

Décomposition harmonique des tenseurs – Méthode spectrale

Nicolas Auffray

ONERA–DMMP, BP72, 29, avenue de la Division Leclerc, 92322 Châtillon cedex, France

Reçu le 4 septembre 2007 ; accepté le 13 décembre 2007

Disponible sur Internet le 14 janvier 2008

Présenté par Évariste Sanchez-Palencia

Résumé

Une méthode de calcul rapide du spectre de la décomposition harmonique d'un tenseur quelconque est présentée. *Pour citer cet article : N. Auffray, C. R. Mecanique 336 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Harmonic decomposition of tensors – a spectral method. We introduce an easy way to obtain the reduction spectrum of the harmonic decomposition of an arbitrary tensor. *To cite this article: N. Auffray, C. R. Mecanique 336 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Algèbre tensorielle ; Classe d'anisotropie

Keywords : Tensor algebra; Anisotropic class

1. Introduction

La modélisation de lois de comportement linéaires complexes implique l'utilisation de tenseurs d'ordre élevé. L'étude des propriétés de ces tenseurs n'est pas une chose aisée et la littérature est peu abondante sur les cas particuliers que l'on peut rencontrer. Un outil d'étude général d'un tenseur est sa décomposition harmonique [1–3]. C'est à partir de cette décomposition que Forte et Vianello [2] ont montré l'existence de 8 classes d'élasticité distincts. Le problème de cette approche est que très rapidement le calcul explicite de cette décomposition devient compliqué [4]. Si l'on a besoin de l'expression des composantes de la décomposition alors il est impératif de réaliser celle-ci, toutefois si on a juste besoin de renseignements sur la structure algébrique du tenseur alors une autre méthode est possible. L'utilisation de la théorie des représentations irréductibles telle qu'elle est détaillée dans [5] peut alors être utile. Son utilisation courante en mécanique quantique [6] semble être moins répandue en mécanique et il nous paraît pertinent de la rappeler ainsi que d'en éclairer l'utilisation. Cette méthode nous permettra d'obtenir rapidement le spectre de la décomposition harmonique d'un tenseur quelconque. Nous appliquerons cette démarche pour le calcul du nombre de coefficients nécessaires pour décrire une loi de comportement pour une symétrie matérielle donnée.

Adresse e-mail : nicolas.auffray@onera.fr.

2. Notations

Nous noterons les tenseurs de manière indicielle. Les symétries sur les indices seront marquées de la sorte : entre parenthèses pour des permutations d'indices contigus (petites symétries) et soulignés pour des permutations par blocs (grandes symétries). Nous noterons par exemple le tenseur d'élasticité $E_{(ij)(kl)}$. Lorsque nous parlerons de l'espace vectoriel des tenseurs possédant une certaine symétrie, nous écrirons, dans le cas de l'élasticité, par exemple, $\mathbb{E}_{(ij)(kl)}$ cet espace. Nous abrègerons de plus espace vectoriel en e.v. et sous-espace vectoriel en s.-e.v. Pour finir nous appellerons Lin l'e.v. des applications de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 et Dev le sous-espace symétrique et de trace nulle de Lin. Introduisons à présent le principe de la méthode.

3. Méthode du spectre harmonique

3.1. Principe

Un tenseur cartésien quelconque d'ordre n peut se mettre sous la forme [5]

$$T(n) = \sum_{\oplus \tau, J} H(n)^{\tau, J} \tag{1}$$

cette forme constitue la décomposition harmonique de $T(n)$ au sens de Spencer [4] et le spectre de réduction au sens de Jerphagnon [5]. J indique le poids des tenseurs de la décomposition, et τ permet de distinguer différentes composantes de même poids. Quand $J = n$ le tenseur est harmonique.¹ Pour $J < n$ on a un tenseur harmonique d'ordre inférieur à n qui est assemblé dans un tenseur d'ordre n . Pour un tenseur d'ordre 2 on a, par exemple,

$$T_{ij} = T_{ij}^{(0)} + T_{ij}^{(1)} + T_{ij}^{(2)} \tag{2}$$

avec

$$T_{ij}^{(0)} = \left(\frac{1}{3}T_{kk}\right)\delta_{ij}; \quad T_{ij}^{(1)} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}); \quad T_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \left(\frac{1}{3}T_{kk}\right)\delta_{ij} \tag{3}$$

Il est évident que $T_{ij}^{(0)}$ est équivalent à un tenseur d'ordre 0 assemblé dans un tenseur d'ordre 2, de même que l'expression irréductible de $T_{ij}^{(1)}$ est un vecteur axial tandis que $T_{ij}^{(2)}$ est un déviateur. La décomposition harmonique de notre tenseur est la suivante

$$T_{ij} = \left(\frac{1}{3}T_{kk}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) - \left(\frac{1}{3}T_{kk}\right)\delta_{ij} \tag{4}$$

L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2 se décompose comme la somme directe des espaces vectoriels des tenseurs harmoniques d'ordre 0, d'ordre 1, et d'ordre 2. Comme introduit dans [3] la relation (4) établit un isomorphisme noté ϕ entre Lin et $\text{Dev} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Nous raisonnerons ici, et par la suite, uniquement dans l'ensemble d'arrivée de ϕ . Nous adopterons l'écriture suivante plus compacte que celles utilisées usuellement :

$$\text{Sp}(T_{ij}) = \phi(T_{ij}) = 0^{(1)} \oplus 1^{(1)} \oplus 2^{(1)} \tag{5}$$

où l'application Sp associe à un espace vectoriel de tenseur donné sa décomposition en somme directe d'espaces vectoriels de tenseurs harmoniques. Chaque élément correspond à l'e.v. des tenseurs harmoniques d'ordre n , la dimension² de cet espace est de $2n + 1$ et l'exposant indique la multiplicité de cet espace. Si on considère à présent $T_{(ij)}$, on aura :

$$\text{Sp}(T_{(ij)}) = 0^{(1)} \oplus 1^{(0)} \oplus 2^{(1)} \tag{6}$$

que nous noterons plus simplement

$$\text{Sp}(T_{(ij)}) = 0 \oplus 2 \tag{7}$$

ce qui correspond bien aux $1 + (2 * 2 + 1) = 6$ dimensions de l'e.-v. des tenseurs symétriques d'ordre 2.

¹ C'est-à-dire totalement symétrique et de trace nulle.

² Ceci n'est vrai que pour un espace physique à 3 dimensions [1].

3.2. Arithmétique des e.v. de tenseurs irréductibles

A partir de cela on peut bâtir une arithmétique permettant à partir de la connaissance des symétries indicelles d'un tenseur d'ordre n quelconque de déterminer la dimension et la structure harmonique de cet espace.

Le principe de cette arithmétique repose sur le produit tensoriel de représentations irréductibles. On considère E_1 et E_2 deux e.v. portant des représentations irréductibles D_1 et D_2 d'un groupe G , pour nous ce groupe sera $SO(3)$. L'espace produit $E = E_1 \otimes E_2$ porte une représentation $D = D_1 \otimes D_2$ qui n'est pas irréductible et se réduit selon la décomposition de Clebsch–Gordan :

$$D_1 \otimes D_2 = \bigoplus_{\rho} m_{\rho} D_{\rho} \quad (8)$$

où m_{ρ} indique la multiplicité de la représentation D_{ρ} . L'espace produit se décompose alors suivant la règle dite « d'addition du moment angulaire » [6] suivante, si E_1 et E_2 sont d'ordre respectifs n_1 et n_2 alors :

$$E = E_1^{(n_1)} \otimes E_2^{(n_2)} = \bigoplus_{k=|n_1-n_2|}^{n_1+n_2} E_{\alpha}^k \quad (9)$$

Ainsi le produit tensoriel de deux tenseurs irréductibles d'ordre 1 donne le spectre d'un tenseur d'ordre 2. On a alors

$$\text{Sp}(1_a \otimes 1_b) = 0_a \oplus 1_a \oplus 2_a \quad (10)$$

les indices précisent la non-symétrie de notre e.v. de départ. Si au contraire on désire construire un espace vectoriel symétrique alors

$$\text{Sp}(1_a \otimes 1_a) = 0_a \oplus 2_a \quad (11)$$

car par propriété de la décomposition harmonique [5], la décomposition d'un tenseur totalement symétrique d'ordre pair ne contient que des tenseurs d'ordres pairs. La réciproque est vrai dans le cas d'un tenseur impair. De plus dans le cas d'un tenseur polaire d'ordre pair, tous les tenseurs d'ordres pairs de cette décomposition sont polaires et tous les tenseurs d'ordres impairs sont axiaux, et réciproquement dans le cas d'un tenseur impair. On rappelle de plus que le produit tensoriel est associatif mais non commutatif, tandis que l'opérateur « somme directe » l'est. De plus, le produit tensoriel est distributif par rapport à la somme directe. C'est à partir de ces règles simples que nous allons bâtir l'ensemble des spectres des tenseurs de comportement. Nous détaillerons de plus le principe pour prendre en compte la grande symétrie, principe qui n'était pas énoncé dans les publications ayant traité du sujet [5]. Regardons l'application de cette méthode sur quelques tenseurs.

4. Détermination des spectres de réduction

4.1. Tenseur d'ordre 3

On considère le cas général de l'e.v. des tenseurs d'ordre 3. Il peut être engendré à partir de $1_a \otimes 1_b \otimes 1_c$.³ On obtient alors la structure suivante :

$$\text{Sp}(1_a \otimes 1_b \otimes 1_c) = \text{Sp}(1_a \otimes \text{Sp}(1_b \otimes 1_c)) = \text{Sp}(1_a \otimes (0_b \oplus 1_b \oplus 2_b)) \quad (12)$$

$$= \text{Sp}(1_a \otimes 0_b) \oplus \text{Sp}(1_a \otimes 1_b) \oplus \text{Sp}(1_a \otimes 2_b) = 0_a \oplus 1_a \oplus 1_b \oplus 1_c \oplus 2_a \oplus 2_b \oplus 3_a \quad (13)$$

que l'on réécrira plus simplement

$$0 \oplus 1^{(3)} \oplus 2^{(2)} \oplus 3 \quad (14)$$

ce qui correspond bien à un espace à 27 dimensions. Si on suppose maintenant une symétrie de type $(ij)k$ on peut considérer un tenseur appartenant à ce s.-e.v. comme étant le résultat d'un produit tensoriel d'un vecteur par un tenseur d'ordre 2 symétrique. On a

$$\text{Sp}(1_a \otimes (0_b \oplus 2_b)) = 1^{(2)} \oplus 2 \oplus 3 \quad (15)$$

³ La seule logique des indices dans la notation est de distinguer les composantes différentes de même ordre.

ce qui correspond bien à un sous-espace de dimension 18 de l'e.v. précédent. La structure identifiée correspond à celle identifiée dans [3] pour l'e.v. des tenseurs piézo-électrique. Continuons maintenant avec les spectres de tenseurs d'ordre 4.

4.2. Tenseurs d'ordre 4

On considère le tenseur d'élasticité sans la grande symétrie, c'est-à-dire possédant les symétries indicielles : $(ij)(kl)$. Ce tenseur correspond physiquement à celui de l'effet Kerr [7]. Le s.-e.-v des tenseurs photoélastiques à la structure suivante :

$$(0_a \oplus 2_a) \otimes (0_b \oplus 2_b) = (0_a \otimes 0_b) \oplus (0_a \otimes 2_b) \oplus (2_a \otimes 0_b) \oplus (2_a \otimes 2_b) \tag{16}$$

Donc au final on a

$$\text{Sp}((0_a \oplus 2_a) \otimes (0_b \oplus 2_b)) = 0^{(2)} \oplus 1 \oplus 2^{(3)} \oplus 3 \oplus 4 \tag{17}$$

ce qui correspond au spectre de la décomposition harmonique effectuée dans [7]. Le même calcul effectué par la méthode de Spencer aurait été beaucoup plus compliqué à mener. Considérons à présent le cas de l'élasticité, on tient compte à présent de la grande symétrie : $(ij)(kl)$. Le problème admet des simplifications. La grande symétrie implique de récrire (16) de la manière suivante :

$$(0_a \oplus 2_a) \otimes (0_a \oplus 2_a) = (0_a \otimes 0_a) \oplus (0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a) \oplus (2_a \otimes 2_a) \tag{18}$$

avec des termes au « carré » et des termes croisés. On a naturellement pour les termes « carrés »

$$\text{Sp}(0_a \otimes 0_a) = 0_a \quad \text{et} \quad \text{Sp}(2_a \otimes 2_a) = 0_a \oplus 2_a \oplus 4_a \tag{19}$$

par propriété de la décomposition d'un tenseur totalement symétrique. Tandis que pour les termes croisés il est nécessaire de considérer $(0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a)$ comme un sous-espace symétrique et non comme deux sous-espaces. De fait on a

$$\text{Sp}((0_a \otimes 2_a) \oplus (2_a \otimes 0_a)) = 2_a \tag{20}$$

Ce qui nous permet de conclure que

$$\text{Sp}(\mathbb{E}_{(ij)(kl)}) = 0^2 \oplus 2^2 \oplus 4 \tag{21}$$

Ce qui est bien la structure de l'e.v. des tenseurs d'élasticité tel que obtenus dans [1,2]. Appliquons cette méthodologie à la dérivation des structures de différents e.v. des tenseurs d'ordre 6.

4.3. Tenseur d'ordre 6

On a immédiatement

$$\text{Sp}(\mathbb{A}_{ijklmn}) = 0^{15} \oplus 1^{36} \oplus 2^{40} \oplus 3^{29} \oplus 4^{15} \oplus 5^5 \oplus 6 \tag{22}$$

On retrouve bien les 729 coefficients d'un tenseurs d'ordre 6 et on retrouve bien les 15 composantes isotropes déjà identifiées par Suiker et Chang [8]. Pour l'e.v. des tenseurs d'ordre 6 possédant les symétries $(ij)k(lm)n$ on obtient :

$$\text{Sp}(\mathbb{A}_{(ij)k(lm)n}) = 0^5 \oplus 1^4 \oplus 2^{10} \oplus 3^5 \oplus 4^5 \oplus 5 \oplus 6 \tag{23}$$

Physiquement cet e.v. correspond à celui des tenseurs d'élasticité du second ordre dans la théorie du second gradient [9]. On constate que notre décomposition concorde avec le modèle isotrope de Mindlin car nous retrouvons bien dans ce cas les 5 coefficients du modèle. Regardons (voir Tableau 1) comment évoluent les structures d'espaces en fonction des symétries indicielles.

Regardons à présent une utilisation possible de ces résultats.

Tableau 1
Évolution les structures d'espaces en fonction des symétries indicielles

Sym.	0	1	2	3	4	5	6	Dim.
$ijklmn$	15	36	40	29	15	5	1	729
$(ij)k(lm)n$	6	12	16	12	8	3	1	324
$\underline{(ij)k} \underline{(lm)n}$	5	4	10	5	5	1	1	171
$\underline{\underline{(ij)k}} \underline{\underline{(lm)n}}$	4	2	7	3	4	1	1	126
$(ijk)(lmn)$	2	2	4	3	3	1	1	100
$\underline{(ijk)} \underline{(lmn)}$	2	0	3	1	2	0	1	55
$\underline{\underline{(ijklmn)}}$	1	0	1	0	1	0	1	28

5. Synthèse et exemple d'application

Considérons à présent un cas d'application concret de cette méthode. On se place dans le cadre de la théorie de l'élasticité du second gradient pour un milieu centro-symétrique [10]. On s'intéresse à l'élasticité du second ordre. On a la relation linéaire suivante entre le gradient de la déformation K , le tenseur d'hypercontrainte S et le tenseur d'élasticité généralisée A

$$S_{(ij)k} = A_{(ij)k \underline{(lm)n}} K_{(lm)n} \quad (24)$$

Notre tenseur de comportement appartient donc à $\underline{\underline{A}}_{(ij)k \underline{(lm)n}}$ dont nous avons identifié précédemment le spectre harmonique :

$$\text{Sp}(\underline{\underline{A}}_{(ij)k \underline{(lm)n}}) = 0^{(5)} \oplus 1^{(4)} \oplus 2^{(10)} \oplus 3^{(5)} \oplus 4^{(5)} \oplus 5 \oplus 6 \quad (25)$$

La question est la suivante, dans le cas de l'isotropie transverse combien de coefficients sont non nuls dans notre loi de comportement ? Comme montré dans [2] si l'on considère, $H^{(n)}$ un tenseur harmonique d'ordre n , alors ce tenseur peut, via la décomposition de Cartan, s'écrire :

$$H^{(n)} = H_0^{(n)} + \sum_{k=1}^n H_k^{(n)} \quad (26)$$

avec

$$\dim(H_k^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 2 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (27)$$

Et comme montré dans [11] si l'on considère notre loi de comportement comme étant isotrope transverse, alors les seuls termes non nuls de la décomposition harmonique sont les composantes paires. De plus les seuls coefficients laissés non nuls dans la décomposition de Cartan sont ceux de degré 0. De fait on a en pratique, et avec les notations (1),

$$A = H_0^{(0,5)} + H_0^{(2,10)} + H_0^{(4,5)} + H_0^{(6,1)} \quad (28)$$

c'est-à-dire que $\underline{\underline{A}}_{(ij)k \underline{(lm)n}}$ possède 21 coefficients non nuls dans le cas de l'isotropie transverse. De cette manière le calcul est quasi-immédiat, si on avait eu besoin d'effectuer la décomposition à la Spencer le coût en temps aurait été largement supérieur et ceci sans parler du risque d'erreurs de calculs. De plus il est à noter que si l'on doit effectuer, pour une raison ou une autre, le calcul explicite de la décomposition la présente méthode propose un garde fou en ce sens que l'on connaît la structure du résultat final.

Références

- [1] G. Backus, A geometrical picture of anisotropic elastic tensors, *Reviews of Geophysics and Space Physics* 8 (1970) 633–671.
- [2] S. Forte, M. Vianello, Symmetry classes for elasticity tensors, *Journal of Elasticity* 43 (1996) 81–108.
- [3] T. Weller, Étude des symétries et modèles de plaques en piézoélectricité linéarisée, Thèse de doctorat, Université Montpellier 2, 2004.
- [4] A. Spencer, A note on the decomposition of tensors into traceless symmetric tensors, *International Journal of Engineering Science* 8 (1970) 475–481.
- [5] J. Jerphagnon, D. Chemla, R. Bonneville, The description of the physical properties of condensed matter using irreducible tensors, *Advances in Physics* 27 (1978) 609–650.

- [6] J.B. Zuber, Invariances en physique et théorie des groupes, M2/CFP/Parcours de Physique Théorique UPMC (2006).
- [7] S. Forte, M. Vianello, Symmetry classes and harmonic decomposition for photoelasticity tensors, *International Journal of Engineering Science* 35 (1997) 1317–1326.
- [8] A.S.J. Suiker, C.S. Chang, Application of higher-order tensor theory for formulating enhanced continuum models, *Acta Mechanica* 142 (2000) 223–234.
- [9] R.D. Mindlin, N.N. Eshel, On first strain–gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures* 4 (1968) 109–124.
- [10] S. Forest, *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*, Les Presses de l’Ecole des Mines de Paris, 2006.
- [11] N. Auffray, Démonstration du théorème d’Hermann à partir de la méthode Forte-Vianello, *C. R. Mecanique* (2007), soumis pour publication.