

Étude analytique du mécanisme orthogonal de Bricard

Laurentiu Racila, Marc Dahan *

Laboratoire de mécanique appliquée R. Chaléat, FEMTO-ST, université de Franche-Comté, 24, rue de l'Épitaphe, 25000 Besançon, France

Reçu le 20 septembre 2007 ; accepté après révision le 10 janvier 2008

Présenté par André Zaoui

Résumé

Cette Note présente une nouvelle méthode pour la détermination des équations de fermeture du mécanisme orthogonal de Bricard. Il s'agit de la résolution analytique d'un système de douze équations obtenu en écrivant l'équation matricielle de fermeture d'un mécanisme articulé composé de six barres (non nécessairement de même longueur) et de six liaisons rotoïdes, l'angle de torsion formé par deux liaisons successives étant égal à $\pm 90^\circ$. Les expressions analytiques présentées correspondent aux cinq équations de fermeture pour ce mécanisme, c'est-à-dire celles qui expriment les variations angulaires des différentes barres en fonction de l'angle d'entrée. **Pour citer cet article : L. Racila, M. Dahan, C. R. Mecanique 336 (2008).**

© 2008 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Abstract

Analytical study of the rectangular Bricard mechanism. This Note presents a new method for the determination closure equation for the rectangular Bricard mechanism. It concerns the analytic resolution of a system of twelve equations obtained by writing the matrix form of the closure equation for a six-bar mechanism (not necessarily with similarly length) with revolute joints, the twist angle formed by two successive joints being equal to $\pm 90^\circ$. The analytical expressions presented correspond to the five closure equations for this mechanism, that is to say, the variation of bars' angles depending on the input angle. **To cite this article: L. Racila, M. Dahan, C. R. Mecanique 336 (2008).**

© 2008 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Mots-clés : Dynamique des systèmes rigides ou flexibles ; Mécanisme orthogonal de Bricard

Keywords: Dynamics of rigid or flexible systems; Rectangular Bricard mechanism

1. Introduction

Les mécanismes surcontraints en boucle fermée sont composés de quatre, cinq ou six liaisons rotoïdes. On considère dans cette Note seulement les mécanismes à six liaisons rotoïdes et plus précisément le mécanisme de Bricard orthogonal. Les cas du mécanisme 4R, dit de Bennett, est bien connu [1] ; le mécanisme 5R n'est qu'une combinaison de deux mécanismes 4R [2,3].

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : racila_laurentiu@yahoo.com (L. Racila), marc.dahan@univ-fcomte.fr (M. Dahan).

Connus depuis plus d'un siècle, les mécanismes surcontraints ont toujours attiré les chercheurs, en raison de leur non respect des critères usuels de mobilité. En effet, leur mobilité de degré 1 ne respecte pas l'application de ces critères en raison des contraintes dimensionnelles nécessaires à leur construction. C'est pour ces raisons qu'on les appela mécanismes paradoxaux.

Parmi les mécanismes surcontraints en boucle fermée ne comportant que des liaisons rotoïdes, les mécanismes de Bricard sont les seuls 6R qui sont indépendants dans leur architecture, les autres mécanismes à six liaisons rotoïdes étant des combinaisons de mécanismes à quatre ou à cinq liaisons.

Dans ses articles parus en 1897 et 1927, Raoul Bricard décrit trois types d'octaèdre déformable : à symétrie axiale, à symétrie planaire et l'octaèdre repliable, et aussi trois mécanismes à six liaisons rotoïdes : le mécanisme à symétrie axiale, à symétrie planaire et le mécanisme orthogonal [4,5].

La première analyse approfondie de ces six mécanismes, faite par J.E. Baker en 1980, donne les systèmes d'équations de fermeture pour ces mécanismes [6], sans donner des expressions explicites en fonction de l'angle d'entrée. Dans le cas du mécanisme orthogonal de Bricard, Baker utilise des relations trigonométriques supplémentaires observées sur le mécanisme.

En 1993, Karl Wohlhart fait à nouveau l'analyse du mécanisme orthogonal de Bricard. Il montre qu'il existe deux types de mécanismes qu'il dénomme « Baker type mechanism » et « second type mechanism » [7]. Lui aussi fait une étude analytique de ces mécanismes, en donnant la méthode pour obtenir les équations de fermeture. Comme Baker, il utilise des relations trigonométriques supplémentaires observées sur le mécanisme en s'appuyant sur la trigonométrie sphérique, mais il ne parvient pas à fournir les expressions analytiques entre les angles de sortie et l'angle d'entrée.

Dans cette Note, la méthode présentée succinctement permet d'aboutir aux cinq équations de fermeture qui donnent le comportement des différentes barres du mécanisme orthogonal de Bricard, en résolvant analytiquement le système des douze équations déduites de l'écriture de l'équation matricielle exprimant la fermeture de la chaîne cinématique.

2. Les équations de fermeture

Nous utilisons les notations classiques de Denavit–Hartenberg (Annexe A) pour repérer dans l'espace la déformation de chaînes articulées comportant des liaisons rotoïdes [8]. Ainsi, l'angle de torsion entre les axes de deux liaisons successives (i) et ($i + 1$) est noté α_i , la longueur des barres est notée a_i et l'écart entre deux éléments ($i - 1$) et (i) est noté d_i . Le quatrième paramètre est l'angle entre deux éléments successifs ($i - 1$) et (i), noté θ_i . Le seul paramètre variable est l'angle θ_i , les trois premiers paramètres α_i , a_i et d_i définissent la géométrie des barres.

Pour un mécanisme à six liaisons rotoïdes 6R en boucle fermée, la condition de fermeture s'exprime par le fait que le produit de six matrices de transfert (de dimension quatre) soit égal à la matrice unité. Cette condition peut aussi s'écrire sur la forme suivante :

$${}^3Q_4 {}^4Q_5 {}^5Q_6 = {}^3Q_2 {}^2Q_1 {}^1Q_6 \quad (1)$$

Le développement de ces produits matriciels conduit à un système de 12 équations de fermeture déjà obtenu par K. Waldron [9] et rappelé par J.E. Baker [6]. Ce système est d'une extrême complication.

Pour le mécanisme qui nous intéresse, le mécanisme orthogonal de Bricard (Fig. 1), les conditions suivantes permettent de réduire l'écriture du système dont ses douze équations sont données en Annexe B :

$$\begin{cases} d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 0 \\ \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \frac{\pi}{2} \\ \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = -\frac{\pi}{2} \\ a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 = a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 \end{cases} \quad (2)$$

Les trois premières relations expriment les contraintes géométriques du mécanisme (liaisons rotoïdes, axes 2 à 2 orthogonaux) ; la quatrième relation permet la fermeture du mécanisme. Elle s'obtient par la double application du théorème de Pythagore aux triangles $O'O_6O_5$ et $O'O_4O_5$, et ensuite $O'O_4O_3$ et $O'O_3O_2$.

3. Résolution analytique

Nous souhaitons obtenir les équations d'entrée-sortie du mécanisme, c'est-à-dire celles qui relient les différents paramètres angulaires θ_i à l'angle d'entrée θ_1 en tenant compte des différentes longueurs a_i . Nous les déduisons du système général écrit dans l'Annexe B.

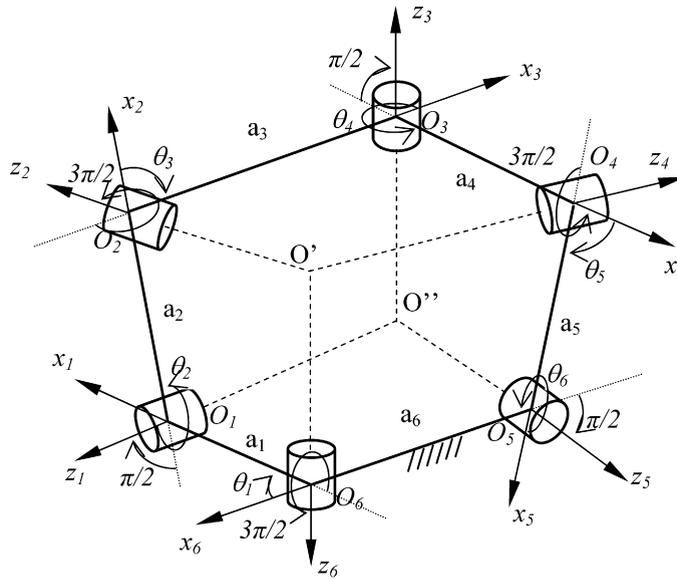


Fig. 1. Le mécanisme orthogonal de Bricard.

Fig. 1. Bricard rectangular mechanism.

Dans un premier temps, les équations (B.5), (B.8)–(B.10) et (B.11) permettent d'exprimer :

$$\sin \theta_4 = \frac{\sin \theta_2 (a_6 \cos \theta_1 + a_1)}{a_5 (\cos \theta_1 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3) + a_4} \quad (3)$$

De même, les équations (B.6) et (B.11) donnent plus simplement :

$$\sin \theta_4 = \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_6}{\sin \theta_3} \quad (4)$$

L'égalité des relations (3) et (4) constitue la première équation d'un système de deux équations linéaires aux deux inconnues $\sin \theta_3$ et $\cos \theta_3$, dont la deuxième s'obtient en éliminant le terme $\sin \theta_5$ entre les relations (B.9) et (B.11). Pour ce système, on sait écrire les expressions des solutions :

$$\sin \theta_3 = \frac{a_4 \sin \theta_1 \sin \theta_6}{\sin \theta_2 (a_5 \cos \theta_1 \cos \theta_6 + a_5 \cotan \theta_2 \sin \theta_6 + a_6 \cos \theta_1 + a_1)} \quad (5)$$

$$\cos \theta_3 = -\frac{a_4 \cos \theta_6 (\sin \theta_2 + \tan \theta_6 \cos \theta_1 \cos \theta_2)}{\sin \theta_2 (a_5 \cos \theta_1 \cos \theta_6 + a_5 \cotan \theta_2 \sin \theta_6 + a_6 \cos \theta_1 + a_1)} \quad (6)$$

L'expression (5) et (B.11) d'une part et (6) et (B.10) d'autre part permettent d'obtenir les expressions de $\sin \theta_5$ et $\cos \theta_5$:

$$\sin \theta_5 = \frac{a_4 \sin \theta_1}{\cos \theta_1 (a_5 \cos \theta_6 + a_5) + a_1 \sin \theta_2 + a_5 \sin \theta_6 \cos \theta_2} \quad (7)$$

$$\cos \theta_5 = -\frac{a_4 (\cos \theta_1 \cos \theta_6 + \cotan \theta_2 \sin \theta_6)}{a_5 \cos \theta_1 \cos \theta_6 + a_5 \cotan \theta_2 \sin \theta_6 + a_6 \cos \theta_1 + a_1} \quad (8)$$

Les expressions de $\sin \theta_4$ et $\cos \theta_4$ sont obtenues en utilisant les relations (7), (8), (B.5) et (B.6) :

$$\sin \theta_4 = \sin \theta_2 \frac{a_5 \cos \theta_1 \cos \theta_6 + a_5 \cotan \theta_2 \sin \theta_6 + a_6 \cos \theta_1 + a_1}{a_4} \quad (9)$$

$$\cos \theta_4 = \cos \theta_2 \cos \theta_6 - \cos \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_6 \quad (10)$$

On peut constater, en observant les relations (5) à (10), que les angles θ_3 , θ_4 et θ_5 dépendent des angles θ_1 , θ_2 et θ_6 .

Si maintenant, on introduit successivement les expressions obtenues pour $\sin \theta_3$, $\cos \theta_3$, $\sin \theta_4$, $\cos \theta_4$, $\sin \theta_5$ et $\cos \theta_5$ dans les deux équations (B.1) et (B.3), on est conduit au même résultat :

$$[a_5 E + (a_6 \cos \theta_1 + a_1)]^2 = a_4^2 E^2 + a_4^2 \sin^2 \theta_1 \quad (11)$$

en posant $E = \cos \theta_1 \cos \theta_6 + \cotan \theta_2 \sin \theta_6$.

Il en résulte que la quantité E , racine d'une équation du second degré, n'est fonction que de θ_1 : $E = E(\theta_1)$.

En introduisant les expressions de $\sin \theta_i$ et $\cos \theta_i$, pour $i = 3, 4, 5$, dans la relation (B.4), et à l'aide de la relation (11), on obtient :

$$a_4 \frac{\sin \theta_6}{\sin \theta_2} (a_6 \cos \theta_1 + a_1) + a_4 a_2 \cos \theta_6 \sin^2 \theta_1 + (a_4 a_2 \cos \theta_1 - a_3 a_5) E(\theta_1) - a_3 (a_6 \cos \theta_1 + a_1) = 0 \quad (12)$$

On fait de même avec la relation (B.12) et on obtient :

$$a_2 \frac{\sin \theta_6}{\sin \theta_2} = a_6 \cos \theta_6 + a_5 - a_1 [E(\theta_1) - \cos \theta_1 \cos \theta_6] \quad (13)$$

L'égalité des premiers membres des relations (12) et (13) fournit l'expression de $\cos \theta_6$ en fonction de θ_1 et $E = E(\theta_1)$:

$$\cos \theta_6 = \frac{[a_1 a_4 a_6 + a_2 a_3 a_5 + a_4 (a_1^2 - a_2^2) \cos \theta_1] E(\theta_1)}{a_4 [(a_6 + a_1 \cos \theta_1)^2 + a_2^2 \sin^2 \theta_1]} + \frac{(a_2 a_3 a_6 - a_1 a_4 a_5) \cos \theta_1 + (a_2 a_3 a_6 - a_1 a_4 a_5)}{a_4 [(a_6 + a_1 \cos \theta_1)^2 + a_2^2 \sin^2 \theta_1]} \quad (14)$$

Il est ensuite aisé de déterminer les expressions des autres angles en fonction de θ_1 et θ_6 :

$$\sin \theta_2 = \frac{a_2 \sin \theta_6}{a_5 - a_1 E(\theta_1) + (a_1 \cos \theta_1 + a_6) \cos \theta_6} \quad (15)$$

$$\sin \theta_3 = \frac{a_4 \sin \theta_1 \sin \theta_6}{\sin \theta_2 [a_5 E(\theta_1) + a_6 \cos \theta_1 + a_1]} \quad (16)$$

$$\sin \theta_4 = \frac{\sin \theta_2 [a_5 E(\theta_1) + a_6 \cos \theta_1 + a_1]}{a_4} \quad (17)$$

$$\sin \theta_5 = \frac{a_4 \sin \theta_1}{a_5 E(\theta_1) + a_6 \cos \theta_1 + a_1} \quad (18)$$

dans lesquelles le terme $E(\theta_1)$ est donné par :

$$E(\theta_1) = \frac{-a_5 (a_6 \cos \theta_1 + a_1) + a_4 \sqrt{(a_5^2 - a_4^2) \sin^2 \theta_1 + (a_6 \cos \theta_1 + a_1)^2}}{a_5^2 - a_4^2} \quad (19)$$

Les relations précédentes représentent les cinq équations de fermeture, c'est-à-dire les équations d'entrée-sortie du mécanisme orthogonal de Bricard.

On trouve dans [10] les détails des longs et difficiles calculs qui ont conduit à ces résultats sans faire appel à un logiciel de calcul formel.

Dans le cas particulier où les longueurs a_4 et a_5 sont égales, la relation (19) s'écrit :

$$E(\theta_1) = \frac{a_4^2 \sin^2 \theta_1 - (a_6 \cos \theta_1 + a_1)^2}{2a_4 (a_6 \cos \theta_1 + a_1)} \quad (20)$$

Les variations des différents angles θ_i en fonction de l'angle d'entrée θ_1 sont représentées dans les Figs. 2(a) à 2(e).

Pour cette application numérique, on a considéré six éléments différents pour lesquels les longueurs satisfont la quatrième relation du système (2) :

$$a_1 = 23; \quad a_2 = 41; \quad a_3 = 28; \quad a_4 = 44; \quad a_5 = 50; \quad a_6 = 14 \quad (21)$$

Ces valeurs numériques sont celles utilisées par [7] et les courbes présentées sont en tout point conformes à celles publiées par Wohlhart, qui a utilisé une méthode en partie numérique s'appuyant sur la trigonométrie sphérique.

On observe que les variations des angles pairs sont symétriques par rapport à l'axe vertical. Cela est dû au fait que le mécanisme exécute des mouvements identiques par rapport à sa position verticale plane ($\theta_1 = 0^\circ$). Dans cette

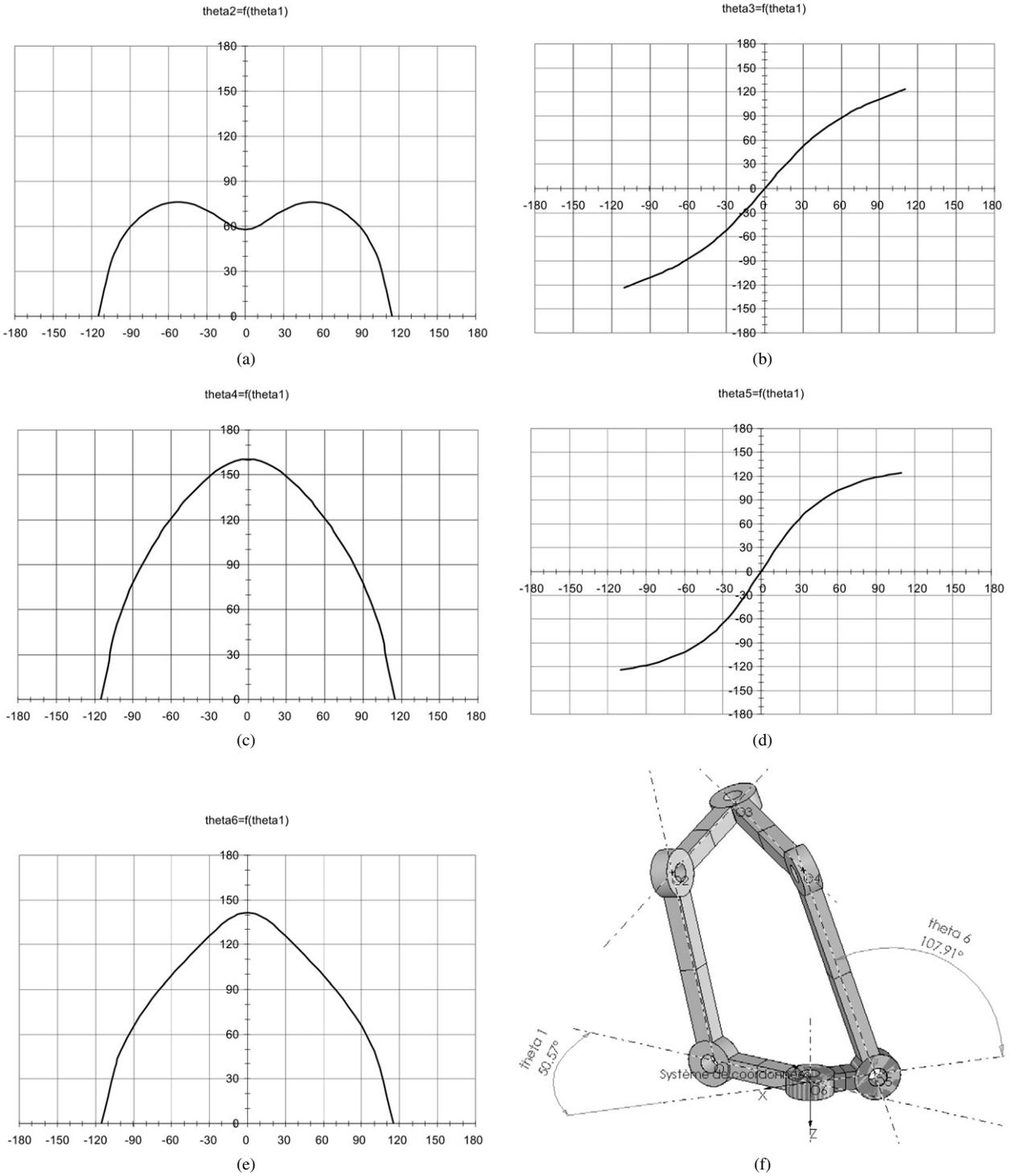


Fig. 2. Les courbes de variation des angles θ_i et le modèle CAO du mécanisme.

Fig. 2. The input-output functions and the CAD model.

position les angles impairs sont nuls, car les axes des éléments qui les composent sont alignés. A partir de la Fig. 2(f), on imagine aisément que, pour $\theta_1 = 0^\circ$, le mécanisme se comporte comme un triangle dont chaque côté est composé de deux barres.

L'ensemble de ces résultats analytiques a été confirmé grâce au logiciel de simulation *MotionWorks*.

Remarque. Les courbes présentées concernent seulement les positions du mécanisme dans le demi-espace $z < 0$ (Fig. 2(f)), car, pour le demi-espace $z > 0$, le mécanisme a un comportement symétrique par rapport au plan horizontal $z = 0$.

4. Conclusion

Dans cette Note, on a présenté les grandes lignes d'une méthode analytique qui permet d'obtenir de façon complète les cinq équations exprimant la fermeture du mécanisme orthogonal de Bricard et sa mobilité. Le grand avantage d'un calcul analytique est de mettre en évidence l'influence des différents paramètres et, dans le cas du mécanisme orthogonal de Bricard, de donner avec précision les variations des coordonnées des points particuliers du mécanisme en fonction de l'angle d'entrée.

C'est ainsi qu'il a été démontré [11] que les extrémités des barres, réparties en deux groupes de trois points, définissent ainsi deux plans qui restent constamment parallèles pendant les déformations du mécanisme. On démontre aussi que les deux groupes de trois points définissent des cercles concentriques dont l'axe reste fixe si les longueurs des six éléments du mécanisme sont identiques.

Des applications industrielles de ces nouvelles propriétés du mécanisme de Bricard sont en cours de développement. Elles utiliseront son architecture pour en faire un translateur de précision et un dispositif automatique de centrage.

Annexe A

La matrice homogène de passage (dimension quatre) du système $i - 1$ au système i :

$${}_{i-1}Q_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

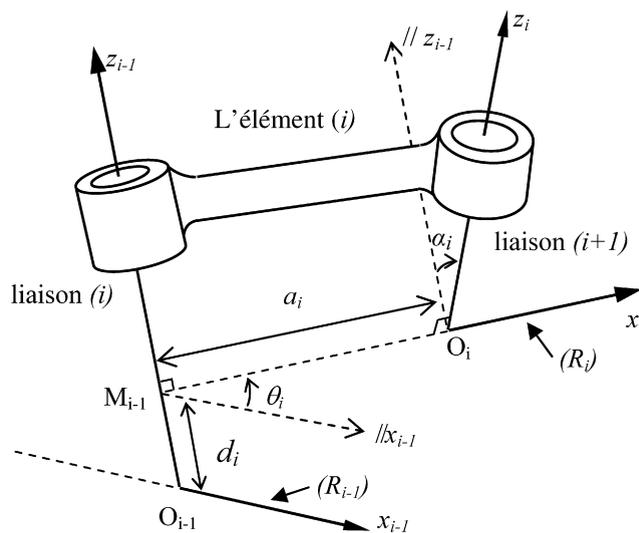


Fig. 3. Les paramètres de Denavit–Hartenberg.

Fig. 3. The Denavit–Hartenberg parameters.

Annexe B

Système des douze équations exprimant la fermeture du mécanisme orthogonal de Bricard (Fig. 1) :

$$\cos \theta_4 \cos \theta_5 \cos \theta_6 - \sin \theta_4 \sin \theta_6 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - \sin \theta_1 \sin \theta_3 \quad (\text{B.1})$$

$$-\cos \theta_4 \sin \theta_5 = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \cos \theta_1 \sin \theta_3 \quad (\text{B.2})$$

$$\cos \theta_4 \cos \theta_5 \sin \theta_6 + \sin \theta_4 \cos \theta_6 = -\sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (\text{B.3})$$

$$a_6 \cos \theta_4 \cos \theta_5 \cos \theta_6 - a_6 \sin \theta_4 \sin \theta_6 + a_5 \cos \theta_4 \cos \theta_5 + a_4 \cos \theta_4 \\ = -a_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 - a_2 \cos \theta_3 - a_3 \quad (\text{B.4})$$

$$\sin \theta_4 \cos \theta_5 \cos \theta_6 + \cos \theta_4 \sin \theta_6 = -\cos \theta_1 \sin \theta_2 \quad (\text{B.5})$$

$$\sin \theta_4 \sin \theta_5 = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \quad (\text{B.6})$$

$$-\sin \theta_4 \cos \theta_5 \sin \theta_6 + \cos \theta_4 \cos \theta_6 = \cos \theta_2 \quad (\text{B.7})$$

$$a_6 \sin \theta_4 \cos \theta_5 \cos \theta_6 + a_6 \cos \theta_4 \sin \theta_6 + a_5 \sin \theta_4 \cos \theta_5 + a_4 \sin \theta_4 = a_1 \sin \theta_2 \quad (\text{B.8})$$

$$-\sin \theta_5 \cos \theta_6 = \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \sin \theta_1 \cos \theta_3 \quad (\text{B.9})$$

$$-\cos \theta_5 = \sin \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \theta_3 \quad (\text{B.10})$$

$$\sin \theta_5 \sin \theta_6 = \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (\text{B.11})$$

$$a_6 \sin \theta_5 \cos \theta_6 + a_5 \sin \theta_5 = a_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3 + a_2 \sin \theta_3 \quad (\text{B.12})$$

Références

- [1] G.T. Bennett, A new mechanism, *Engineering* 76 (1903) 777–778.
- [2] M. Goldberg, New five-bar and six-bar linkages in three dimensions, *Trans. ASME* 65 (1943) 649–663.
- [3] C. Mavroidis, B. Roth, Analysis and synthesis of overconstrained mechanisms, in: *Proc. of the 1994 ASME Design Technical Conferences*, vol. DE-70, Minneapolis, September 1994, pp. 115–133.
- [4] R. Bricard, Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé, *J. Math. Pures Appl. Liouville* 3 (1897) 113–148.
- [5] R. Bricard, *Leçons de Cinématique*, Tome II – Cinématique Appliquée, Gauthier-Villars, Paris, 1927.
- [6] J.E. Baker, An analysis of the Bricard linkages, *Mech. Mach. Theory* 15 (1980) 267–286.
- [7] K. Wohlhart, The two types of the orthogonal Bricard linkage, *Mech. Mach. Theory* 28 (1993) 809–817.
- [8] J. Denavit, R.S. Hartenberg, A kinematic notation for lower-pair mechanism based on matrices, *J. Appl. Mech.* 22 (1955) 215–221.
- [9] K.J. Waldron, Overconstrained linkages, *Environment and Planning B* 6 (1979) 393–402.
- [10] L. Racila, Contributions sur les mécanismes surcontraints à six liaisons rotoïdes, Mémoire de thèse, Université de Franche-Comté, Besançon, 2006.
- [11] L. Racila, M. Dahan, Bricard mechanism used as translator, in: *Proc. 12th World Congress IFToMM*, vol. 3, Besançon, France, 2007, pp. 337–341.