Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Mecanique 336 (2008) 434–439
Comptes Rendus Mecanique
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Intégrale duale en mécanique de la rupture

Claude Stolz

Laboratoire de mécanique des solides, École polytechnique, CNRS UMR7649, 91128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 26 décembre 2007 ; accepté après révision le 5 février 2008

Disponible sur Internet le 5 mars 2008

Présenté par Huy Duong Bui

Résumé

On propose une intégrale duale en mécanique de la rupture ductile fondée sur l'énergie complémentaire. L'analyse de la dissipation mécanique en présence ou non de discontinuités mobiles montre que le paramètre énergétique associé à la vitesse de propagation est représenté par une intégrale de contour appropriée exprimée en terme d'énergie libre ou d'énergie complémentaire. On étudie alors l'invariance par rapport au contour de ces intégrales et on interpréte les résultats obtenus. ***Pour citer cet article : C. Stolz, C. R. Mecanique 336 (2008).***

Abstract

Dual approach in fracture mechanics. We propose a dual approach in fracture mechanics based on complementary energy. The analysis of the dissipation shows that the thermodynamical force associated with the evolution of a crack is an energy release rate, form of which depends on the presence or not of mechanical discontinuities. This energy release rate is given as an integral based on free or complementary energy. We analyse the invariance of such integrals and we discuss the obtained results in elastoplasticity. ***To cite this article: C. Stolz, C. R. Mecanique 336 (2008).***

Mots-clés : Rupture ; Mécanique de la rupture ; Intégrale duale ; Rupture ductile

Keywords: Rupture; Fracture mechanics; Dual Integral; Ductile Fracture

Abridged English version

We study the propagation of a crack in the direction $\underline{e}_1$ in a volume Ω. Traction $\underline{\mathrm{T}}^d$ are prescribed on $\partial\Omega_{\mathrm{T}}$, on the complementary part of external boundary the displacement $\underline{u}^d$ is imposed. The crack is supposed to be in a stress free state.

Classical equations in linear elasticity problem are given in (1), ε is the strain, σ is the Cauchy stress. The Cauchy stress satisfies the conservation of the momentum. In linear elasticity, we define the potential energy $\mathcal{E}(\underline{u}, l)$ and the complementary energy $\mathcal{E}^*(\sigma, l)$. The thermodynamical force $\mathcal{G}$ associated with the propagation of the crack is derived

Adresse e-mail : stolz@lms.polytechnique.fr.

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2008.02.002

from the potential energy (3) or the complementary energy (5) as shown by H.D. Bui in 1973 in terms of energy release rate. Connection with J Integral has been made.

Introducing two Eshelby type tensors p, p^* (8), we obtain the classical conservations laws (11). These conservations laws are now extended to other type of constitutive law, especially in elastoplasticity.

The case of perfect plasticity is first considered. For such a constitutive law, the local free energy $w(\varepsilon - \varepsilon_p)$ and the complementary energy $w^*(\sigma)$ take new values (13). The definition of the potential energy, and of complementary energy with these new definitions are preserved, and the release rate is defined by (14). The properties of invariance are due to the properties of Eshelby tensors (15), and then by the same reasoning as in elasticity $\mathcal{G}, \mathcal{G}^*$ are invariant with respect to the choice of the curve Γ, and $\mathcal{G} = J_s$.

Then we have finally the definition of the energy release rate which satisfies (16), (17) and we have the relations (18), (19). The dual integral form is obtained (21). The case with hardening is solved by the same arguments. The results are given in (22)–(24). For quadratic energy a simplified form is obtained (26).

To study the evolution of the crack it is useful to give the variations of the release rate. These variations are easily derived in the local frame in translation with the crack front at the velocity $\dot{l}$. Introducing $\mathring{f}$ the rate of f in this frame, the variations of the energy release rate are given by (29), (30).

The last term is due to couplings between the hardening and the strain. The case of perfect plasticity is recover, if the hardening α is reduced to the plastic strain ε^p and the local free energy takes the form $w(\varepsilon - \varepsilon_p)$.

1. Introduction

L'analyse mécanique de la propagation des fissures dans un milieu élastique a permis la modélisation de la rupture fragile. En particulier la méthode énergétique conduit aux définitions des intégrales J de Rice–Eshelby et de l'intégrale duale I de Bui [1] dont les interprétations énergétiques ont été données respectivement comme taux de restitution d'énergie potentielle ou complémentaire d'autres intégrales invariantes ont été proposées en [2].

Dans le cas de la rupture ductile, ces notions doivent être étendues. Une description énergétique a été proposée par Nguyen [3] dont nous pouvons résumer les résultats de la façon suivante.

Soit $w(\varepsilon, \alpha)$ la densité d'énergie libre isotherme emmagasinée et Γ un contour fermé entourant la pointe de la fissure, on note J_Γ l'intégrale

$$J_\Gamma = \int_\Gamma \rho\left(w + \frac{1}{2}\underline{v}^2\right)n_1 - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1}\, \mathrm{d}S$$

et on obtient l'expression de la dissipation

$$D_m = \mathcal{G}\dot{l} + \int_\Omega d\, \mathrm{d}\Omega$$

où $d = \sigma : \dot{\varepsilon} - \rho\dot{w}$ est la dissipation locale par unité de volume, la quantité $\mathcal{G}$ est la force due aux singularités en fond de fissure

$$\mathcal{G} = \lim_{\Gamma \to 0} J_\Gamma$$

La notation $\Gamma \to 0$ signifie que le rayon maximum du contour tend vers zéro. En propagation quasistatique les termes d'inertie sont négligeables et $\mathcal{G}$ est lié au taux de restitution d'énergie défini par la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la longueur de fissure. En dynamique isotherme l'hamiltonien remplace l'énergie potentielle comme montré en [5].

1.1. Cadre de l'étude

On étudie la propagation d'une fissure droite de direction $\underline{e}_1$ dans un milieu continu de volume Ω. Sur la frontière $\partial\Omega_\mathrm{T}$, on impose des efforts $\underline{\mathrm{T}}^d$ et sur la partie complémentaire $\partial\Omega_\mathrm{u}$ le déplacement $\underline{u}^d$ est donné. Les lèvres de la fissure sont supposées libres de contrainte.

En mécanique de la rupture fragile, le comportement du matériau est supposé élastique linéaire, l'énergie de déformation $w(\varepsilon)$ est une fonction quadratique de la déformation ε, laquelle est définie à partir du déplacement $\underline{u}$:

$$w(\varepsilon)=\frac{1}{2}\varepsilon\cdot\mathbf{C}\cdot\varepsilon,\quad \varepsilon=\frac{1}{2}(\operatorname{grad}\underline{u}+\operatorname{grad}^t\underline{u}) \tag{1}$$

On note σ le champ de contrainte associée à la déformation par le comportement élastique linéaire $\sigma=\mathbf{C}:\varepsilon$.

Le critère de propagation d'une fissure est celui proposé par Griffith. Ce critère s'exprime en terme de taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ sous la forme $\mathcal{G}-G_c\leqslant 0$, G_c étant la valeur caractéristique du matériau vis-à-vis de la rupture. Le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}$ est défini à partir de l'énergie potentielle du système $\mathcal{E}$ par

$$\mathcal{E}(\underline{u},l)=\int_{\Omega(l)} w(\varepsilon)\,\mathrm{d}\Omega-\int_{\partial\Omega_{\mathrm{T}}}\underline{\mathrm{T}}^d\cdot\underline{u}\,\mathrm{d}s, \tag{2}$$

$$\mathcal{G}=-\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial l}=\int_{\Gamma} w(\varepsilon)n_1-\underline{n}\cdot\sigma\cdot u_{,1}\,\mathrm{d}s=J_\Gamma \tag{3}$$

La position d'équilibre du système à longueur de fissure l donnée minimise l'énergie potentielle $\mathcal{E}$ sur l'ensemble des champs de déplacements $\underline{u}$ cinématiquement admissibles avec les conditions aux limites en déplacement $\underline{u}=\underline{u}^d$ sur $\partial\Omega_{\mathrm{u}}$. La solution du problème d'équilibre est le champ de déplacement $\underline{u}^{sol}(l,\underline{u}^d,\underline{\mathrm{T}}^d)$.

De même, on définit une approche duale de l'équilibre du système à l'aide de l'énergie complémentaire

$$\mathcal{E}^*(\sigma,l)=-\int_{\Omega(l)} w^*(\sigma)\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega_{\mathrm{u}}}\underline{n}\cdot\sigma\cdot\underline{u}^d\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

Dans cette approche, le taux de restitution d'énergie prend la forme de l'intégrale duale de Bui [1] :

$$I_\Gamma=J_\Gamma=\int_\Gamma -w^*(\sigma)n_1+\underline{n}\cdot\sigma_{,1}\cdot\underline{u}\,\mathrm{d}s \tag{5}$$

L'égalité des deux intégrales de contour résulte de l'égalité des énergies potentielle et complémentaire pour l'état d'équilibre sous le chargement $(\underline{u}^d,\underline{\mathrm{T}}^d)$ du volume Ω à longueur de fissure donnée. On note les relations classiques

$$w^*(\sigma)+w(\varepsilon)=\sigma\cdot\varepsilon,\qquad \int_{V_c}\sigma:\varepsilon(\underline{u})\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\mathcal{C}}\underline{n}\cdot\sigma\cdot\underline{u}\,\mathrm{d}s \tag{6}$$

Lemme. *Pour tout champ $\tilde\sigma$ statiquement admissible* ($\operatorname{div}\tilde\sigma=0$)*, tout champ $\hat\varepsilon$ cinématiquement admissible* ($2\hat\varepsilon=\operatorname{grad}\underline{\hat u}+\operatorname{grad}^t\underline{\hat u}$) *et tout volume fermé de frontière C, nous avons* :

$$\int_{\mathcal{C}}(\tilde\sigma:\hat\varepsilon n_i-\underline{n}\cdot\tilde\sigma_{,i}\cdot\underline{\hat u}-\underline{n}\cdot\tilde\sigma\cdot\underline{\hat u}_{,i})\,\mathrm{d}s=0 \tag{7}$$

Les deux intégrales I_Γ et J_Γ sont indépendantes du contour Γ. Prenons un contour fermé C, composé de deux contours Γ_1 et Γ_2 entourant la pointe de la fissure ($V_{\Gamma_1}\subset V_{\Gamma_2}$) complétés par les lèvres de la fissure. Introduisons les tenseurs d'Eshelby primal p et dual p^* :

$$p=w\mathbf{I}-\sigma\cdot\nabla\underline{u},\qquad p^*=-w^*\mathbf{I}+\nabla\sigma\cdot\underline{u} \tag{8}$$

ces tenseurs vérifient les relations

$$0=\int_{V_c}\operatorname{div}p\,\mathrm{d}\Omega=\int_{\mathcal{C}}\underline{n}\cdot p\,\mathrm{d}s,\qquad 0=\int_{V_c}\operatorname{div}p^*\,\mathrm{d}\Omega=\int_{V_c}\underline{n}\cdot p^*\,\mathrm{d}s \tag{9}$$

A l'état d'équilibre nous avons : $w(\varepsilon)=w^*(\sigma)=\frac{1}{2}\sigma:\varepsilon$ et donc

$$p-p^*=\sigma:\varepsilon\mathbf{I}-(\sigma\cdot\nabla\underline{u}+\nabla\sigma\cdot\underline{u})\ ;\qquad p+p^*=\nabla\sigma\cdot\underline{u}-\sigma\cdot\nabla\underline{u} \tag{10}$$

Sur les lévres de la fissure, les contributions $\underline{n} \cdot p \cdot \underline{e}_1$ et $\underline{n} \cdot p^* \cdot \underline{e}_1$ sont nulles, ce qui assure l'invariance par rapport au contour des intégrales I_Γ et J_Γ, notées maintenant I et J. Compte tenu des propriétés de p et p^* ainsi que du lemme, pour un état d'équilibre nous obtenons :

$$I + J = \int_\Gamma \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, \mathrm{d}s, \qquad J - I = \int_\Gamma (w + w^*) n_1 - \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, \mathrm{d}s = 0 \tag{11}$$

1.2. Cas de l'élasto-plasticité parfaite

En plasticité parfaite Nguyen [3] a proposé un critère de type Griffith généralisé $J_s \leqslant G_c$ où

$$J_s = \lim_{\Gamma \to S} \int_\Gamma w(\varepsilon - \varepsilon^p) n_1 - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_1 \, \mathrm{d}s \tag{12}$$

S désigne ici la surface de discontinuité des champs de vitesses lors de la propagation ($[\underline{\dot{u}}]_S + \dot{l}[\underline{u}_{,1}]_S = 0$).

On introduit maintenant la densité d'énergie complémentaire

$$w^*(\sigma) = \sigma : (\varepsilon - \varepsilon^p) - w(\varepsilon - \varepsilon^p) \tag{13}$$

Les définitions des énergies potentielle $\mathcal{E}$ et complémentaire $\mathcal{E}^*$ demeurent pour ces nouvelles densités. A l'état d'équilibre pour un champ de déformation plastique donné, ces deux énergies sont égales à la solution du problème d'équilibre, il est immédiat de montrer que

$$I_s = J_s = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial l} = -\frac{\partial \mathcal{E}^*}{\partial l} \tag{14}$$

Comme précédemment considérons les tenseurs p et p^*.

$$0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p \, \mathrm{d}\omega + \int_{V_c} \sigma : \nabla \varepsilon^p \, \mathrm{d}\omega, \qquad 0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p^* \, \mathrm{d}\omega - \int_{V_c} \nabla \sigma : \varepsilon^p \, \mathrm{d}\omega \tag{15}$$

pour tout volume fermé extérieur aux lignes de discontinuités des champs mécaniques. A l'aide des propriétés de régularité des champs mécaniques, pour les mêmes raisons sur p et p^* les intégrales

$$\mathcal{G} = J_\Gamma + \int_{\Omega_\Gamma} \sigma : \varepsilon^p_{,1} \, \mathrm{d}\Omega \tag{16}$$

$$\mathcal{G}^* = I_\Gamma - \int_{\Omega_\Gamma} \sigma_{,1} : \varepsilon^p \, \mathrm{d}\Omega \tag{17}$$

sont invariantes par rapport au contour, on en déduit que

$$\mathcal{G} + \mathcal{G}^* = 2J_s = \int_\Gamma \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega_\Gamma} \sigma : \varepsilon^p_{,1} - \sigma_{,1} : \varepsilon^p \, \mathrm{d}\Omega \tag{18}$$

$$\mathcal{G} - \mathcal{G}^* = 0 = \int_\Gamma (w + w^*) n_1 - \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \, \mathrm{d}S + \int_{\Omega_\Gamma} (\sigma : \varepsilon^p) \, \mathrm{d}\Omega \tag{19}$$

Faisons la somme et faisons tendre le contour Γ vers la ligne de discontinuité S, nous avons

$$\mathcal{G} + \mathcal{G}^* = I_s + J_s = \int_S \big(\underline{n} \cdot [\sigma_{,1}]_S \cdot \underline{u} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot [\underline{u}_{,1}]_S \big) \, \mathrm{d}s \tag{20}$$

Ainsi

$$I_s = \lim_{\Gamma \to S} \int_\Gamma -w^*(\sigma) n_1 + \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u} \, \mathrm{d}s \tag{21}$$

1.3. Cas de l'élastoplasticité

Le comportement est défini par l'énergie stockée isotherme $w(\varepsilon, \alpha)$ où α désigne maintenant des paramètres internes. Les équations d'état définissent les forces associées aux paramètres d'état

$$\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}, \qquad A = -\frac{\partial w}{\partial \alpha} \tag{22}$$

Cette énergie est supposée convexe de ces arguments. On définit comme précédemment l'énergie complé mentaire $w^*(\sigma, A) = \sigma : \varepsilon - A \cdot \alpha - w(\varepsilon, \alpha)$. On se place à un état d'équilibre, les contraintes σ vérifient les équations d'équilibre et les conditions aux limites, les forces A appartiennent au domaine d'élasticité du matériau.

On introduit comme précédemment les tenseurs p et p^*, on obtient les propriétés

$$0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p \,\mathrm{d}\Omega + \int_{V_c} A \cdot \nabla\alpha \,\mathrm{d}\Omega \ ; \qquad 0 = \int_{V_c} \operatorname{div} p^* \,\mathrm{d}\Omega - \int_{V_c} \nabla A \cdot \alpha \,\mathrm{d}\Omega \tag{23}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment

$$\mathcal{G} = J_\Gamma + \int_{\Omega_\Gamma} A \cdot \alpha_{,1} \,\mathrm{d}\Omega \tag{24}$$

$$\mathcal{G}^* = I_\Gamma - \int_{\Omega_\Gamma} A_{,1} : \alpha \,\mathrm{d}\Omega \tag{25}$$

Les propriétés $\mathcal{G} = J_s$ sont naturellement conservées. Lorsque l'énergie w est une forme quadratique, pour un état d'équilibre ($w = w^* = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon - \frac{1}{2}A : \alpha$) on obtient la forme particulière

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}\int_\Gamma \underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{u} - \underline{n} \cdot \sigma \cdot \underline{u}_{,1} \,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\int_{\Omega_\Gamma} A : \alpha_{,1} - A_{,1} : \alpha \,\mathrm{d}\Omega \tag{26}$$

2. Application au problème d'évolution d'une fissure

Pour décririe l'évolution des fissures, on considère un critère de Griffith défini par

$$J_s \leqslant G_c, \quad \dot{l} = 0, \qquad J_s = G_c, \quad \dot{l} \geqslant 0 \tag{27}$$

Le problème d'évolution est alors déterminé par la relation

$$\dot{J}_s(\dot{l} - \mu) \geqslant 0 \tag{28}$$

pour tout $\mu \geqslant 0$ aux points où $J_s = G_c$. Il convient donc de caractériser $\dot{J}_s$. Pour cela, on considère un volume V_Γ en translation avec la fissure à la vitesse $\dot{l}$. On note $\mathring{f}$ la vitesse de f dans le repère mobile de V_Γ. La ligne de discontinuité avance à la vitesse de propagation normale associée à la translation $\dot{l}\underline{e}_1$. Dans ce repère, la variation de J_s est définie par

$$\dot{\mathcal{G}} = \int_S [\sigma_{,1}]_S : \mathring{\underline{u}} - \mathring{\sigma} : [\underline{u}_{,1}]_S - [A\mathring{\alpha}]_S \,\mathrm{d}s \tag{29}$$

ce qui s'exprime aussi sous la forme

$$\dot{\mathcal{G}} = \int_\Gamma (\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \mathring{\underline{u}} - \underline{n} \cdot \mathring{\sigma} \cdot \underline{u}_{,1}) \,\mathrm{d}s + \int_{\Omega_\Gamma} (\mathring{A} : \alpha_{,1} - A_{,1} : \mathring{\alpha}) \,\mathrm{d}\Omega \tag{30}$$

On notera que le dernier terme contient uniquement des termes de couplage entre ε et α. Pour l'énergie $w(\varepsilon, \alpha)$ ce terme est équivalent à

$$-\mathring{A} : \alpha_{,1} + A_{,1} : \mathring{\alpha} = \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\varepsilon} \bullet (\mathring{\varepsilon} \otimes \alpha_{,1} - \mathring{\alpha} \otimes \varepsilon_{,1}) = \mathring{\sigma} : \varepsilon_{,1} - \sigma_{,1} : \mathring{\varepsilon} \tag{31}$$

ainsi nous avons

$$\dot{\mathcal{G}} = \int_{\Gamma} (\underline{n} \cdot \sigma_{,1} \cdot \underline{\mathring{u}} - \underline{n} \cdot \mathring{\sigma} \cdot \underline{u}_{,1})\,\mathrm{d}s + \int_{\Omega_\Gamma} (\mathring{\sigma} : \varepsilon_{,1} - \sigma_{,1} : \mathring{\varepsilon})\,\mathrm{d}\Omega \tag{32}$$

Dans le cas de la plasticité parfaite, on retrouve le résultat de Nguyen [3].

3. Conclusion

Nous avons étendu l'intégrale duale de Bui au cas des matériaux élastoplastiques. Nous avons défini le taux de restitution d'énergie à l'aide de l'énergie complémentaire et donné sa variation. Le problème en vitesse de propagation quasistatique fera l'objet d'une note ultérieure généralisant les résultats présentés en [4] au cas de l'élastoplasticité avec écrouissage.

Références

[1] Bui Hui Duong, Dualité entre les intégrales indépendantes du contoure dans la théorie ds solides fissurés, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 376 (1973) 1425–1428.
[2] V.A. Lubarda, X. Markenscoff, Dual conservation integrals and energy release rates, Int. J. Solids Structures 44 (2007) 4079–4091.
[3] Nguyen Quoc Son, Critère de propagation en rupture ductile, C. R. Acad. Sci. Paris 301 (1985) 567–570.
[4] Nguyen Quoc Son, C. Stolz, Sur le problème d'évolution en vitesse de propagation de fissure et de déplacement en rupture fragile ou ductile, C. R. Acad. Sci. Paris 301 (1985) 661–664.
[5] C. Stolz, R.-M. Pradeilles-Duval, Approche éneergétique de la propagation dynamique de discontinuités mécaniques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. IIb 322 (1996) 525–532.