentent une bonne similitude.

La Fig. 2(b) présente le coefficient de traînée moyen. Lorsque  $L < L_c$ ,  $\bar{C}_D$  est positif pour le cylindre amont, négatif puis légèrement positif pour le cylindre aval, révélant l'existence d'une force d'attraction entre les cylindres, Zdravkovich [2] (interaction forte). Au delà de  $L_c$ , le  $\bar{C}_D$  du cylindre amont tend rapidement vers celui d'un cylindre isolé, alors qu'il reste inférieur à 1,32 (cylindre seul) pour le cylindre aval immergé dans le sillage du précédent. Les fluctuations du coefficient de traînée et de sustentation, Figs. 2(c) et 2(d), sont faibles pour les distances sous-critiques. Ces fluctuations deviennent extrêmes pour  $L_c$ . Pour le cylindre amont, les fluctuations restent faibles et tendent vers celles d'un cylindre isolé. Pour le cylindre aval, les fluctuations de  $C_D$  et  $C_L$  sont 21 et 5 fois les fluctuations d'un cylindre seul. Les présents résultats, en bon accords avec ceux de Sharman, mettent néanmoins en évidence deux phénomènes intéressants dans l'interaction entre l'écoulement et les cylindres.

Le déphasage  $\phi$  entre le  $C_L$  des deux cylindres est calculée par corrélation croisée du  $C_L$  du cylindre amont et aval (Fig. 3). Pour  $L/D = 6,25$  les cylindres sont en anti-phase :  $\phi = (2n + 1)\pi$ , soit  $\phi = 3\pi$ . Les efforts agissant sur le cylindre amont et aval et le nombre de Strouhal sont légèrement altérés. Un examen de la topologie de l'écoulement mon-

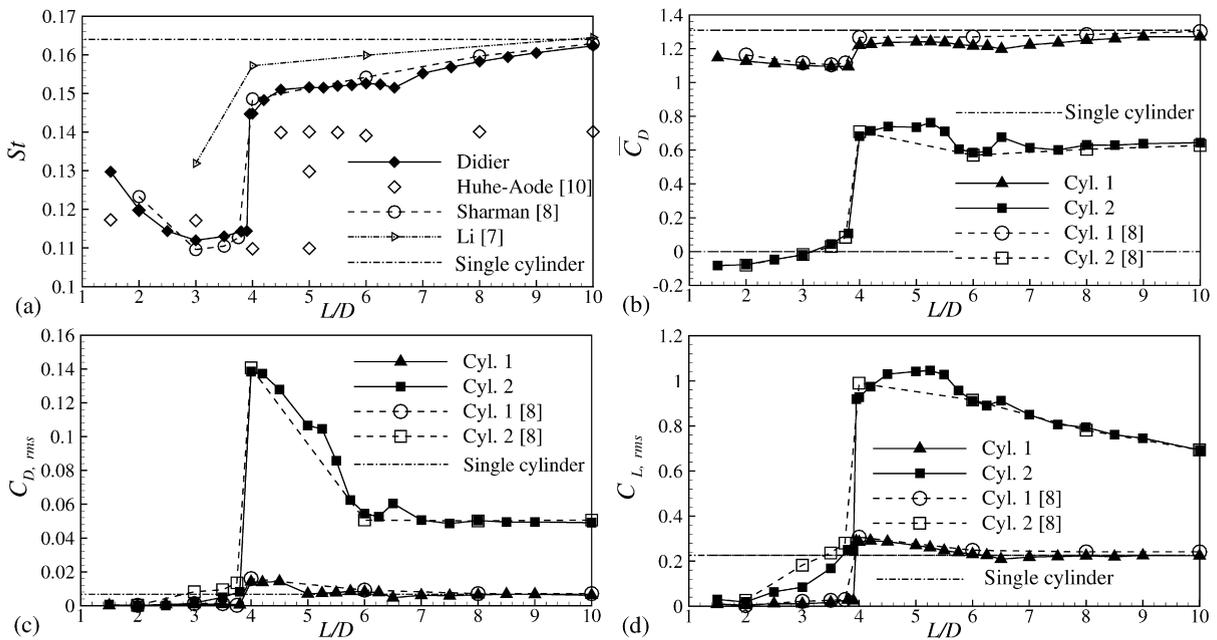
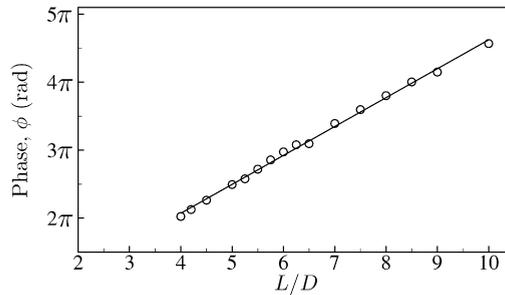


Fig. 2. Nombre de Strouhal (a), coefficient de traînée moyen (b), fluctuation du coefficient de traînée (c) et de sustentation (d), fonction de  $L$ .

Fig. 2. Strouhal number (a), mean drag coefficient (b), drag (c) and lift (d) rms coefficient vs cylinder spacing.

Fig. 3. Phase de  $C_L$  entre les cylindres.Fig. 3. Phase lag of  $C_L$  between the cylinders.

trent que le lâcher de vortex est atténué et que ceux-ci se développent sous une forme elliptique. Lorsque les cylindres sont en anti-phase, les vortex sont lâchés simultanément des côtés opposés des deux cylindres. La couche de cisaillement de séparation du cylindre aval semble alors vouloir induire une couche de séparation sur le même côté du cylindre amont, ce qui provoque un ralentissement de cette séparation sur le côté opposé du cylindre amont. Les efforts passent ainsi par un minimum pour le cylindre amont et un maximum pour le cylindre aval. Pour  $L/D = 4$ , distance critique, et  $L/D = 8,5$  les cylindres sont en phase :  $\phi = 2n\pi$ , soit  $\phi = 2\pi$  et  $\phi = 4\pi$ . A la distance critique, les efforts de  $C_L$  sur les deux cylindres sont en phase, comme observé expérimentalement pour des corps non-fuselés en tandem par Alam et Zhou [16], et présentent un maximum. Le  $C_{D,rms}$  atteint son maximum. Les vortex dans le sillage sont intenses et sont organisés en allée de Von Karman. Pour  $\phi = 4\pi$ , les efforts ne présentent rien de remarquable, les cylindres étant probablement déjà trop distants l'un de l'autre. Le  $C_{L,rms}$  présente un maximum lorsque les efforts sont en phase, pour  $L_c$ . Néanmoins, le maximum du  $C_{L,rms}$  pour le cylindre amont ne se produit pas pour la distance critique mais pour  $L/D = 5,25$ . Le Nombre de Strouhal peut s'exprimer sous la forme  $St = D/\lambda$ , où  $\lambda$  représente la distance entre deux vortex. En considérant le nombre de Strouhal d'un cylindre isolé,  $St = 0,164$ , et un cylindre de diamètre  $D = 1$ , alors  $\lambda \simeq 6,1$ . C'est la distance entre les points d'arrêts amont et aval des cylindres, lorsque  $L/D = 5,25$ . Il existe donc une synchronisation spatiale pour laquelle les vortex libérés du cylindre amont s'ajoutent aux vortex lâchés par le cylindre aval, augmentant les efforts fluctuants sur celui-ci. C'est également pour cette distance que les fluctuations du coefficient de pression sur le cylindre aval sont maximum. Le  $C_D$  est également maximum pour cette distance mais le  $C_{D,rms}$  présente seulement un maximum local. Les vortex dans le sillage du cylindre aval s'organisent en allée de Von Karman.

## 5. Conclusions

La simulation numérique de l'écoulement autour de deux cylindres en tandem de diamètre  $D$ , pour un nombre de Reynolds  $Re = 100$ , et pour une distance de centre à centre variant entre  $1,5D$  et  $10D$ , a mis en évidence la présence d'une distance critique  $L_c$ , avec  $3,95 < L_c/D < 4,0$ , définissant deux modes d'écoulements : une interaction forte, lorsque les cylindres sont proches et une interaction faible lorsque  $L \geq L_c$ . Le calcul de la corrélation croisée entre le  $C_L$  des deux cylindres a montré que, pour la distance critique, les efforts sont en phase et atteignent un maximum. Lorsque les cylindres sont en anti-phase, les efforts présentent un minimum pour le cylindre aval et un maximum pour le cylindre amont. Cet effet est lié à une interaction entre les couches de cisaillement de séparation opposées du cylindre amont et aval, cette interaction induisant une atténuation de la séparation des couches de cisaillement du cylindre aval. L'effort fluctuant de sustentation pour le cylindre amont n'atteint néanmoins pas son maximum à la distance critique mais pour une distance  $L/D = 5,25$  supérieure à  $L_c$ . Cela est lié à l'interaction entre les vortex en formation sur le cylindre aval et les vortex lâchés du cylindre amont, indiquant qu'il existe, pour  $Re = 100$ , une synchronisation spatiale en plus de l'effet de phase des efforts mis en évidence.

## Références

- [1] E. Didier, A.R.J. Borges, Numerical simulation of two-dimensional uniform cross flow past a cylinder using an unstructured mesh based implicit second order fully coupled method, in: Fourth European and African Conference on Wind Engineering, Prague, 11–15 July, 2005.
- [2] M.M. Zdravkovich, Review of flow interference between two circular cylinders in various arrangements, ASME J. Fluids Eng. 99 (1977) 618–633.

- [3] T. Igarashi, Characteristics of the flow around two circular cylinders arranged in tandem, *Bull. JSME* 24 (188) (1977) 323–331.
- [4] M.M. Alam, M. Moriya, K. Takai, H. Sakamoto, Fluctuating fluid forces acting on two circular cylinders in a tandem arrangement at a subcritical Reynolds number, *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* 91 (2003) 139–154.
- [5] S. Mittal, V. Kumar, A. Raghuvanshi, Unsteady incompressible flows past two cylinders in tandem and staggered arrangements, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 25 (1997) 1315–1344.
- [6] J.R. Meneghini, F. Saltara, C.L. Siqueira, J.A. Ferrari, Numerical simulation of flow interference between two circular cylinders in tandem and side by side arrangements, *J. Fluids Struct.* 15 (2001) 327–350.
- [7] J. Li, A. Chambarel, M. Donneaud, R. Martin, Numerical study of laminar flow past one and two circular cylinders, *Comput. Fluids* 19 (1991) 155–170.
- [8] B. Sharman, F.S. Lien, L. Davidson, C. Norberg, Numerical predictions of low Reynolds number flows over two tandem circular cylinders, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 47 (2005) 423–447.
- [9] B.S. Carmo, Estudo numérico do escoamento ao redor de cilindros alinhados, Master Thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil, 2005.
- [10] H. Huhe-Aode, M. Tatsumo, S. Taneda, Visual studies on wake structure behind two cylinders in tandem arrangement, *Rep. Res. Inst. Appl. Mech.* 32 (1985).
- [11] P. Khosla, S. Rubin, A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme, *Comput. Fluids* 2 (1974) 207–209.
- [12] B. Song, G.R. Liu, K.Y. Lam, R.S. Amano, On a higher-order bounded discretization scheme, *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 32 (2000) 881–897.
- [13] C. Prakash, S.V. Patankar, A control-volume-based-finite-element method for solving the Navier–Stokes equations using equal-order velocity–pressure interpolation, *Numer. Heat Transfer* 8 (1985) 259–280.
- [14] C.M. Rhie, W.L. Chow, A numerical study of turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation, *AIAA J.* 21 (1983) 1525–1532.
- [15] C. Norberg, An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio, *J. Fluid. Mech.* 258 (1994) 287–316.
- [16] M.M. Alam, Y. Zhou, Phase lag between vortex shedding from two tandem bluff bodies, *J. Fluid Struct.* 23 (2007) 339–347.