

# Approximation asymptotique uniformément valable d'un écoulement perturbé sur une plaque plane avec incidence

Sylvie Saintlos Brillac \*, Karim Debbagh

*Institut de mécanique des fluides de Toulouse, UMR CNRS 5502 INP/UPS, allée du Pr. Camille-Soula, 31400 Toulouse, France*

Reçu le 22 juillet 2007 ; accepté après révision le 11 mars 2008

Disponible sur Internet le 28 avril 2008

Présenté par Sébastien Candel

---

## Résumé

On se propose d'établir, par la méthode des développements asymptotiques raccordés, une solution perturbée uniformément valable, stationnaire, bidimensionnelle dans tout le domaine d'étude d'un fluide newtonien incompressible sur une plaque plane semi infinie avec incidence. En suivant les idées de Libby et Fox, des perturbations bidimensionnelles générées au sein de la couche limite, sans gradient de pression de perturbation, sont recherchées pour un écoulement de base en incidence par rapport à la plaque. La perturbation théorique établie fait l'objet d'une validation à partir de la simulation numérique des équations de Navier–Stokes linéarisées au voisinage de l'écoulement de base. *Pour citer cet article : S. Saintlos Brillac, K. Debbagh, C. R. Mécanique 336 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**An asymptotic uniformly valid approximation for a disturbed flow over a flat plate with incidence.** In the context of the laminar steady two-dimensional flow of an incompressible Newtonian fluid, we propose, with the matched asymptotic expansions method, a uniformly valid approximation in the whole domain for a disturbed flow over a flat plate with incidence. Following Libby and Fox's ideas, two-dimensional disturbances generated in the boundary layer, without disturbed pressure gradient, have been studied for a basic flow without incidence. The established theoretical perturbation is then validated from the numerical simulation of the Navier–Stokes equations linearized in the vicinity of the basic flow. *To cite this article: S. Saintlos Brillac, K. Debbagh, C. R. Mécanique 336 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

**Mots-clés :** Mécanique de fluides numérique ; Écoulement de Blasius ; Écoulement de Falkner–Skan ; Couche limite laminaire ; Analyse asymptotique ; Perturbation

**Keywords:** Computational fluid mechanics; Blasius flow; Falkner–Skan flow; Laminar boundary layer; Asymptotic analysis; Disturbance

---

\* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : [saintlos@imft.fr](mailto:saintlos@imft.fr) (S. Saintlos Brillac).

## Abridged English version

The fact that the potential solution cannot satisfy the no-slip condition at the wall has led Prandtl to introduce the concept of a boundary layer [1]. Nevertheless, even if the solution of the classical boundary layer equations removes the problem of the singularity at the wall, allowing one to match the longitudinal velocity with that of the potential flow, it is not the same for the vertical component of the velocity. This is the reason why a composite approximation, valid in the whole domain, has been proposed from the asymptotic method of matched expansions at later orders [3,4]. The purpose of this study is to extend the method developed for the basic flow at [2] to the problem of disturbances generated in the Falkner–Skan boundary layer. Following the ideas of Libby and Fox [5], two-dimensional disturbances without perturbation of the pressure gradient, have been studied in the case of the upstream flow with incidence [6]. These disturbances searched as self similar are sought as a product of function of  $x$  (along the plate) and of the similarity variable. The analysis of the behaviour of the disturbance at the outside of the boundary layer allows one to establish the more simple uniformly valid approximation. The disturbances generated inside the boundary layer are prolonged to the outside by supposing the irrotationality of the potential flow at each order. At order  $\delta Re^{-1/2}$ , the established solution in the whole domain reduces to the superposition of the basic flow to uniformly valid disturbances in the whole domain. The order  $\delta$  of the disturbance can be supposed to be greater than  $Re^{-1/2}$ . The approached uniformly valid solution for the disturbance (9) has been written as a superposition of the disturbed solution of the boundary layer plus that of the disturbed potential flow and by subtracting the matching terms at the same order. This solution (9) has been compared with the perturbed boundary layer solution and disturbed potential flow. This solution returns smoothly to the potential flow where the distance compared to the wall grows. The established theoretical perturbation is then validated from the numerical simulation [12] of the Navier–Stokes equations linearized in the vicinity of the basic flow.

## 1. Introduction

Dans le cas d'un écoulement de fluide parfait en contact avec un obstacle, l'impossibilité de satisfaire la condition d'adhérence du fluide à la paroi pour la solution potentielle conduit Prandtl à introduire le concept de couche limite [1]. Néanmoins, si cette solution du problème de couche limite classique lève le problème de singularité à la paroi tout en permettant le raccord de la vitesse longitudinale avec celle de la solution potentielle, il n'en est pas de même pour la vitesse transversale. C'est la raison pour laquelle une approximation composite au premier ordre valable [2] dans tout le domaine a été proposée en écrivant les développements asymptotiques à l'ordre ultérieur et le raccordement au même ordre [3,4] de la vitesse transversale entre les zones de couche limite et potentielle. On se propose d'étendre la méthode pour l'écoulement de base, développée dans [2], au problème de perturbations générées au sein de la couche limite de Falkner–Skan. Des perturbations bidimensionnelles générées au sein de la couche limite, sans gradient de pression de perturbation, ont été étudiées en suivant les idées de Libby et Fox [5]. L'étude a ensuite été étendue au cas avec incidence [6]. Les perturbations au sein de la couche limite sont recherchées sous la forme d'un produit de fonctions, une fonction en puissance de  $x$  et une fonction de la variable de similitude du problème. L'analyse du comportement de ces perturbations à l'extérieur de la couche limite permet de proposer le modèle uniformément valable le plus simple pour la caractérisation de perturbations dans tout le domaine. Ces perturbations sont générées au sein de la couche limite et se prolongent à l'extérieur de cette dernière en supposant l'écoulement extérieur irrotationnel à l'ordre considéré. La solution asymptotique approchée obtenue dans tout le domaine se réduit à la superposition de l'écoulement de base uniformément valable à une perturbation approchée uniformément valable linéarisée au voisinage de cette solution dans ce même domaine d'écoulement.

## 2. Formulation du problème

On considère l'écoulement stationnaire plan d'un fluide newtonien incompressible sur une plaque plane semi infinie faisant un angle  $\varphi$  par rapport à l'écoulement amont. Les équations adimensionnelles s'écrivent :

$$\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$$

$$Re(v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x) = -Re \partial_x p + \partial_{xx}^2 v_x + \partial_{yy}^2 v_x$$

$$Re(v_x \partial_x v_y + v_y \partial_y v_y) = -Re \partial_y p + \partial_{xx}^2 v_y + \partial_{yy}^2 v_y$$

où  $v_x$  et  $v_y$  désignent respectivement les composantes longitudinale et transversale de la vitesse,  $p$  la pression et  $Re$  le nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement.

### 2.1. Écoulement de base

A l'ordre  $\varepsilon = 1/\sqrt{Re} \ll 1$ , la solution de base choisie pour cet écoulement est l'approximation asymptotique uniformément valable dans tout le domaine qui a été écrite sous la forme de la superposition des solutions des problèmes de couche limite et d'écoulement potentiel à laquelle on retranche le raccord asymptotique au même ordre [2] :

$$\begin{aligned} v_{xuv_1} &= U_0(x, Y) + \tilde{u}_0(x, y) - \tilde{u}_0(x, 0) + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y) \\ v_{yuv_1} &= \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon [\tilde{v}_1(x, y) + V_0(x, Y) - \tilde{v}_1(x, 0) + nx^{n-1}Y], \\ p_{uv_1} &= \tilde{p}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{p}_1(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

où  $\tilde{u}_0, \tilde{v}_0, \tilde{p}_0$  est la solution des équations d'Euler dans la zone potentielle avec les valeurs de  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  bornées et pour  $0 \leq \theta \leq \pi - \varphi$  avec  $\theta = \text{Arc tan}(\frac{y}{x})$  :

$$\tilde{u}_0 = \rho^n \cos(n\theta), \quad \tilde{v}_0 = -\rho^n \sin(n\theta), \quad \tilde{p}_0 = -\frac{1}{2}\rho^{2n}$$

et où  $\tilde{u}_1, \tilde{v}_1, \tilde{p}_1$  est la solution des équations dans la zone potentielle à l'ordre  $\varepsilon$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \frac{n+1}{2} v_n \sin\left(\frac{1-n}{2}\theta\right) \rho^{(n-1)/2}, \quad \tilde{v}_1 = -\frac{n+1}{2} v_n \cos\left(\frac{1-n}{2}\theta\right) \rho^{(n-1)/2}, \\ \tilde{p}_1 &= -\frac{n+1}{2} v_n \sin\left(\frac{1+n}{2}\theta\right) \rho^{(3n-1)/2} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\tilde{u}_b, \tilde{v}_b, \tilde{p}_b$  désigne une approximation à l'ordre  $\varepsilon$  des équations d'Euler avec :

$$\tilde{u}_b(x, y) = \tilde{u}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y), \quad \tilde{v}_b(x, y) = \tilde{v}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{v}_1(x, y), \quad \tilde{p}_b(x, y) = \tilde{p}_0(x, y) + \varepsilon \tilde{p}_1(x, y)$$

où  $v_n$  est une constante numérique déterminée à partir de la résolution de l'équation de Falkner–Skan.

$U_0$  et  $V_0$  désigne la solution à l'ordre zéro en  $\varepsilon$  du problème de couche limite de Falkner–Skan qui s'écrit :

$$U_0(x, Y) = x^n f_n'(\eta), \quad V_0(x, Y) = -\frac{1}{2}x^{(n-1)/2}[(n+1)f_n(\eta) + (n-1)\eta f_n'(\eta)],$$

$$P_0(x, Y) = P_0(x) = -\frac{1}{2}x^{2n}$$

où  $f_n$  satisfait au problème :

$$f_n'''(\eta) + \frac{n+1}{2} f_n f_n'' + n(1 - f_n'^2) = 0, \quad f_n(0) = 0, \quad f_n'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f_n'(\eta) = 1$$

avec  $\eta = x^{(n-1)/2}Y$  où  $Y$  la variable de couche limite est telle que  $y = \varepsilon Y$  et  $n = \varphi/(\pi - \varphi)$  et  $v_n$  est tel que  $f_n(\eta)_{\eta \rightarrow \infty} = \eta + v_n + \text{TST}$ , TST désignant des termes exponentiellement petits.

En recherchant une approximation à l'ordre  $\varepsilon$  du problème de couche limite :

$$\begin{aligned} v_x &= U_0(x, Y) + \varepsilon U_1(x, Y) + o(\varepsilon) \\ v_y &= \varepsilon [V_0(x, Y) + \varepsilon V_1(x, Y)] + o(\varepsilon) \\ p &= P_0(x, Y) + \varepsilon P_1(x, Y) + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

le problème de couche limite à l'ordre  $\varepsilon$  :

$$\partial_x U_1 + \partial_Y V_1 = 0; \quad U_0 \partial_x U_1 + U_1 \partial_x U_0 + V_0 \partial_Y U_1 + V_1 \partial_Y U_0 = \partial_Y^2 U_1; \quad \partial_Y P_1 = 0$$

admet la solution triviale nulle compte tenu du raccord asymptotique [2].

## 2.2. Écoulement perturbé

### 2.2.1. Écoulement potentiel perturbé

On recherche une solution des équations de Navier–Stokes sous la forme de développements asymptotiques réguliers par rapport au paramètre  $\delta$  :

$$v_x(x, y) = \tilde{u}_b(x, y) + \delta \tilde{u}_p(x, y) + o(\delta \varepsilon)$$

$$v_y(x, y) = \tilde{v}_b(x, y) + \delta \tilde{v}_p(x, y) + o(\delta \varepsilon)$$

$$p(x, y) = \tilde{p}_b(x, y) + \delta \tilde{p}_p(x, y) + o(\delta \varepsilon)$$

avec  $\tilde{u}_p(x, y) = \tilde{u}(x, y) + \varepsilon \tilde{\tilde{u}}(x, y)$ ,  $\tilde{v}_p(x, y) = \tilde{v}(x, y) + \varepsilon \tilde{\tilde{v}}(x, y)$ ,  $\tilde{p}_p(x, y) = \tilde{p}(x, y) + \varepsilon \tilde{\tilde{p}}(x, y)$  et on recherche une solution irrotationnelle à l'extérieur aux ordres successifs.

À l'ordre  $\delta$ , les équations s'écrivent :

$$\partial_x \tilde{u} + \partial_y \tilde{v} = 0$$

$$\tilde{u}_0 \partial_x \tilde{u} + \tilde{u} \partial_x \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{u} + \tilde{v} \partial_y \tilde{u}_0 = -\partial_x \tilde{p}$$

$$\tilde{u}_0 \partial_x \tilde{v} + \tilde{u} \partial_x \tilde{v}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{v} + \tilde{v} \partial_y \tilde{v}_0 = -\partial_y \tilde{p}$$

L'hypothèse d'irrotationnalité à l'ordre  $\delta$ , conduit à :

$$\tilde{p} + \tilde{u}_0 \tilde{u} + \tilde{v}_0 \tilde{v} = 0. \quad (2)$$

À l'ordre  $\delta \varepsilon$ , les équations s'écrivent :

$$\partial_x \tilde{\tilde{u}} + \partial_y \tilde{\tilde{v}} = 0$$

$$\tilde{u}_0 \partial_x \tilde{\tilde{u}} + \tilde{\tilde{u}} \partial_x \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 \partial_x \tilde{u} + \tilde{u} \partial_x \tilde{u}_1 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{\tilde{u}} + \tilde{\tilde{v}} \partial_y \tilde{u}_0 + \tilde{v}_1 \partial_y \tilde{u} + \tilde{v} \partial_y \tilde{u}_1 = -\partial_x \tilde{\tilde{p}}$$

$$\tilde{u}_0 \partial_x \tilde{\tilde{v}} + \tilde{\tilde{v}} \partial_x \tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 \partial_x \tilde{v} + \tilde{u} \partial_x \tilde{v}_1 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{\tilde{v}} + \tilde{\tilde{v}} \partial_y \tilde{v}_0 + \tilde{v}_1 \partial_y \tilde{v} + \tilde{v} \partial_y \tilde{v}_1 = -\partial_y \tilde{\tilde{p}}$$

L'hypothèse d'irrotationnalité à l'ordre  $\delta \varepsilon$ , conduit à :

$$\tilde{\tilde{p}} + \tilde{u}_1 \tilde{u} + \tilde{v}_1 \tilde{v} + \tilde{u}_0 \tilde{\tilde{u}} + \tilde{v}_0 \tilde{\tilde{v}} = 0 \quad (3)$$

### 2.2.2. Problème de couche limite

On recherche une perturbation générée au sein de la couche limite, solution des équations de couche limite linéarisées au voisinage de la solution de base  $(U_0, V_0, P_0)$ . Pour obtenir une perturbation uniformément valable dans tout le domaine d'étude, le raccord sur la composante transversale de la perturbation nécessite la prise en compte des termes d'ordres  $\delta \varepsilon$  dans les développements asymptotiques.

On pose les développements asymptotiques :

$$v_x = U_0(x, Y) + \varepsilon U_1(x, Y) + \delta [U(x, Y) + \varepsilon \bar{U}(x, Y)] + o(\delta \varepsilon)$$

$$v_y = \varepsilon [V_0(x, Y) + \varepsilon V_1(x, Y) + \delta [V(x, Y) + \varepsilon \bar{V}(x, Y)]] + o(\delta \varepsilon^2)$$

$$p = P_0(x, Y) + \varepsilon P_1(x, Y) + \delta \varepsilon [P(x, Y) + \nu \bar{P}(x, Y)] + o(\delta \varepsilon \nu)$$

On choisit  $\delta \ll 1$ ,  $\nu \ll 1$ ,  $\delta \gg \varepsilon$ ,  $\delta \nu \gg \varepsilon$ . Des termes d'ordre  $\delta^2$  négligés dans cette approche, s'intercalent entre les termes d'ordre  $\delta$  et  $\delta \varepsilon$  et contiennent l'interaction non linéaire entre l'écoulement de base et la perturbation. Sous cette hypothèse de linéarisation, on obtient les problèmes aux différents ordres établis par la suite.

À l'ordre  $\delta$ , le problème de couche limite s'écrit :

$$\partial_x U + \partial_Y V = 0, \quad U_0 \partial_x U + U \partial_x U_0 + V_0 \partial_Y U + V \partial_Y U_0 = \partial_Y^2 U, \quad \partial_Y P = 0$$

avec les conditions aux limites :  $U = V = 0$  en  $Y = 0$  à la paroi et  $U|_{Y \rightarrow \infty} = 0$  provenant du comportement de l'équation de quantité de mouvement lorsque  $Y \rightarrow \infty$ .

Les perturbations bidimensionnelles sont recherchées comme produit de fonctions, une fonction en puissance de  $x$  et une fonction de la variable de similitude du problème :

$$U = x^\lambda \hat{u}(\eta), \quad V = x^{\lambda - (n+1)/2} \hat{v}(\eta)$$

On obtient un système différentiel :

$$\lambda \hat{u} + \frac{n-1}{2} \eta \hat{u}' + \hat{v}' = 0, \quad \hat{u}'' + \frac{n+1}{2} f_n \hat{u}' - \left( (n+\lambda) f_n' + \frac{n-1}{2} \eta f_n'' \right) \hat{u} - f_n'' \hat{v} = 0$$

avec les conditions aux limites :  $\hat{u}(\eta=0) = 0$ ;  $\hat{v}(\eta=0) = 0$  et  $\hat{u}|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$ .

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres. Les fonctions propres correspondantes permettent de reconstruire les perturbations longitudinale et transversale au sein de la couche limite. Le modèle 2D de Libby et Fox dans le cas sans incidence [5] est étendu au cas d'un écoulement non parallèle à la plaque [6].

La solution s'écrit sous la forme :

$$U = x^\lambda h'(\eta), \quad V = x^{\lambda-(n+1)/2} \left[ \frac{1-n}{2} \eta h'(\eta) + \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) h(\eta) \right] \quad (4)$$

où  $h(\eta)$  satisfait :

$$\hat{h}''(\eta) + \frac{n+1}{2} f_n \hat{h}''(\eta) - (n+\lambda) f_n' \hat{h}'(\eta) + \left( \lambda - \frac{n-1}{2} \right) f_n'' \hat{h}(\eta) = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$h(0) = 0, \quad \hat{h}''(0) = 0, \quad \hat{h}'(\eta)|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$$

$\hat{h}(\eta)$  est la fonction propre associée à la condition de normalisation  $\hat{h}''(0) = 1$ .

On a le comportement de  $h(\eta)$  lorsque  $\eta \rightarrow \infty$  :

$$h'(\eta) \underset{\eta \rightarrow \infty}{=} 0, \quad h(\eta) \underset{\eta \rightarrow \infty}{=} A_\lambda$$

où  $A_\lambda$  est une constante dépendant de l'incidence et de la valeur propre considérée.

On note ainsi les comportements de U et V à l'infini :

$$U(x, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} x^\lambda h'(\eta) \underset{\eta \rightarrow \infty}{=} 0 \quad \text{et} \quad V(x, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) x^{\lambda-(1+n)/2} A_\lambda$$

Les premières valeurs propres 2D sont données dans le tableau I pour les incidences de  $-15^\circ$ ,  $-5^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $15^\circ$ .

On note que la valeur propre  $\lambda = -1$  obtenue dans la construction de la solution composite de l'écoulement de base [2] permettait d'assurer une décroissance exponentielle du tourbillon à l'extérieur de la couche limite. La perturbation, correspondant à  $\lambda = -1$  dans la présente étude, permet de retrouver la contribution de l'écoulement de base à l'ordre  $\varepsilon^2$ .

### 2.2.3. Raccord entre la couche limite et l'écoulement potentiel

Les comportements de  $h(\eta)$  et  $f_n(\eta)$  quand  $\eta \rightarrow \infty$  conduisent à ceux des vitesses longitudinale et transversale dans la couche limite lorsque  $Y \rightarrow \infty$  à l'ordre considéré :

$$v_x(x, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} x^n + \delta \varepsilon \bar{U}(x, Y) + o(\delta \varepsilon)$$

$$v_y(x, Y) \underset{Y \rightarrow \infty}{=} -\varepsilon n x^{n-1} Y - \varepsilon \frac{n+1}{2} v_n x^{(n-1)/2} + \varepsilon \delta \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) x^{\lambda-(n+1)/2} A_\lambda + o(\varepsilon \delta)$$

Les comportements dans l'écoulement potentiel lorsque  $y \rightarrow 0$  s'écrivent :

$$v_x(x, y) \underset{y \rightarrow 0}{=} x^n + \varepsilon \tilde{u}_1(x, y) + \delta \tilde{u}(x, y) + \delta \varepsilon \tilde{\tilde{u}}(x, y) + o(\delta \varepsilon)$$

$$v_y(x, y) \underset{y \rightarrow 0}{=} -n x^{n-1} y + \varepsilon \tilde{v}_1(x, y) + \delta \tilde{v}(x, y) + \delta \varepsilon \tilde{\tilde{v}}(x, y) + o(\delta \varepsilon)$$

Par conséquent, compte tenu de la forme des perturbations recherchées au sein de la couche limite, le raccord pour la vitesse transversale et longitudinale à l'ordre  $\delta$  donne :

$$\tilde{v}(x, y) \underset{y \rightarrow 0}{=} 0, \quad \tilde{u}(x, y) \underset{y \rightarrow 0}{=} 0$$

D'après (2), on a  $\tilde{p}(x, y) = 0$  et le raccord sur la pression conduit à  $P(x) = 0$  puisque  $\partial P / \partial Y = 0$ .

En recherchant des perturbations qui restent confinées au sein de la couche limite, la contribution à l'ordre  $\delta$  de la solution à l'extérieur de la couche limite est nulle :

$$\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{p} = 0 \quad (5)$$

Le raccord à l'ordre  $\delta\varepsilon$  permet de tenir compte de la non nullité de la perturbation de la vitesse transversale au sein de la couche limite.

A l'ordre  $\delta\varepsilon$ , les raccords pour la vitesse transversale et longitudinale s'écrivent :

$$\tilde{v}(x, y) = \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) x^{\lambda-(1+n)/2} A_\lambda, \quad \bar{U}(x, Y) = \tilde{u}(x, y)$$

A l'ordre  $\delta\varepsilon$ , le problème de couche limite s'écrit :

$$\partial_x \bar{U} + \partial_Y \bar{V} = 0, \quad U_0 \partial_x \bar{U} + \bar{U} \partial_x U_0 + V_0 \partial_Y \bar{U} + \bar{V} \partial_Y U_0 = -\partial_x P + \partial_Y^2 \bar{U}, \quad \partial_Y \bar{P} = 0$$

avec les conditions aux limites :  $\bar{U} = \bar{V} = 0$  en  $Y = 0$  et  $\bar{U}|_{Y \rightarrow \infty} = \tilde{u}(x, y)$ .

Si l'on suppose que la perturbation générée au sein de la couche limite ne sort pas à l'extérieur à l'ordre  $\delta\varepsilon$ , c'est-à-dire que le couplage est faible alors  $\tilde{u}(x, y) = 0$ .

On peut alors, en recherchant une solution irrotationnelle à cet ordre, écrire la contribution de la perturbation générée dans la couche limite à l'ordre  $\delta\varepsilon$  à l'extérieur de la couche limite (6) :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= -\left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) A_\lambda \rho^{\lambda-(n+1)/2} \sin \left[ \left( \frac{n+1}{2} - \lambda \right) \theta \right] \\ \tilde{v}(x, y) &= \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) A_\lambda \rho^{\lambda-(n+1)/2} \cos \left[ \left( \frac{n+1}{2} - \lambda \right) \theta \right] \end{aligned} \quad (6)$$

qui, compte tenu de (5) est solution du système suivant :

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{u} + \partial_y \tilde{v} &= 0 \\ \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{u} + \tilde{u} \partial_x \tilde{u}_0 + \tilde{v} \partial_y \tilde{u}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{u} &= -\partial_x \tilde{p} \\ \tilde{u}_0 \partial_x \tilde{v} + \tilde{u} \partial_x \tilde{v}_0 + \tilde{v}_0 \partial_y \tilde{v} + \tilde{v} \partial_y \tilde{v}_0 &= -\partial_y \tilde{p} \end{aligned}$$

avec les conditions :

$$\tilde{u}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{v}(x, y) = \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) x^{\lambda-(1+n)/2} A_\lambda$$

Avec (5), l'hypothèse d'irrotationnalité (3) à l'ordre  $\delta\varepsilon$  se réduit à :

$$\tilde{p}(x, y) = -\tilde{u}_0 \tilde{u} - \tilde{v}_0 \tilde{v}$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{p} = \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) A_\lambda \rho^{\lambda-(1-n)/2} \sin \left[ \left( \frac{3n+1}{2} - \lambda \right) \theta \right] \quad (7)$$

Comme  $\tilde{u}(x, y) = 0$  et  $\tilde{v}(x, y) = 0$ , on a  $\tilde{p}(x, y) = 0$ .

Comme  $\partial_Y P = 0$ , le raccord sur la pression à l'ordre  $\delta\varepsilon$  conduit à :  $P = 0$ . Ainsi, le problème de couche limite à l'ordre  $\delta\varepsilon$ , assorti des conditions aux limites  $\bar{U} = \bar{V} = 0$  en  $Y = 0$  et  $\bar{U}|_{Y \rightarrow \infty} = 0$ , avec  $P = 0$ , admet la solution triviale  $\bar{U} = \bar{V} = 0$ .

Tableau 1

Valeurs propres 2D pour diverses incidences :  $-15^\circ$ ,  $-5^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $15^\circ$ 

Table 1

2D eigenvalues for various incidences :  $-15^\circ$ ,  $-5^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $5^\circ$ ,  $15^\circ$ 

$k$	$\lambda_k (-15^\circ)$	$\lambda_k (-5^\circ)$	$\lambda_k (0^\circ)$	$\lambda_k (5^\circ)$	$\lambda_k (15^\circ)$
1	-0,785207	-0,933148	-1,	-1,067287	-1,207887
2	-1,558681	-1,785529	-1,886814	-1,988286	-2,199265
3	-2,391377	-2,682611	-2,814378	-2,994691	-3,223482
4	-3,243503	-3,595351	-3,756613	-3,919466	-4,260546
5	-4,108213	-4,516915	-4,707187	-4,900009	-5,305127
6	-4,970488	-5,444158	-5,663260	-5,885877	-6,354782
7	-5,878610	-6,376224	-6,623483	-6,875659	-7,408157
8	-6,683757	-7,310169	-7,586544	-7,868381	-8,464402
9	-7,822485	-8,259796	-8,556359	-8,864952	-9,523108
10	-8,491462	-9,222807	-9,537732	-9,868763	-10,584708

### 2.3. Approximations uniformément valables perturbées

Une solution composite linéarisée de l'écoulement perturbée (8) à l'ordre  $\delta\varepsilon$  est construite sous la forme de la superposition des solutions perturbées des problèmes de couche limite et d'écoulement potentiel à laquelle on retranche le raccord asymptotique au même ordre [3] :

$$\begin{aligned}
 v_{xuvp} &= v_{xuv1} + \delta U(x, Y) + \delta\varepsilon \tilde{u}(x, y) \\
 v_{yuvp} &= v_{yuv1} + \varepsilon\delta \left[ \tilde{v}(x, y) + V(x, Y) - \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) x^{\lambda-(n+1)/2} A_\lambda \right] \\
 p_{uvp} &= p_{uv1} + \delta\varepsilon \tilde{p}(x, y)
 \end{aligned} \tag{8}$$

avec  $v_{xuv1}$ ,  $v_{yuv1}$ ,  $P_{uv1}$  donnés par (1),  $U$  et  $V$  par (2) et  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{p}$  par (6), (7).

On peut déduire la perturbation approchée théorique uniformément valable, en soustrayant la solution de base (1) à la solution perturbée (8) :

$$\begin{aligned}
 v_{xp} &= v_{xuvp} - v_{xuv1} = \delta\varepsilon \tilde{u}(x, y) \\
 v_{yp} &= v_{yuvp} - v_{yuv1} = \delta\varepsilon \left[ \tilde{v}(x, y) + V(x, Y) - \left( \frac{n-1}{2} - \lambda \right) x^{\lambda-(n+1)/2} A_\lambda \right] \\
 p_p &= p_{uvp} - p_{uv1} = \delta\varepsilon \tilde{p}(x, y)
 \end{aligned} \tag{9}$$

### 3. Résultats

Un code de résolution des équations de Navier–Stokes [7] a été étendu à la simulation des équations de Navier–Stokes linéarisées au voisinage de la solution de base [2]. Une méthode numérique de résolution, précise et fiable, des équations de Navier–Stokes est développée en formulation vorticité-fonction de courant avec un schéma compact d'ordre quatre en espace [8]. La discrétisation temporelle du second ordre est effectu e à l'aide de la méthode ADI [8–10]. La résolution est effectu e à partir de la méthode de factorisation d velopp e dans [11]. A titre indicatif, pour un nombre de Reynolds de 1000 et une incidence de  $-5^\circ$ ,  $0^\circ$  et  $5^\circ$ , on se propose de comparer la solution (9) avec la perturbation de couche limite (4) et la solution perturb e potentielle (6) pour les composantes longitudinale et transversale de la vitesse respectivement sur (Figs. 1, 3, 5) et (Figs. 2, 4, 6). On constate que la solution uniformément valable tend vers la solution extérieure lorsque  $Y$  est suffisamment grande et s'identifie à la perturbation g n r e au sein de la couche limite au voisinage de la paroi. La comparaison sur les figures précédentes entre cette solution (9) et la perturbation obtenue numériquement à partir de la résolution numérique des équations de Navier–Stokes linéarisées au voisinage de la solution de base uniformément valable [12] montre un bon accord.

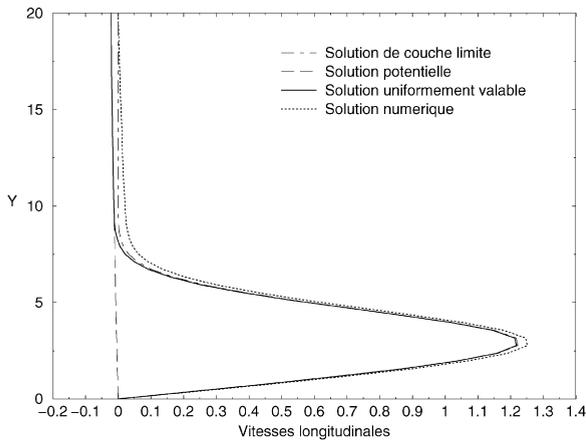


Fig. 1. Vitesses longitudinales en fonction de  $Y$  pour  $\varphi = -5^\circ$  en  $x = 2$  et pour  $Re = 1000$ .

Fig. 1. Longitudinal velocities vs.  $Y$  for  $\varphi = -5^\circ$  at  $x = 2$  for  $Re = 1000$ .

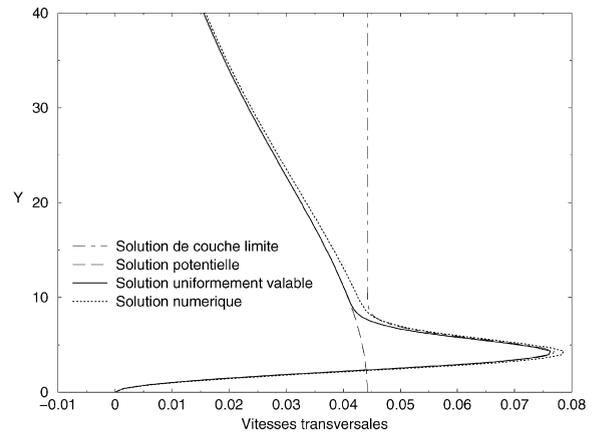


Fig. 2. Vitesses transversales en fonction de  $Y$  pour  $\varphi = -5^\circ$  en  $x = 2$  et pour  $Re = 1000$ .

Fig. 2. Normal velocities vs.  $Y$  for  $\varphi = -5^\circ$  at  $x = 2$  for  $Re = 1000$ .

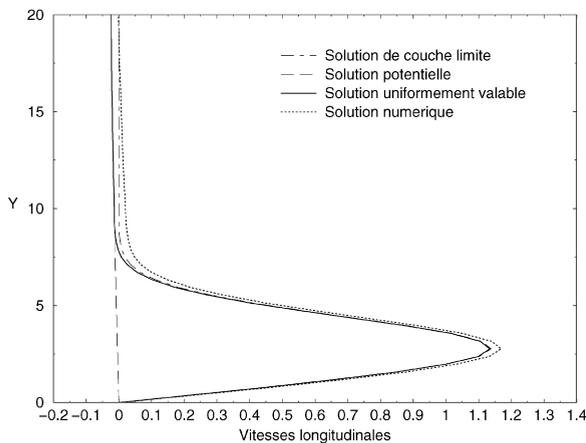


Fig. 3. Vitesses longitudinales en fonction de  $Y$  pour  $\varphi = 0^\circ$  en  $x = 2$  et pour  $Re = 1000$ .

Fig. 3. Longitudinal velocities vs.  $Y$  for  $\varphi = 0^\circ$  at  $x = 2$  for  $Re = 1000$ .

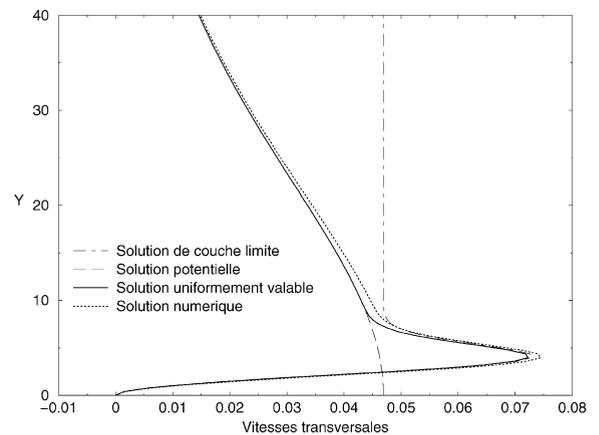


Fig. 4. Vitesses transversales en fonction de  $Y$  pour  $\varphi = 0^\circ$  en  $x = 2$  et pour  $Re = 1000$ .

Fig. 4. Normal velocities vs.  $Y$  for  $\varphi = 0^\circ$  at  $x = 2$  for  $Re = 1000$ .

#### 4. Conclusions et perspectives

Une solution approchée asymptotique stationnaire du problème d'écoulement sur plaque plane en incidence est établie en présence de perturbations générées au sein de la couche limite. Cette solution permet une initialisation pertinente pour la validation de codes de calcul. Cette perturbation (9), approximation des équations de Navier–Stokes linéarisées au voisinage de l'écoulement de base, fournit par ailleurs une condition aux limites d'entrée réaliste pour la recherche de la perturbation optimale pour un tel problème. Les perturbations optimales, d'un tel écoulement, étant obtenues comme les plus dangereuses [13] en régime stationnaire, cette approximation stationnaire est un bon candidat pour mettre en évidence une perturbation optimale bidimensionnelle [14] conduisant à une croissance énergétique comparable à celle obtenue dans un cadre 3D [15]. Une extension de cette étude dans un cadre tridimensionnel est actuellement en cours et des croissances algébriques en  $x^\lambda$  avec  $\lambda > 0$  peuvent être mises en évidence [16]. On se propose d'étudier ultérieurement l'influence d'un gradient de pression de perturbation sur la décroissance spatiale des perturbations ainsi que celle de l'interaction non linéaire des perturbations avec l'écoulement de base.

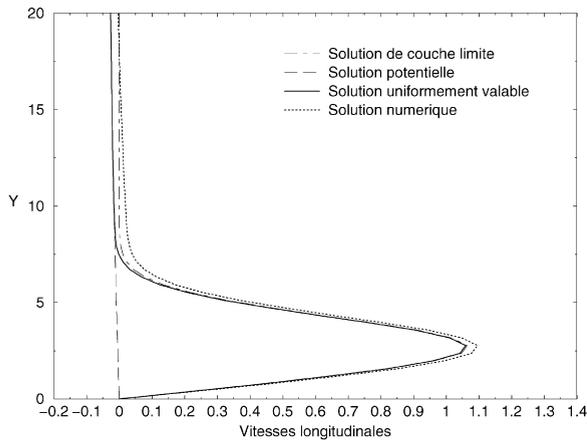


Fig. 5. Vitesses longitudinales en fonction de  $Y$  pour  $\varphi = 5^\circ$  en  $x = 2$  et pour  $Re = 1000$ .

Fig. 5. Longitudinal velocities vs.  $Y$  for  $\varphi = 5^\circ$  at  $x = 2$  for  $Re = 1000$ .

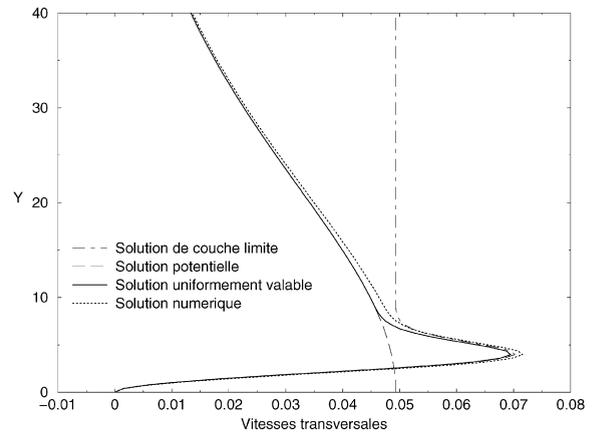


Fig. 6. Vitesses transversales en fonction de  $Y$  pour  $\varphi = 5^\circ$  en  $x = 2$  et pour  $Re = 1000$ .

Fig. 6. Normal velocities vs.  $Y$  for  $\varphi = 5^\circ$  at  $x = 2$  for  $Re = 1000$ .

## Références

- [1] L. Prandtl, Verh. Int. Kongr., 3rd. Heidelberg, Transl. 1928 NACA Memo 452 (1904) 484–491.
- [2] S. Saintlos, J. Bretteville, Approximation uniformément valable pour l'écoulement de Falkner–Skan, C.R. Mecanique 330 (2002) 673–682.
- [3] M. Van Dyke, Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Applied Mathematics and Mechanics, Academic Press, New York, 1964.
- [4] J. Cousteix, J. Mauss, Analyse Asymptotique et Couche Limite, Mathématiques et Applications, Springer, 2006.
- [5] P.A. Libby, H. Fox, Some perturbations solutions in laminar boundary-layer theory, Part 1, J. Fluid Mech 17 (1963) 433–449.
- [6] S. Saintlos, J. Bretteville, Three dimensional analytical perturbations solutions and algebraic growths over a flat surface, in: International Conference on Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods, Bail, 2004.
- [7] S. Saintlos, J. Bretteville, M. Braza, Uniformly valid asymptotic solution for Falkner–Skan flow and Navier–Stokes simulation, in: International Conference on Boundary and Interior Layers, Computational and Asymptotic Methods, Bail, 2004.
- [8] J.C. Kalita, D.C. Dalal, A.K. Dass, A class of higher order compact schemes for the unsteady two-dimensional convection–diffusion equation with variable convection coefficients, Int. J. Numer. Methods Fluids 38 (2002) 1111–1131.
- [9] M. Braza, Simulation numérique du décollement instationnaire externe par une formulation vitesse–pression, Application à l'écoulement autour d'un cylindre, Thèse de l'INP de Toulouse, 1981.
- [10] J. Douglas, Alternating direction methods for three-space variables, Numer. Math. 4 (1962) 41–63.
- [11] S. Karaa, J. Zhang, High order ADI method for solving unsteady convection–diffusion problems, J. Comput. Phys. 198 (2004) 1–9.
- [12] K. Debbagh, S. Saintlos Brillac, Formulation compacte d'ordre quatre des équations de Navier–Stokes 2D : Application à l'écoulement d'un fluide sur une plaque plane, in : 18<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Grenoble, 2007.
- [13] P. Luchini, Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface: optimal perturbations, J. Fluid Mech. 404 (2000) 289–309.
- [14] K. Debbagh, S. Saintlos Brillac, A two-dimensional disturbed flows over a flat plate: theoretical and numerical approach, in: IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flow and Their Control, à paraître dans les proceeding, Springer-Verlag, Corfou, 2007.
- [15] P. Cathalifaud, P. Luchini, Algebraic growth in boundary layers: optimal control by blowing and suction at the wall, Eur. J. Mech. B Fluids 19 (2000) 469–490.
- [16] P. Luchini, Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface, J. Fluid Mech. 327 (1996) 101–115.