Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Mecanique 336 (2008) 545–551
COMPTES RENDUS MECANIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRAS2B/

Généralisation des intégrales T et A à la viscoélasticité

Rostand Moutou Pitti *, Frédéric Dubois, Christophe Petit

Groupement d'étude des matériaux hétérogènes-axe génie civil et durabilité (GEMH-GCD), Université de Limoges, Centre universitaire d'Egletons, 19300 Egletons, France

Reçu le 21 novembre 2007 ; accepté après révision le 11 mars 2008

Disponible sur Internet le 28 avril 2008

Présenté par Huy Duong Bui

Résumé

Dans le cadre de la mécanique de la rupture, ce papier présente la généralisation des intégrales T et A au comportement viscoélastique. Le formalisme du développement analytique repose sur les théorèmes de conservation énergétiques, des intégrales indépendantes et une combinaison de champs de déplacements, et de champs thermiques réels et virtuels induisant une forme quadrilinéaire de l'énergie libre. En vue d'une simulation par le code aux éléments finis, il est présenté une forme modélisable de l'intégrale caractérisée par l'indépendance du domaine d'intégration pendant la propagation de la fissure. La généralisation à la viscoélasticité est introduite grâce au modèle de Kelvin Voigt généralisé. ***Pour citer cet article : R. Moutou Pitti et al., C. R. Mecanique 336 (2008).***

Abstract

Viscoelastic generalisation of T and A integrals. The viscoelastic generalization of T and A integrals is presented in this Note. The analytical developments are based on conservative laws, the non-dependent integrals and the combination of real and virtual displacement and thermals fields inducing a quadrilinear form of the strain energy density. In order to simulate this integral parameter by finite element software, a modeling form ensuring the non-dependent path integral during crack growth process is presented. The introducing of viscoelastic behavior is realized with the generalized Kelvin Voigt model. ***To cite this article: R. Moutou Pitti et al., C. R. Mecanique 336 (2008).***

Mots-clés : Rupture ; Viscoélasticité ; Modes mixtes ; Champs thermiques ; Intégrales indépendantes ; Eléments finis

Keywords: Rupture; Viscoelasticity; Mixed modes; Thermal fields; Path independent integrals; Finite element

Abridged English version

Timber structures are submitted to mechanical fields, but also to moisture and thermal fields. In this context, the fracture behavior must integrate these parameters in different analytical formulations. Bui and Proix [2,3] have proposed the T integral with thermal fields from the bilinear form of M [4], but its expression is limited to the

* Auteur correspondant.
Adresse e-mail : rostand.moutou-pitti@etu.unilim.fr (R. Moutou Pitti).

1631-0721/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2008.03.002

elastic case. In this Note, thermal variations are taken into account in the M-integral developed by Moutou Pitti et al. [5], which separates mixed modes fracture during a crack growth process in viscoelastic media. On the basis of the J-integral [1], the crack growth approach is usually based upon an energy balance, or conservative law, through Noether's theorem [6], integrating a quadrilinear form of the free energy density $F^\bullet$, see expression (1). In an Arbitrary Lagrangian Eulerian description (ALE), this form is combined with real and virtual displacements [7], added to thermal fields (2) [2,3,8], and allows us to obtain a Lagrangian variation (3). If we suppose that the crack δa is oriented in the x_1-direction (see Fig. 1), with the combination of displacements and thermal fields (2), and derivation forms (4) in Eq. (3), relation (5) is deduced. Applying a Gauss–Ostrogradski's transformation to the last equation, a generalization of Noether's theorem to the thermal process (6) is obtained. ∂V is a closed curvilinear contour around the crack tip, and (Γ_1), (Γ_2), (see Fig. 1) are curvilinear contours. According to the non-dependence domain (9), the quadrilinear form of the free energy density (12) and its derivation (13), the T_v-integral (15) is obtained. In order to model this last expression, a volume contour is defined by introducing relation (16) and the θ field [9]. Using the equilibrium equations, several integrations and derivations (17), (18), the final form of A_v-integral (19) is proposed. The first term of this relation introduce a stationary crack, the second the pressure on the crack's edges, and the third, the crack growth process. The viscoelastic generalization is introduced according to spectral creep decomposition function with the Kelvin Voigt generalized model, Fig. 2.

1. Introduction

Les structures bois placées en extérieur sont, dans leur majorité, soumises non seulement aux sollicitations mécaniques complexes, mais aussi aux différents chargements hydriques ou thermiques, précurseurs de fissurations diverses. Il apparaît donc nécessaire d'incorporer, dans les différentes formulations analytiques de la mécanique de la rupture viscoélastique, ces deux derniers paramètres environnementaux. Sur la base de l'intégrale de Rice J [1], Bui et Proix [2,3] ont développé les intégrales T et A qui résultent d'une extension, aux champs thermiques, de l'intégrale M [4] découplant les modes mixtes de rupture en milieu élastique. Grâce à la généralisation de l'intégrale M établie par R. Moutou Pitti et al. [5], ces approches sont étendues à un comportement viscoélastique. La base du développement initial s'appuie sur les théorèmes de conservation énergétique et sur une combinaison des champs réels, virtuels mécaniques et thermiques cinématiquement admissibles. Munie d'une forme quadrilinéaire de l'énergie libre élastique et l'application successible du théorème de Gauss–Ostrogradski, l'intégrale T_v, ainsi que sa forme numérique modélisable A_v, sont établies. L'extension de A_v au comportement viscoélastique réalisée par décomposition spectrale du tenseur de fluage introduite par un modèle de Kelvin Voigt Généralisé.

2. Conservation de l'énergie

Afin d'intégrer le champ thermique dans la définition de l'équilibre énergétique pour un milieu fissuré Ω, le théorème de Noether [6] postule que la variation du Lagrangien L est nulle pour tous temps t choisi arbitrairement, tous champs de déplacement réels δu et virtuels δv et tous champs thermiques réels $\delta\tau^u$ et virtuels $\delta\tau^v$ cinématiquement admissibles :

$$\delta L = \int_t\int_V \delta F^\bullet \,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

où $F^\bullet$ désigne une forme quadrilinéaire de l'énergie libre définie initialement par Chen [4]. Sachant que le système arbitraire est soumis au champ thermique, avec une configuration Lagrangienne Eulérienne Arbitraire [7] étendue au champ thermique [2,3,8], on écrit :

$$\begin{array}{lll} \delta\tilde{v}_i = \delta v_i\ ; & \delta\tilde{v}_i = 0\ ; & \delta\tilde{v}_i = \delta v_i + \delta v_i^* \\ \delta\tilde{u}_i = \delta u_i\ ; & \delta\tilde{u}_i = 0\ ; & \delta\tilde{u}_i = \delta u_i + \delta u_i^* \\ \delta\tilde{\tau}^v = \delta\tau^v\ ; & \delta\tilde{\tau}^v = 0\ ; & \delta\tilde{\tau}^v = \delta\tau^v + \delta\tau^{v^*} \\ \delta\tilde{\tau}^u = \delta\tau^u\ ; & \delta\tilde{\tau}^u = 0\ ; & \delta\tilde{\tau}^u = \delta\tau^u + \delta\tau^{u^*} \end{array} \quad \begin{pmatrix} \tilde{v}, \tilde{\tau}^v : \text{ représentation Eulérienne} \\ v^*, \tilde{\tau}^{v^*} : \text{ représentation Lagrangienne} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Afin de simplifier la démarche analytique, nous définissons une variable temporelle et spatiale $\alpha(x_1, x_2, t)$ qui, associée à l'expression (2) dans le Lagrangien (1), donne :

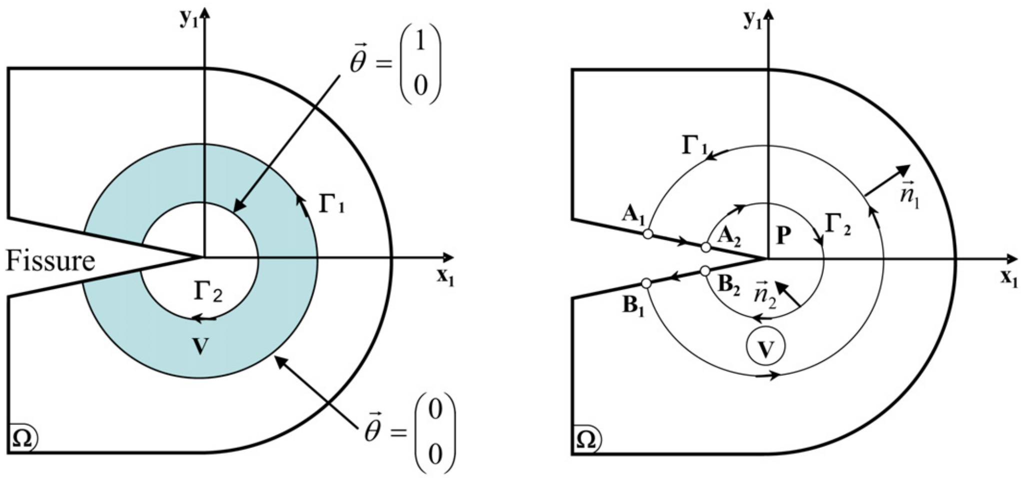

Fig. 1. Domaines d'intégration.

Fig. 1. Integration domain.

$$\delta L = \iint\limits_{V\ t} \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u^*_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v^*_{i,\alpha} + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^u_{,\alpha}} \delta \tau^u + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^u_{,\alpha}} \delta \tau^{u^*} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^v_{,\alpha}} \delta \tau^v + \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^v_{,\alpha}} \delta \tau^{v^*} \right) \mathrm{d}V \,\mathrm{d}t = 0 \tag{3}$$

Si nous supposons que la fissure de longueur δa est orientée dans la direction x_1, Fig. 1, nous obtenons les définitions suivantes :

$$\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u^*_{i,\alpha} = \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \delta u^*_i \right)_{,\alpha} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \delta u^*_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v^*_{i,\alpha} = \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \delta v^*_i \right)_{,\alpha} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} \right)_{,\alpha} \delta v^*_i$$
$$\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^u_{,\alpha}} \delta \tau^{u^*}_{,\alpha} = \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^u_{,\alpha}} \delta \tau^{u^*} \right)_{,\alpha} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^u_{,\alpha}} \right)_{,\alpha} \delta \tau^{u^*} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^v_{,\alpha}} \delta \tau^{v^*}_{,\alpha} = \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^v_{,\alpha}} \delta \tau^{v^*} \right)_{,\alpha} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^v_{,\alpha}} \right)_{,\alpha} \delta \tau^{v^*}$$
$$\delta u_{i,\alpha} = \frac{\partial u_{i,\alpha}}{\partial x_k} \delta a \quad \text{et} \quad \delta v_{i,\alpha} = \frac{\partial v_{i,\alpha}}{\partial x_k} \delta a\ ; \qquad \delta \tau^u_{,\alpha} = \frac{\partial \tau^u}{\partial x_k} \delta a \quad \text{et} \quad \delta \tau^u_{,\alpha} = \frac{\partial \tau^v}{\partial x_k} \delta a \tag{4}$$

En s'appuyant sur une description Eulérienne (2), la prise en compte, de l'équation (4) dans le Lagrangien (3), conduit à :

$$\delta L = \iint\limits_{V\ t} \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,j}} u_{i,k} \right)_{,j} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,j}} v_{i,k} \right)_{,j} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^u_{,j}} \tau^u_{,k} \right)_{,j} - \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^v_{,j}} \tau^v_{,k} \right)_{,j} \right) \delta a \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t$$
$$+ \int\limits_V \int\limits_t \left(\left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial u_{i,\alpha}} u_{i,k} \right)_{,\alpha} - F^\bullet_{,k}(u) + \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial v_{i,\alpha}} v_{i,k} \right)_{,\alpha} - F^\bullet_{,k}(v) + \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^u_{,\alpha}} \tau^u_{,k} \right)_{,\alpha} - F^\bullet_{,k}(\tau^u) \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial F^\bullet}{\partial \tau^v_{,\alpha}} \tau^v_{,k} \right) - F^\bullet_{,k}(\tau^v)_{,\alpha} \right) \delta a \,\mathrm{d}V \,\mathrm{d}t = 0 \tag{5}$$

Par application du théorème de Gauss–Ostrogradski au premier terme de l'équation (5) et en considérant le Lagrangien stationnaire pour toute variation δa de la fissure, on obtient le théorème de Noether, intégrant un champ thermique (∂V est un contour fermé délimitant V), et ce, quel que soit le temps t :

$$\delta L=\int_{\partial V}\left(F^{\bullet}n_k-\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial u_{i,j}}u_{i,k}+\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial v_{i,j}}v_{i,k}+\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^u_{,j}}\tau^u_{,k}+\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^v_{,j}}\tau^v_{,k}\right)n_j\right)\mathrm{d}\Gamma$$
$$+\int_{V}\left[\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial u_{i,\alpha}}u_{i,k}\right)_{,\alpha}+\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial v_{i,\alpha}}v_{i,k}\right)_{,\alpha}+\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^u_{,\alpha}}\tau^u_{,k}\right)_{,\alpha}+\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^v_{,\alpha}}\tau^v_{,k}\right)\right.$$
$$\left.-\left(F^{\bullet}_{,k}(u)+F^{\bullet}_{,k}(v)+F^{\bullet}_{,k}(\tau^u)+F^{\bullet}_{,k}(\tau^v)\right)\right]\mathrm{d}V=\int_{\partial V}I_1\,\mathrm{d}S+\int_{\partial V}I_2\,\mathrm{d}V=0 \tag{6}$$

3. Intégrale T_v

Notons T_v la généralisation de l'intégrale T développée par Bui et Proix [2,3] à la viscoélasticité. Définissons les contours linéiques et surfaciques suivants, Fig. 1 :

$$\partial V=\Gamma_1+B_1B_2+\Gamma_2+A_1A_2 \quad \text{et} \quad V=A(\Gamma_1)+A(\Gamma_2) \tag{7}$$

$A(\Gamma_1)$ et $A(\Gamma_2)$ désignent respectivement les aires délimitées par les contours Γ_1 et Γ_2. En prenant en compte la seconde notation de l'équation (6), on écrit :

$$\int_{\Gamma_1}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{A(\Gamma_1)}I_2\,\mathrm{d}V+\int_{\Gamma}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{A_2A_1}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{B_1B_2}I_1\,\mathrm{d}\Gamma=-\int_{\Gamma_2}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{A(\Gamma_2)}I_2\,\mathrm{d}V \tag{8}$$

Si on intègre dans la relation (8) les orientations des domaines imposées par les normales sortantes n_1 et n_2, respectives aux contours Γ_1 et Γ_2, Fig. 1, on obtient alors :

$$T_v=\int_{\Gamma_1}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{A(\Gamma_1)}I_2\,\mathrm{d}V+\int_{\Gamma}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{A_2A_1}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{B_1B_2}I_1\,\mathrm{d}\Gamma=\int_{\Gamma_2}I_1\,\mathrm{d}\Gamma+\int_{A(\Gamma_2)}I_2\,\mathrm{d}V \tag{9}$$

L'expression (10) montre ainsi, l'indépendance du domaine d'intégration. En faisant tendre $A(\Gamma_2)$ vers 0, cela équivaut à réduire L aux segments A_2A_1 et B_1B_2 avec A_2 et B_2 confondus à la pointe de fissure P. Dans ce cas, avec la relation (6), T_v prend la forme suivante :

$$T_v=\int_{\Gamma_1}\left(F^{\bullet}n_k-\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial u_{i,j}}u_{i,k}+\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial v_{i,j}}v_{i,k}+\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^u_{,j}}\tau^u_{,k}+\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^v_{,j}}\tau^v_{,k}\right)n_j\right)\mathrm{d}\Gamma-\int_{L}\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial u_{i,j}}u_{i,k}+\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial v_{i,j}}v_{i,k}\right)n_j\,\mathrm{d}\Gamma$$
$$+\int_{V}\left(\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial u_{i,\alpha}}u_{i,k}\right)_{,\alpha}+\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial v_{i,\alpha}}v_{i,k}\right)_{,\alpha}+\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^u_{,\alpha}}\tau^u_{,k}\right)_{,\alpha}+\left(\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^v_{,\alpha}}\tau^v_{,k}\right)\right.$$
$$\left.-\left(F^{\bullet}_{,k}(u)+F^{\bullet}_{,k}(v)+F^{\bullet}_{,k}(\tau^u)+F^{\bullet}_{,k}(\tau^v)\right)\right)\mathrm{d}V \tag{10}$$

Considérons un comportement élastique isotherme, la forme bilinéaire $F^{\bullet}(u,v)$ devient [8] :

$$F^{\bullet}(u,v)=\frac{1}{2}\sigma^u_{ij}\varepsilon^v_{ij}=\frac{1}{2}\sigma^v_{ij}\varepsilon^u_{ij}=\frac{1}{2}\lambda\delta_{ij}u_{k,k}v_{i,j}+\frac{1}{2}\mu(u_{i,j}+u_{j,i})v_{i,j} \tag{11}$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé supposés être indépendants de la température. Afin de prendre en compte une variation thermique, l'expression (11) peut être généralisée par :

$$F^{\bullet}(u,v,\tau^u,\tau^v)=\frac{1}{2}\sigma^v_{ij}\varepsilon^u_{ij}-\frac{1}{2}\beta\tau^u\delta_{ij}v_{i,j}-\frac{1}{2}\beta\tau^v\delta_{ij}u_{i,j}\text{avec}\beta=(3\lambda+2\mu)\alpha \tag{12}$$

α est le coefficient de dilatation thermique qui peut dépendre des directions d'orthotropie dans le cas d'un matériau ayant des plans de symétrie orthogonaux. Les dérivés partielles issues de la relation (12) s'écrivent :

$$\frac{\partial F^{\bullet}}{\partial u_{i,j}}=\frac{1}{2}\left(\sigma^v_{ij}-\beta\tau^v\delta_{ij}\right);\quad \frac{\partial F^{\bullet}}{\partial v_{i,j}}=\frac{1}{2}\left(\sigma^u_{ij}-\beta\tau^u\delta_{ij}\right)\quad \text{et}\quad \frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^u}=-\frac{1}{2}\beta\delta_{ij}v_{i,j};\quad \frac{\partial F^{\bullet}}{\partial \tau^v}=-\frac{1}{2}\beta\delta_{ij}u_{i,j} \tag{13}$$

En introduisant (13) dans la forme (10) on obtient :

$$\begin{aligned}T_v = \int_{\Gamma_1} \bigg(& \frac{1}{2}\big(\sigma_{ij}^v u_{i,j} - \beta\tau^u \delta_{ij} v_{i,j} - \beta\tau^v \delta_{ij} u_{i,j}\big) n_k \\ & - \frac{1}{2}\big(\sigma_{ij}^v u_{i,k} + \sigma_{ij}^u v_{i,k} - \beta\tau^u\delta_{ij} - \beta\tau^v\delta_{ij} - \beta\delta_{ij} v_{i,j}\tau_{,k}^u - \beta\delta_{ij} u_{i,j}\tau_{,k}^v\big) n_j \bigg) \,\mathrm{d}\Gamma \\ & - \int_L \frac{1}{2}\big(\sigma_{ij}^v u_{i,k} - \beta\tau^v \delta_{ij} u_{i,j} + \sigma_{ij}^u v_{i,k} - \beta\tau^u\delta_{ij} v_{i,j}\big) n_j \,\mathrm{d}\Gamma \\ & + \int_V \bigg(\frac{1}{2}\sigma_{ij}^v \big(\varepsilon_{ij}^u\big)_{,k} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}^u\big(\varepsilon_{ij}^v\big)_{,k} - \big(\beta\delta_{ij} v_{i,j}\tau_{,k}^u + \beta\delta_{ij} u_{i,j}\tau_{,k}^v\big) \\ & - \frac{1}{2}\Big(\big(\sigma_{ij}^v\varepsilon_{ij}^u\big)_{,k} + \big(\sigma_{ij}^u\varepsilon_{ij}^v\big)_{,k} - \big(\beta\delta_{ij}v_{i,j}\tau^u\big)_{,k} - \big(\beta\delta_{ij}u_{i,j}\tau^v\big)_{,k}\Big)\bigg) \,\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{14}$$

En régime permanent ($\partial\tau/\partial t = 0$), l'équation de la chaleur implique $\Delta\tau = 0$. Dans ce cas, si nous appliquons successivement le théorème de Gauss–Ostrogradski au premier terme de l'équation (14), et en prenant en compte les équations d'équilibre en l'absence de forces volumiques, on obtient après simplification l'intégrale T_v suivante :

$$\begin{aligned}T_v = & \int_{\Gamma_1} \bigg(\frac{1}{2}\big(\sigma_{ij,k}^v u_i - \sigma_{ij}^u v_{i,k}\big) - \frac{1}{2}\big(\beta\delta_{ij} v_{i,jk}\tau_{,j}^u + \beta\delta_{ij} u_{i,jk}\tau_{,j}^v\big)\bigg) n_j \,\mathrm{d}\Gamma \\ & - \int_L \frac{1}{2}\Big(\big(\sigma_{ij}^v u_{i,k} + \sigma_{ij}^u v_{i,k}\big) - \big(\beta\tau^v\delta_{ij}u_{i,j} + \beta\tau^u\delta_{ij}v_{i,j}\big)\Big) n_j \,\mathrm{d}\Gamma \\ & + \int_V \frac{1}{2}\Big[\sigma_{ij}^v (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^u (v_{i,j})_{,k} - \big(\beta\delta_{ij} v_{i,j}\tau_{,k}^u + \beta\delta_{ij}u_{i,j}\tau_{,k}^v\big) \\ & - \Big(\big(\sigma_{ij}^v u_{i,j}\big)_{,k} + \big(\sigma_{ij}^u v_{i,j}\big)_{,k} + \Big(\big(\beta\delta_{ij}v_{i,j}\tau^u\big)_{,k} + \big(\beta\delta_{ij}u_{i,j}\tau^v\big)_{,k}\Big)\Big)\Big] \,\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{15}$$

Le cas de la fissure stationnaire est concentré sur le premier terme de l'expression (15). Le second terme indique la prise en compte de pressions externes sur les lèvres. Le dernier terme concerne la propagation de fissure. En annulant les champs thermiques réels et arbitraires τ^u et τ^v, on retrouve l'intégrale M en propagation proposée par R. Moutou Pitti et al. [5].

4. Intégrale A_v

Nous notons A_v, la généralisation de l'intégrale A[2, 3] au comportement viscoélastique. Dans le but d'intégrer numériquement (dans une configuration plane) la relation (15) par la méthode des éléments finis, définissons l'expression qui suit :

$$\dot{p}_{j,k}^{\tau} = \frac{1}{2}\big(\sigma_{ij,k}^v u_i - \sigma_{ij}^u v_{i,k}\big) - \frac{1}{2}\big(\beta\delta_{ij}v_{i,jk}\tau_{,j}^u + \beta\delta_{ij}u_{i,jk}\tau_{,j}^v\big) \tag{16}$$

Avec la relation (16), et en considérant sur le domaine Ω, le champ vectoriel θ continu et dérivable, proposé par Destuynder et al. [9] pour des configurations bidimensionnelles, Fig. 1, l'expression (15) devient :

$$\begin{aligned}A\theta_v = & \int_{\partial V} -\dot{p}_{j,k}^{\tau}\theta_k n_j \,\mathrm{d}\Gamma - \int_L \frac{1}{2}\Big(\big(\sigma_{ij}^v u_{i,k} + \sigma_{ij}^u v_{i,k}\big) - \big(\beta\tau^v\delta_{ij}u_{i,j} + \beta\tau^u\delta_{ij}v_{i,j}\big)\Big)\theta_k n_j \,\mathrm{d}\Gamma \\ & + \int_{A(\Gamma_1)} \frac{1}{2}\Big[\sigma_{ij}^v (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^u (v_{i,j})_{,k} - \big(\beta\delta_{ij}v_{i,j}\tau_{,k}^u + \beta\delta_{ij}u_{i,j}\tau_{,k}^v\big) \\ & - \Big(\big(\sigma_{ij}^v u_{i,j}\big)_{,k} + \big(\sigma_{ij}^u v_{i,j}\big)_{,k} + \Big(\big(\beta\delta_{ij}v_{i,j}\tau^u\big)_{,k} + \big(\beta\delta_{ij}u_{i,j}\tau^v\big)_{,k}\Big)\Big)\Big]\theta_k \,\mathrm{d}V \end{aligned} \tag{17}$$

Grâce au théorème de Gauss–Ostrogradski appliqué au premier terme de (17), celle-ci s'écrit :

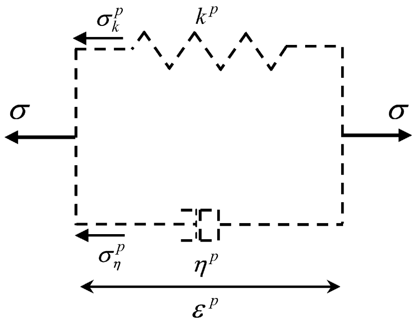

Fig. 2. Modèles de Kelvin Voigt généralisé.

Fig. 2. Generalized Kelvin Voigt model.

$$\begin{aligned}
A\theta_v = {} & \int_\Omega -\big(\dot p^\tau_{j,kj}\theta_k + \dot p^\tau_{j,k}\theta_{k,j}\big)\,\mathrm{d}\Omega - \int_L \frac{1}{2}\Big(\big(\sigma^v_{ij}u_{i,k} + \sigma^u_{ij}v_{i,k}\big) - \big(\beta\tau^v\delta_{ij}u_{i,j} + \beta\tau^u\delta_{ij}v_{i,j}\big)\Big)\theta_k n_j\,\mathrm{d}\Gamma \\
& + \int_\Omega \frac{1}{2}\Big[\sigma^v_{ij}(u_{i,j})_{,k} + \sigma^u_{ij}(v_{i,j})_{,k} - \big(\beta\delta_{ij}v_{i,j}\tau^u_{,k} + \beta\delta_{ij}u_{i,j}\tau^v_{,k}\big) \\
& - \Big(\big(\sigma^v_{ij}u_{i,j}\big)_{,k} + \big(\sigma^u_{ij}v_{i,j}\big)_{,k} + \Big(\big(\beta\delta_{ij}v_{i,j}\tau^u\big)_{,k} + \big(\beta\delta_{ij}u_{i,j}\tau^v\big)_{,k}\Big)\Big)\Big]\theta_k\,\mathrm{d}\Omega \qquad (18)
\end{aligned}$$

En considérant les équations d'équilibre, la première expression de la première intégrale de l'expression (18) est nulle. Supposons que les variations du champ de température n'influent pas sur les propriétés viscoélastiques du matériau. Alors, la généralisation au comportement viscoélastique est introduite via une décomposition spectrale du tenseur de fluage J introduite par un modèle de Kelvin Voigt généralisé décrit en [10]. Dans ces conditions, la relation (18) est étendue à l'expression finale suivante :

$$\begin{aligned}
A_v = {} & \int_\Omega \frac{1}{2}\Big(\big({}^{(p)}\sigma^u_{ij}v^{(p)}_{i,k} - {}^{(p)}\sigma^v_{ij,k}u^{(p)}_i\big) + \big(\beta\delta_{ij}v^{(p)}_{i,jk}\tau^u_{,j} + \beta\delta_{ij}u^{(p)}_{i,jk}\tau^v_{,j}\big)\Big)\theta_{k,j}\,\mathrm{d}\Omega \\
& - \int_L \frac{1}{2}\Big(\big({}^{(p)}\sigma^v_{ij}u^{(p)}_{i,k} + {}^{(p)}\sigma^u_{ij}v^{(p)}_{i,k}\big) - \big(\beta\tau^v\delta_{ij}u^{(p)}_{i,j} + \beta\tau^u\delta_{ij}v^{(p)}_{i,j}\big)\Big)\theta_k n_j\,\mathrm{d}\Gamma \\
& + \int_\Omega \frac{1}{2}\Big[{}^{(p)}\sigma^v_{ij}\big(u^{(p)}_{i,j}\big)_{,k} + {}^{(p)}\sigma^u_{ij}\big(v^{(p)}_{i,j}\big)_{,k} - \big(\beta\delta_{ij}v^{(p)}_{i,j}\tau^u_{,k} + \beta\delta_{ij}u^{(p)}_{i,j}\tau^v_{,k}\big) \\
& - \Big(\big({}^{(p)}\sigma^v_{ij}u^{(p)}_{i,j}\big)_{,k} + \big({}^{(p)}\sigma^u_{ij}v^{(p)}_{i,j}\big)_{,k} + \Big(\big(\beta\delta_{ij}v^{(p)}_{i,j}\tau^u\big)_{,k} + (\beta\delta_{ij}u^{(p)}_{i,j}\tau^v)_{,k}\Big)\Big)\Big]\theta_k\,\mathrm{d}\Omega \qquad (19)
\end{aligned}$$

${}^{(p)}\sigma^{(u)}_{ij}$ et ${}^{(p)}\sigma^{(v)}_{ij}$ désignent respectivement les contraintes réelles et virtuelles induites par les déplacements réels $u^{(p)}_i$ et virtuels $v^{(p)}_i$ associés au $p^{\text{ième}}$ ressort propre au modèle de Kelvin Voigt généralisé, Fig. 2.

5. Conclusions

La généralisation de l'intégrale T notée T_v au comportement viscoélastique a été présentée. Dans un premier temps, il a été supposé que, les variations du champ de température n'influent pas sur les propriétés viscoélastiques du matériau. En vu d'une modélisation numérique par un code aux éléments finis, celle-ci a été étendue à l'intégrale A notée A_v. Ces deux formulations intègrent simultanément une pression pouvant être induite par un fluide quelconque sur les lèvres de la fissure. Cet outil devra être complété pour l'étude du comportement à la fissuration dans des environnements viscoélastiques pour lesquels la température et ses variations jouent un rôle prédominant. Couplée à un algorithme de transfert de chaleur, cette intégrale devra traiter des problèmes en régime non permanent.

Références

[1] J.R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain conservations by notches and cracks, J. Appl. Mech. 35 (1968) 379–385.

[2] H.D. Bui, J.M., Proix, Découplage des modes mixtes de rupture en thermoélasticité linéaire par les intégrales indépendantes du contour, in : Actes du Troisième Colloque Tendances Actuelles en Calcul de Structure, Bastia, 1985, pp. 631–643.

[3] H.D. Bui, J.M. Proix, Lois de conservation en thermoélasticité linéaire, C. R. Acad. Sci. Paris 298 (1984) 325.

[4] F.M.K. Chen, R.T. Shield, Conservation laws in elasticity of J-integral type, J. Appl. Mech. Phys. 28 (1977) 1–22.

[5] R. Moutou Pitti, F. Dubois, O. Pop, N. Sauvat, C. Petit, Intégrale M_v pour la propagation de fissure dans un milieu viscoélastique, C. R. Mecanique 335 (2007) 727–731.

[6] E. Noether, Invariant variations problems, Transport Theory Statist. Phys. 1 (1918) 183–207.

[7] F. Dubois, C. Chazal, C. Petit, A finite element analysis of creep-crack growth in viscoelastic media, Mech. Time-Dependent Mater. 2 (1999) 269–286.

[8] C. Petit, Généralisation et application des lois de mécanique de la rupture à l'étude de structures et matériaux fissurés, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Limoges, 1994, pp. 15–22.

[9] P. Destuynder, M. Djaoua, S. Lescure, Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique, J. Méc. Théor. Appl. 2 (1983) 113–135.

[10] R. Moutou Pitti, F. Dubois, C. Petit, N. Sauvat, Mixed mode fracture separation in viscoelastic orthotropic media: numerical and analytical approach by the $M\theta_v$, Int. J. Fracture 145 (2007) 181–193.