

# Propagation d'ondes élastiques au sein d'un guide d'ondes élastiques anisotrope à gradient unidirectionnel sous chargement fluide

Cécile Baron, Salah Naili \*

*Laboratoire de mécanique physique, UMR CNRS 7052, B2OA, faculté des sciences et technologie, Université Paris 12 – Val de Marne, 61, avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil cedex, France*

Reçu le 9 juin 2008 ; accepté après révision le 8 juillet 2008

Disponible sur Internet le 28 août 2008

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

## Résumé

L'évaluation non-destructive de matériaux hétérogènes est un enjeu majeur dans les domaines industriel et biomédical. Dans ce travail, la structure étudiée est un tri-couche constitué d'une couche solide anisotrope, hétérogène dans une direction, comprise entre deux fluides acoustiques. Une méthode originale est proposée pour résoudre l'équation d'ondes dans ces milieux sans passer par une modélisation multicouches de la plaque. Cette méthode est basée sur une solution analytique, le matricant, exprimée sous une forme explicite : le développement en série de Peano. Nous validons cette approche pour l'étude d'un guide d'ondes plan anisotrope chargé par deux fluides différents de part et d'autre. Cette configuration correspond notamment au dispositif de transmission axiale pour l'évaluation ultrasonore de l'os cortical in vivo. **Pour citer cet article : C. Baron, S. Naili, C. R. Mécanique 336 (2008).**

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abstract

**Elastic wave propagation in a fluid-loaded anisotropic waveguide with laterally varying properties.** Non-destructive evaluation of heterogeneous materials is of major great interest in industrial and in biomedical fields. In this work, the structure is made of three layers: a laterally heterogeneous anisotropic solid layer between two acoustic fluids. An original method is proposed to solve the wave equation in such structure without using a multilayered model of the plate. This method is based on an analytical solution, the matricant, explicitly expressed under the Peano expansion form. We validate this approach for the study of a fluid-loaded anisotropic plane waveguide with two different fluids on each side. This configuration corresponds to the axial transmission technique for the ultrasound characterization of cortical bone in vivo. **To cite this article: C. Baron, S. Naili, C. R. Mécanique 336 (2008).**

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

**Mots-clés :** Ondes ; Guide d'ondes ; Propriétés continûment variables ; Couplage fluide/structure ; Formalisme de Stroh ; Matricant ; Transmission axiale ; Os

**Keywords :** Waves ; Waveguide ; Continuously varying properties ; Fluid/solid medium ; Stroh formalism ; Matricant ; Axial transmission ; Bone

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [cecile.baron@univ-paris12.fr](mailto:cecile.baron@univ-paris12.fr) (C. Baron), [naili@univ-paris12.fr](mailto:naili@univ-paris12.fr) (S. Naili).

## Abridged English version

Many studies have demonstrated the interest of studying the propagation of Lamb waves to evaluate plane waveguides. Numerous works reported on the relationship between the zeroes and poles of the reflection coefficient of a fluid-loaded plate and on the dispersion curves of “Leaky Lamb Waves” [1–3]. The particular case of anisotropic laterally functionally graded plate asymmetrically loaded by fluids has not been studied, except by replacing the continuously varying structure by a multilayered one.

### Model and equation setup

We consider a plane waveguide whose interfaces with fluids are parallel to the plane  $(x_1, x_2)$ , with continuously varying properties depending on the thickness direction  $x_3$ . The wave equation obtained from the fundamental dynamic principle and the Hooke’s law is a second-order differential equation with non-constant coefficients with no general analytical solution. It is rewritten in the Fourier domain (wavenumber-frequency) under the form of a first-order system of ordinary differential system with non-constants coefficients, see Eq. (8). This Hamiltonian formulation corresponds to the Stroh formalism [4]. The state vector  $\eta(x_3)$  is expressed from displacement and traction components; the system-matrix  $\mathbf{Q}(x_3)$  depends on stiffness coefficients and mass density varying with  $x_3$ , and on two acoustical parameters the  $x_1$ -component slowness  $s_1$  and the angular frequency  $\omega$ . This matrix system has an analytical solution, the matricant, with an explicit form, the Peano expansion (see Eq. (11)). Consequently, the analytical solution of the wave equation is expressed through the Peano expansion of the matricant in the plate and is perfectly known in perfect fluids. Applying the boundary conditions (continuity of normal displacement and traction) and taking into account that in perfect fluids the shear stress components are null, we obtain the analytical expression of the reflection  $\hat{R}(k_1, x_3; \omega)$  and transmission  $\hat{T}(k_1, x_3; \omega)$  coefficients in the Fourier domain.

### Validation

This approach is validated by comparing the dispersion curves obtained for an isotropic aluminium plate with literature results [1]. The equation setup allows to consider anisotropic waveguide. The dispersion curves are calculated for a transverse isotropic plate immersed in water. They are in perfect agreement with analytical calculations obtained from the paper of Nayfeh and Chimenti [5]. Then we underline one of the advantages of the method: the possibility to take into account asymmetrical load without modifying the resolution scheme. We compare the results from the Peano expansion of the matricant with those published by Franklin et al. [6].

### Results

Finally, we investigate the influence of a linear gradient on the frequency spectrum of the reflection coefficient. At the interface between the incident fluid and the waveguide, the reflected wave is sensitive to a linear gradient of the mechanical properties in the plate. These results are promising especially in the context of ultrasound characterization of cortical bone in vivo using axial transmission technique.

## 1. Introduction

De nombreux milieux naturels présentent des variations unidirectionnelles et continues de leurs propriétés élastiques. La croûte terrestre, les océans ou encore l’os cortical en font partie. Tirant leur inspiration de la Nature qui les entoure, les scientifiques (chercheurs et ingénieurs), se sont penchés sur les avantages que présentaient ce type de matériaux en terme de comportement mécanique et c’est ainsi que l’on vit apparaître, dans les années 1980, des matériaux à gradients fonctionnels (Functionally Graded Materials (FGM)). Ces matériaux sont particulièrement utilisés dans les domaines de hautes technologies : aéronautique, aérospatiale, nucléaire, semi-conducteurs, etc., et trouvent également des applications biomédicales. Ils permettent par exemple de reproduire les propriétés structurales et matérielles des tissus biologiques tel que l’os à différentes étapes de son évolution (croissance, vieillissement ou pathologie). Ils sont particulièrement mis en œuvre dans la conception de biomatériaux pour la réalisation d’implants prothétiques. C’est pourquoi la caractérisation non-destructive des matériaux à gradient de propriétés unidirectionnel est un enjeu majeur.

Les ondes de surface et les ondes guidées jouent un rôle prépondérant dans le contrôle et l'évaluation non-destructifs des matériaux. Plusieurs études ont été consacrées à la propagation des « ondes de Lamb » dans un guide d'ondes plan immergé dans un fluide (Leaky Lamb Waves) [1–3]. Dans tous les cas, il s'agissait de structures homogènes ou stratifiées (multicouche). Dans le présent travail, nous introduisons une méthode générale qui permet de prendre en compte la variation unidirectionnelle et continue des propriétés élastiques d'un guide d'ondes plan anisotrope. Cette méthode conserve l'authenticité du problème (pas d'approximation avant la résolution) et fournit une solution analytique de l'équation d'onde *via* le développement en série de Peano du matricant. L'erreur commise lors de l'évaluation numérique de cette solution et son domaine de validité sont parfaitement maîtrisés. Grâce à la connaissance d'une solution analytique, on contrôle tous les paramètres régissant la propagation d'ondes, ce qui constitue un avantage très net par rapport aux modèles issus de méthodes purement numériques du type éléments finis ou différences finies où le problème ne peut être approché que dans sa globalité, ce qui rend difficile l'interprétation des mesures expérimentales résultant de l'interaction de nombreux phénomènes physiques. La méthode présentée ici offre donc de larges possibilités dans l'analyse du phénomène global de propagation d'ondes dans un guide plan tout en permettant d'isoler et d'étudier séparément les différentes contributions (différents modes) qui interagissent. À notre connaissance, la méthode présentée ici est la première permettant d'évaluer le comportement élastique d'un guide d'ondes plan anisotrope, à propriétés continûment variables sous chargement asymétrique, obtenu par la présence de fluides différents de part et d'autre du guide d'ondes, sans passer par une modélisation multicouche du guide d'ondes.

Cette Note est organisée de la façon suivante. Tout d'abord nous présentons la méthode et sa mise en œuvre dans le cadre du couplage fluide–structure ; nous procédons ensuite à la validation du modèle en comparant les courbes de dispersion obtenues par des schémas classiques sur des guides d'ondes plans homogènes isotropes puis isotropes transverses. Deux avantages de la méthode sont ensuite soulignés : i) la possibilité de prendre en compte un chargement asymétrique sans modifier le schéma de résolution de l'équation d'onde ; ii) la possibilité d'analyser l'influence d'un gradient de propriétés (continu ou discontinu). Nous abordons ensuite la pertinence de ce modèle appliqué à l'étude de la propagation ultrasonore pour la caractérisation de l'os cortical par transmission axiale.

## 2. Formulation générale du problème

Nous considérons un guide d'ondes plan sous forme d'une plaque élastique d'épaisseur  $d$  immergée entre deux fluides parfaits  $f_1$  et  $f_2$ , de masses volumiques respectives  $\rho_{f_1}$  et  $\rho_{f_2}$ , et de célérités respectives  $c_{f_1}$  et  $c_{f_2}$ . Les interfaces entre les fluides et la plaque sont constituées de plans infinis parallèles au plan  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ . On considère donc une structure bi-dimensionnelle pour laquelle les ondes guidées se propagent dans le plan  $x_2 = 0$  (voir Fig. 1) ; dans la suite du papier, cette coordonnée est implicite et est omise dans les expressions mathématiques.

La plaque élastique est supposée anisotrope et est susceptible de présenter une variation continue de ses propriétés caractéristiques selon son épaisseur (direction  $\mathbf{x}_3$ ). Ces propriétés mécaniques sont représentées par le tenseur d'élasticité  $\mathbb{C} = \mathbb{C}(x_3)$  et par sa masse volumique  $\rho = \rho(x_3)$ .

### 2.1. Les équations du système

#### 2.1.1. Équation d'onde dans le fluide $f_n$ (pour $n = 1$ ou $2$ )

Dans le fluide  $f_n$ , les équations caractéristiques s'écrivent :

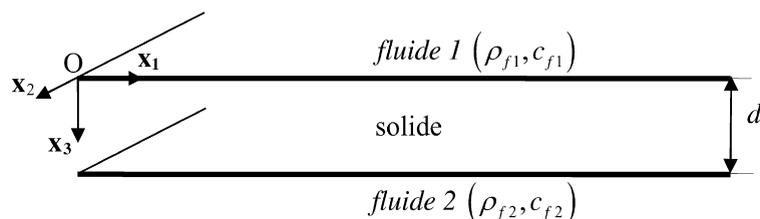


Fig. 1. Configuration géométrique du guide d'ondes plan.

Fig. 1. Waveguide geometrical configuration.

$$\begin{cases} -\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x_j} = \rho_{f_n} \frac{\partial^2 u_j^{(n)}}{\partial t^2} \\ p^{(n)} = K_{f_n} \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n)} \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{u}^{(n)}$  et  $p^{(n)}$  désignent respectivement le vecteur déplacement et la pression dans le fluide  $f_n$  ; sa compressibilité et sa célérité sont respectivement  $K_{f_n}$  et  $c_{f_n} = \sqrt{K_{f_n}/\rho_{f_n}}$ . L'opérateur  $\operatorname{div}$  est la divergence.

Les champs solutions du système (1) pour le fluide  $f_n$  sont cherchés sous la forme :

$$\mathbf{f}_n(x_1, x_2; t) = \mathbf{A}_n(x_3) \exp i(k_1 x_1 + k_3^{(n)} x_3 - \omega t) \quad (2)$$

où  $k_1$  et  $k_3^{(n)}$  sont les nombres d'onde selon  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_3$  respectivement dans le fluide  $f_n$  ;  $\omega$  est la pulsation.

Considérons une onde incidente formant un angle  $\theta_1$  avec l'axe  $\mathbf{x}_3$  dans le fluide  $f_1$ . On définit le champ de déplacement incident sous la forme suivante, en considérant que son amplitude est normalisée :

$$\mathbf{u}_I^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ 0 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \exp i(k_1 x_1 + k_3^{(1)} x_3 - \omega t) \quad (3)$$

avec  $\sin \theta_1 = k_1 c_{f_1} / \omega$  et  $\cos \theta_1 = k_3^{(1)} c_{f_1} / \omega$ . On en déduit l'expression des champs de déplacement réfléchi  $\mathbf{u}_R^{(1)}$  dans  $f_1$  ; et transmis  $\mathbf{u}_T^{(2)}$  dans  $f_2$  :

$$\mathbf{u}_R^{(1)} = R \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ 0 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \exp i(k_1 x_1 - k_3^{(1)} x_3 - \omega t), \quad \mathbf{u}_T^{(2)} = T \frac{c_{f_2}}{c_{f_1}} \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ 0 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \exp i(k_1 x_1 + k_3^{(2)} x_3 - \omega t) \quad (4)$$

Les champs de pressions incident, réfléchi et transmis, notés respectivement  $p_I^{(1)}$ ,  $p_R^{(1)}$  et  $p_T^{(2)}$  s'obtiennent à partir des expressions (3) et (4) et de la deuxième équation du système (1). Les quantités  $R$  et  $T$  désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission lesquels seront explicités dans la suite de l'article.

### 2.1.2. Équation d'onde dans le guide d'ondes plan

On néglige les forces de volume dans la plaque solide. La loi de conservation de la quantité de mouvement associée à la loi de comportement de l'élasticité linéaire (loi de Hooke) forme les équations caractéristiques suivantes, exprimées en fonction des champs déplacement-contrainte  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \\ \sigma_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \end{cases} \quad (5)$$

où  $u_i$  (pour  $i = 1, \dots, 3$ ) et  $\sigma_{ij}$  (pour  $i, j = 1, \dots, 3$ ) désignent respectivement les composantes des champs de déplacement  $\mathbf{u}$  et de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$ . Dans ces équations, la convention de l'indice répété d'Einstein est utilisée. Les solutions recherchées pour les vecteurs déplacement  $\mathbf{u}$  et traction  $\sigma_{i3}$  (pour  $i = 1, \dots, 3$ ) (supposées harmoniques en temps  $t$  et en espace selon  $\mathbf{x}_1$ ) se mettent sous la forme :

$$\mathbf{f}(x_1, x_3; t) = \mathbf{A}(x_3) \exp i(k_1 x_1 - \omega t) \quad (6)$$

### 2.1.3. Conditions aux limites imposées par le chargement fluide

Les conditions aux limites aux deux interfaces  $x_3 = 0$  et  $x_3 = d$  sont la continuité du déplacement normal et la continuité des contraintes normales. Les fluides  $f_1$  et  $f_2$  étant parfaits, les contraintes de cisaillement y sont nulles ( $\sigma_{13}(x_1, 0; t) = \sigma_{13}(x_1, d; t) = 0$  et  $\sigma_{23}(x_1, 0; t) = \sigma_{23}(x_1, d; t) = 0$ ). On obtient donc les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_3(x_1, 0; t) = u_3^{(1)}(x_1, 0; t), & u_3(x_1, d; t) = u_3^{(2)}(x_1, d; t) \\ \sigma_{33}(x_1, 0; t) = -p^{(1)}(x_1, 0; t), & \sigma_{33}(x_1, d; t) = -p^{(2)}(x_1, d; t) \end{cases} \quad (7)$$

## 2.2. Une solution analytique générale : le matricant

Lorsqu'on introduit l'expression (6) dans les équations (5), on obtient une équation d'onde sous la forme d'une équation différentielle d'ordre deux à coefficients non-constants. Pour des formes de profils particuliers, cette équation possède des solutions analytiques exprimées à l'aide de fonctions spéciales de type Bessel ou Hankel [7]. Dans le cas général, il n'existe pas de solution analytique au problème ainsi formulé. Les méthodes les plus couramment utilisées pour résoudre l'équation d'onde dans un milieu à hétérogénéité unidirectionnelle sont les techniques dérivées de la méthode dite Thomson–Haskell [8,9]. Ces méthodes sont bien adaptées dans le cas de milieux multicouches [10–13]. Dans le cas de milieux continûment variables, ces techniques nécessitent d'approcher les profils continus de propriétés par des fonctions constantes par morceaux. Ainsi le problème étudié est un problème approché avant l'étape de résolution ; la précision de la solution obtenue ainsi que son domaine de validité sont alors difficiles à évaluer. De plus, la modélisation « multicouches » du guide continûment variable crée des interfaces « virtuelles » qui peuvent donner lieu à des artefacts.

Afin de traiter le problème exact, c'est-à-dire de conserver la continuité des variations de propriétés, l'équation d'onde est réécrite sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre à coefficients non-constants pour lequel une solution analytique existe : le matricant [14].

On considère que le matériau possède une symétrie matérielle d'orthotropie autorisant le découplage des ondes P-SV (Pressure–Shear Vertical), polarisées dans le plan de propagation ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3$ ) et les ondes SH (Shear Horizontal) polarisées selon  $\mathbf{x}_2$ . Le milieu incident étant un fluide parfait  $f_1$ , seules les ondes P-SV se propagent dans la plaque. En opérant une transformée de Fourier spatio-temporelle en  $(x_1, t)$  sur les champs de déplacement (notée  $\hat{\mathbf{u}}(k_1, x_3; \omega)$ ) et de traction (notée  $\hat{\sigma}_{i3}(k_1, x_3; \omega)$  pour  $i = 1, \dots, 3$ ), l'équation d'ondes prend la forme d'un système matriciel exprimé en adoptant le paramétrage de Thomson–Haskell du formalisme de Stroh [4] et la convention de Voigt ( $C_{ijkl}$  pour  $i, j, k, l = 1, \dots, 3$  est transformé en  $c_{IJ}$  pour  $I, J = 1, \dots, 6$ ) :

$$\frac{d}{dx_3} \boldsymbol{\eta}(x_3) = \iota \omega \mathbf{Q}(x_3) \boldsymbol{\eta}(x_3) \quad (8)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dx_3} \begin{pmatrix} \iota \omega \hat{u}_1 \\ \iota \omega \hat{u}_3 \\ \hat{\sigma}_{13} \\ \hat{\sigma}_{33} \end{pmatrix} = \iota \omega \begin{pmatrix} 0 & s_1 & 1/c_{55}(x_3) & 0 \\ -c_{13}(x_3)/c_{33}(x_3)s_1 & 0 & 0 & 1/c_{33}(x_3) \\ \rho(x_3) - s_1^2 \zeta(x_3) & 0 & 0 & -c_{13}(x_3)/c_{33}(x_3)s_1 \\ 0 & \rho(x_3) & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \iota \omega \hat{u}_1 \\ \iota \omega \hat{u}_3 \\ \hat{\sigma}_{13} \\ \hat{\sigma}_{33} \end{pmatrix} \quad (9)$$

avec les relations :

$$\zeta(x_3) = c_{11}(x_3) - \frac{c_{13}^2(x_3)}{c_{33}(x_3)}, \quad k_1 = \omega s_1 \quad (10)$$

où  $s_1$  est la composante selon  $\mathbf{x}_1$  de la lenteur. La matrice  $\mathbf{Q}$  contient toutes les informations concernant l'hétérogénéité du guide d'ondes plan puisqu'elle s'exprime à partir des propriétés mécaniques de la plaque ( $\rho(x_3), \mathbb{C}(x_3)$ ) et de deux paramètres acoustiques ( $s_1, \omega$ ). L'équation d'onde ainsi formulée possède une solution analytique exprimée entre un point de référence  $(x_1, 0, x_3^0)$  et un point quelconque de la plaque  $(x_1, 0, x_3)$  dans le plan de propagation. Cette solution est appelée le matricant et s'écrit explicitement sous la forme du développement en série de Peano :

$$\mathbf{M}(x_3, x_3^0) = \mathbf{I} + \iota \omega \int_{x_3^0}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) d\xi + (\iota \omega)^2 \int_{x_3^0}^{x_3} \mathbf{Q}(\xi) \left( \int_{x_3^0}^{\xi} \mathbf{Q}(\xi_1) d\xi_1 \right) d\xi + \dots \quad (11)$$

où  $\mathbf{I}$  est ici la matrice identité de dimension (4, 4). On remarque que la factorisation en  $\iota \omega$  permet une écriture polynômiale du matricant. Les coefficients de ce polynôme en  $\iota \omega$  sont des matrices indépendantes de  $\omega$ .

En utilisant la propriété de propagateur du matricant dans l'épaisseur de la plaque, le vecteur d'état (défini dans (9)) à la seconde interface  $\boldsymbol{\eta}(d)$  est évalué à partir du vecteur d'état à la première interface  $\boldsymbol{\eta}(0)$  comme suit :

$$\boldsymbol{\eta}(d) = \mathbf{M}(d, 0) \boldsymbol{\eta}(0) \quad (12)$$

Le couplage fluide–structure est pris en compte *via* l'équation (7) laquelle est utilisée après l'application d'une transformée de Fourier spatio-temporelle en  $(x_1, t)$ . La condition pour obtenir une solution non triviale à l'équation (12) se traduit donc par la relation suivante :

$$i\omega\hat{u}_1(k_1, 0; \omega) \times M_{13} + i\omega\hat{u}_3(k_1, 0; \omega) \times M_{32} + \hat{\sigma}_{33}(k_1, 0; \omega) \times M_{34} = 0 \quad (13)$$

où  $M_{ij}$  (pour  $i, j = 1, \dots, 4$ ) représente les composantes de  $\mathbf{M}(d, 0)$ . On peut donc exprimer  $\hat{u}_1(k_1, 0; \omega)$  comme combinaison linéaire de  $\hat{u}_3(k_1, 0; \omega)$  et  $\hat{\sigma}_{33}(k_1, 0; \omega)$  et réduire ainsi le système (12) de dimension 4 en un système matriciel de dimension 2 :

$$\eta(d) = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \eta(0), \quad \text{où } \eta(x_3) = \begin{pmatrix} i\omega\hat{u}_3 \\ \hat{\sigma}_{33} \end{pmatrix} \quad (14)$$

avec les relations :

$$P_1 = M_{22} - M_{21} \frac{M_{32}}{M_{31}}, \quad P_2 = M_{24} - M_{21} \frac{M_{34}}{M_{31}}, \quad P_3 = M_{42} - M_{41} \frac{M_{32}}{M_{31}}, \quad P_4 = M_{44} - M_{41} \frac{M_{34}}{M_{31}} \quad (15)$$

On substitue les expressions des champs de déplacement et de pression des fluides, et celles pour le solide (14) dans les conditions aux limites (7) exprimées dans le domaine de Fourier  $(k_1, x_3; \omega)$ . On aboutit à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} i\omega s_3^{(1)} c_{f_1} & 1 & 0 & 0 \\ -i\omega \rho_{f_1} c_{f_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & P_1 & P_2 & -i\omega s_3^{(2)} c_{f_2} \exp(i\omega s_3^{(2)} d) \\ 0 & P_3 & P_4 & -i\omega \rho_{f_2} c_{f_2} \exp(i\omega s_3^{(2)} d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{R} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \hat{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega s_3^{(1)} c_{f_1} \\ i\omega \rho_{f_1} c_{f_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

où  $\mathbf{s}^{(n)} = \mathbf{k}^{(n)}/\omega$  est le vecteur lenteur dans le fluide  $f_n$  (pour  $n = 1$  ou  $2$ ); les quantités  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont respectivement les amplitudes des champs de déplacement et de traction dans le guide d'ondes à l'interface  $x_3 = 0$ . On en déduit l'expression analytique des coefficients de réflexion et de transmission complexes  $\hat{R}(s_1, x_3; \omega)$  et  $\hat{T}(s_1, x_3; \omega)$  respectivement :

$$\hat{R} = \frac{(P_3 - P_1 Z_2 + P_4 Z_1 - P_2 Z_1 Z_2)}{(P_3 - P_1 Z_2 - P_4 Z_1 + P_2 Z_1 Z_2)}, \quad \hat{T} = \frac{-2Z_2(\rho_{f_1} c_{f_1} / \rho_{f_2} c_{f_2})(P_1 P_4 - P_2 P_3)}{(P_3 - P_1 Z_2 - P_4 Z_1 + P_2 Z_1 Z_2)} \exp(-i\omega s_3^{(2)} d) \quad (17)$$

avec  $Z_n = \rho_{f_n} / \sqrt{1/c_{f_n}^2 - s_1^2}$  (pour  $n = 1$  ou  $2$ ).

### 3. Validation

Il s'agit ici de vérifier que le développement en série de Peano du matricant est adapté à l'étude d'un guide d'ondes plan sous chargement fluide. La prise en compte du couplage fluide–structure est testée dans différentes configurations de plaques homogènes en comparant les résultats issus de l'implémentation numérique du développement en série de Peano du matricant avec des résultats issus de la littérature.

L'évaluation numérique de  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$  implique la troncature de la série de Peano et le calcul numérique des intégrales. L'erreur ainsi commise peut donc être estimée et contrôlée [14]. L'ensemble des résultats qui suivent ont été obtenus en retenant 70 termes dans la série et en évaluant numériquement les intégrales sur 100 points par la méthode de Simpson. Les expressions (17) fournissent le spectre fréquentiel (module et phase) du coefficient de réflexion pour différentes incidences ( $s_1$  variant de zéro – incidence normale – à  $1/c_{f_1}$  correspondant à l'incidence critique pour le fluide  $f_1$ ). De nombreux travaux ont détaillé la relation entre les pôles et les zéros du spectre fréquentiel du coefficient de réflexion et les courbes de dispersion des ondes de Lamb évanescences [1,3]. Les résultats de la Section 3.1 comparent les courbes de dispersion obtenues en recherchant les pôles du coefficient de réflexion (17) et des résultats de la littérature ou issus de calcul analytique.

#### 3.1. Validation pour une plaque homogène et isotrope ou anisotrope sous chargement symétrique

La méthode est testée en traçant les courbes de dispersion (évolution de la vitesse de phase en fonction du produit fréquence-épaisseur) pour une plaque d'aluminium isotrope immergée dans l'eau de part et d'autre. Les données de

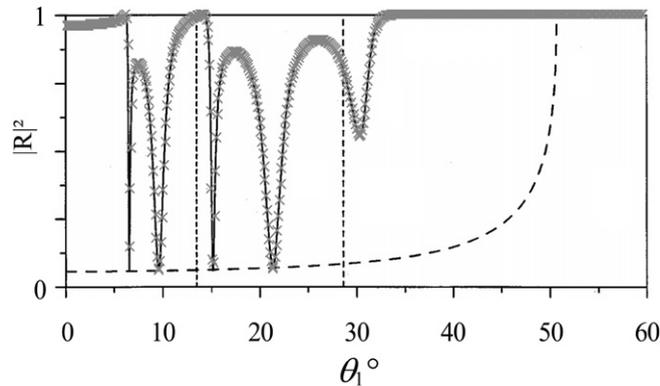


Fig. 2. Module du coefficient de réflexion d'un plaque d'aluminium chargée asymétriquement (eau et glycérine) – en trait solide noir les résultats publiés dans Franklin et al. [6], les croix grises représentent le module du coefficient de réflexion (17). Les traits pointillés verticaux représentent les deux angles critiques pour les ondes longitudinales et transversales. La courbe en pointillés correspond au calcul des amplitudes de résonance [6].

Fig. 2. Reflection coefficient modulus for an asymmetrically fluid-loaded aluminium plate (water and glycerine) – in dark lines results published in Franklin et al. [6], the grey crosses represent the reflection coefficient modulus calculated from (17). The vertical lines (dashed) represent the two critical angles for longitudinal waves and transverse waves. The dashed curve correspond to the resonant amplitudes [6].

l'article de Chimenti et Rokhlin [1] sont utilisées. Les résultats obtenus (non montrés) par la présente méthode sont en parfait accord avec les résultats présentés par Chimenti et Rokhlin [1].

La prise en compte de l'anisotropie ne modifie pas le schéma de résolution de l'équation d'ondes à l'aide du matricant lorsque l'on considère une plaque isotrope transverse immergée dans l'eau de part et d'autre. Pour cette configuration, Nayfeh et Chimenti [5] ont développé une méthode qui permet d'obtenir une solution analytique. En utilisant les données issues de cet article, les résultats obtenus (non montrés) avec la présente méthode sont en parfait accord avec les leurs.

### 3.2. Chargement asymétrique et hétérogénéité

Le formalisme présenté ici pour la résolution de l'équation d'onde dans un milieu à gradient unidirectionnel présente deux avantages majeurs : la prise en compte, sans modifier le processus de résolution, i) de l'asymétrie du chargement fluides et ii) de l'hétérogénéité unidirectionnelle.

#### 3.2.1. Plaque homogène isotrope et chargement asymétrique ( $f_1 \neq f_2$ )

Dans le cas d'un chargement symétrique, il existe une seule fréquence critique et une seule valeur de la vitesse de phase  $v_\varphi$  au sein de la plaque correspondant à la vitesse de propagation des ondes dans le fluide ( $v_\varphi = c_{f_1} = c_{f_2}$ ) pour laquelle les déplacements et les contraintes aux interfaces sont quasi-nuls. Dans le cas d'un chargement asymétrique pour lequel les fluides ont des célérités différentes, il existe deux fréquences critiques et deux valeurs de vitesses de phase au sein de la plaque pour lesquelles la plaque ne répond pas [15]. La validation est effectuée sur une plaque d'aluminium isotrope dont les propriétés sont les suivantes :  $\rho = 2,79 \text{ g cm}^{-3}$  ; les célérités des ondes longitudinales et transversales sont respectivement  $v_L = 6,38 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$  et  $v_T = 3,10 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$ . Les propriétés caractéristiques du fluide  $f_1$  correspondent à celle de l'eau :  $\rho_{f_1} = 1 \text{ g/cm}^3$  et  $c_{f_1} = 1,485 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$  ; celles du fluide  $f_2$  à la glycérine :  $\rho_{f_2} = 1,26 \text{ g cm}^{-3}$  et  $c_{f_2} = 1,920 \text{ mm } \mu\text{s}^{-1}$ . Cette configuration correspond à celle étudiée par Franklin et al. [6]. Sur la Fig. 2 est tracé le module du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence pour une fréquence fixée ( $f \times d = 4,7 \text{ MHz mm}$ ). Cette figure montre des résultats en parfait accord avec ceux de Franklin et al. [6].

#### 3.2.2. Influence du gradient sur le spectre fréquentiel du coefficient de réflexion

La principale caractéristique du formalisme développé dans cette étude est la possibilité de tenir compte d'une variation continue des propriétés mécaniques d'une structure selon une direction de l'espace (ici l'épaisseur du guide d'ondes). On étudie l'influence d'un gradient linéaire de propriétés (correspondant à une augmentation de 10 % de la porosité et une diminution de 10 % de l'ensemble des vitesses de propagation) d'une plaque d'os supposée isotrope

Tableau 1

Propriétés élastiques de la plaque d'os isotrope transverse à gradient linéaire dans la direction  $x_3$  entre les plans  $x_3 = 0$  et  $x_3 = d$ 

Table 1

Elastic properties of transverse isotropic bone plate with linearly varying properties along the  $x_3$ -axis between the planes  $x_3 = 0$  et  $x_3 = d$ 

	$\rho$ (g cm <sup>3</sup> )	$C_{11}$ (GPa)	$C_{22} = C_{33}$ (GPa)	$C_{13} = C_{12}$ (GPa)	$C_{44}$ (GPa)	$C_{55} = C_{66}$ (GPa)
$x_3 = 0$	1,9	30,04	24,6	10	6,16	9,2
$x_3 = d$	1,81	23,18	18,98	7,72	4,75	7,1

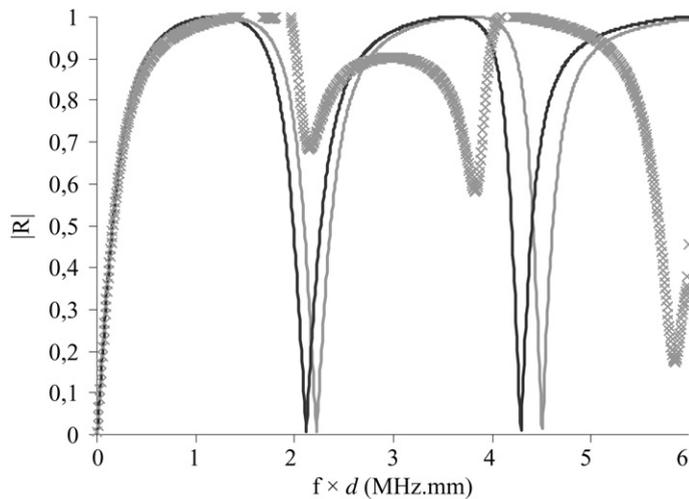


Fig. 3. Spectre fréquentiel du module du coefficient de réflexion pour une plaque homogène dont les propriétés correspondent aux propriétés en  $x_3 = 0$  (trait fin gris), une plaque homogène dont les propriétés correspondent à la moyenne des propriétés sur l'épaisseur de la plaque (trait fin noir) et pour une plaque présentant une variation linéaire de sa masse volumique et de ses coefficients élastiques (croix grises).

Fig. 3. Frequency spectrum of the reflection coefficient modulus for a homogeneous plate whose properties are those at  $x_3 = 0$  (grey line), for a homogeneous plate whose properties are the average of the properties through the plate thickness (black line) and for a linearly varying plate (grey cross).

transverse et immergée dans l'eau de part et d'autre. Ses propriétés sont données dans le Tableau 1. Le spectre fréquentiel du coefficient de réflexion est tracé en Fig. 3 pour une incidence proche de l'incidence critique pour les ondes longitudinales dans la plaque, incidence correspondant à la génération de l'onde dite latérale [16] ( $\theta_1 \sim 21,93$  degrés (trait fin gris et croix grises) et  $\theta_1 \sim 23,08$  degrés (trait fin noir)). Cette figure montre que le comportement du module du coefficient de réflexion est sensiblement le même pour des fréquences comprises entre 0 et 1,8 MHz. Au-delà, les différences sont nettes.

#### 4. Perspectives

À partir de cette étude, l'obtention de la réponse transitoire de la plaque immergée est envisagée. Le spectre fréquentiel du coefficient de réflexion est calculé sur une plage d'incidences comprises entre les incidences normale et critique des ondes de compression dans le fluide  $f_1$  : on obtient ainsi la fonction de transfert de la plaque dans le domaine de Fourier « nombre d'onde horizontal – fréquence » :  $\hat{R}(k_1, x_3; \omega)$ . En effectuant une double transformée de Fourier inverse sur  $\hat{R}(k_1, x_3; \omega)$  afin de passer dans le domaine espace-temps, on obtient les signaux temporels en différents points de l'espace situés le long de la direction de propagation  $x_3$  :  $R(x_1, x_3; t)$ .

Par ailleurs, le formalisme présenté ici est adapté au traitement de la propagation d'ondes dans un cylindre creux anisotrope à gradient de propriétés radial [17]. L'équation d'onde conserve la forme (8), le vecteur d'état s'exprime à partir des composantes du déplacement dans la base cylindrique et des composantes de traction du tenseur des contraintes et la matrice  $\mathbf{Q}$  dépend de la position radiale  $r$  ( $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(r)$ ). Dans les structures cylindriques homogènes, la prise en compte d'une anisotropie plus importante que l'isotropie transverse est rendue très difficile par l'absence

de solutions analytiques à l'équation d'onde « classique » (équation différentielle du second ordre). Le formalisme de Stroh (formulation hamiltonienne de l'équation de propagation) [4] sur lequel est basé le développement en série de Peano du matricant est une solution alternative prometteuse qui permet de prendre en compte la géométrie (cylindre), l'anisotropie et l'hétérogénéité (gradient de propriétés radial) d'une structure.

En outre, dans le contexte du diagnostic médical, la caractérisation de la variation relative des propriétés mécaniques au sein de l'épaisseur corticale pourrait s'avérer pertinente dans l'estimation « standardisée » de la résistance osseuse. La transmission axiale est particulièrement dédiée à la caractérisation ultrasonore de l'os cortical qui représente 80 % de la masse osseuse, dans le diagnostic de pathologies ostéofragilisantes. En première approche, la configuration correspondante peut être modélisée par une plaque ou un cylindre creux d'os cortical présentant un gradient de propriétés selon son épaisseur placée entre deux fluides. D'après les résultats présentés ici, les signaux enregistrés en transmission axiale, issus des ondes réfléchies par la plaque et propagées dans le fluide, sont sensibles au gradient (voir Fig. 3) et pourraient être exploités pour sa caractérisation et l'évaluation de la fragilité osseuse. Pour cela, une étude paramétrique doit être menée afin de déterminer quels sont les paramètres ultrasonores accessibles par transmission axiale les plus représentatifs du gradient de propriétés (quels modes, à quelles fréquences ?). Une fois le gradient caractérisé par ultrasons, une deuxième étape sera l'élaboration d'un protocole standardisé et fiable d'évaluation de la résistance osseuse par mesures ultrasonores en vue d'une mise en œuvre clinique.

## Références

- [1] D.E. Chimenti, S.I. Rokhlin, Relationship between leaky Lamb modes and reflection coefficient zeroes for a fluid-coupled elastic layer, *Journal of Acoustical Society of America* 88 (1990) 1603–1611.
- [2] D.E. Chimenti, A.H. Nayfeh, Ultrasonic reflection and guided waves in fluid-coupled composite laminates, *Journal of Nondestructive Evaluation* 9 (1990) 51–69.
- [3] M. Deschamps, O. Poncelet, Transient lamb waves: comparison between theory and experiment, *Journal of Acoustical Society of America* 107 (2000) 3120–3129.
- [4] A.N. Stroh, Steady state problems in anisotropic elasticity, *Journal of Mathematics and Physics* 41 (1962) 77–103.
- [5] A.H. Nayfeh, D.E. Chimenti, Free wave propagation in plates of general anisotropic media, *Journal of Applied Mechanics* 56 (1989) 881–886.
- [6] H. Franklin, E. Danila, J.-M. Conoir, S-matrix theory applied to acoustic scattering by asymmetrically fluid-loaded elastic isotropic plates, *Journal of Acoustical Society of America* 110 (2001) 243–253.
- [7] V. Vlasie-Belloncle, M. Rousseau, Effect of a velocity gradient on the guided modes of a structure, in: *Proceedings of the 5th World Congress on Ultrasonics*, Paris, 7–10 Septembre 2003.
- [8] W.T. Thomson, Transmission of elastic waves through a stratified solid medium, *Journal of Applied Physics* 21 (1950) 89–93.
- [9] N.A. Haskell, The dispersion of surface waves on multilayered media, *Bulletin of the Seismological Society of America* 43 (1953) 377–393.
- [10] E.G. Kenneth, A propagator matrix method for periodically stratified media, *Journal of Acoustical Society of America* 73 (1) (1982) 137–142.
- [11] D. Lévesque, L. Piché, A robust transfer matrix simulation for ultrasonic response of multilayered absorbing media, *Journal of Acoustical Society of America* 92 (1) (1992) 452–467.
- [12] L. Wang, S.I. Rokhlin, Stable reformulation of transfer matrix method for wave propagation in layered anisotropic media, *Ultrasonics* 39 (2001) 413–424.
- [13] B. Hosten, M. Castaigns, Surface impedance matrices to model the propagation in multilayered media, *Ultrasonics* 41 (2003) 501–507.
- [14] C. Baron, Le développement en série de Peano du matricant pour l'étude de la propagation d'ondes en milieux continûment variables, PhD thesis, Université Bordeaux 1, France, 2005.
- [15] J. Dickey, G. Mairanik, H. Uberall, The splitting of dispersion curves for the fluid-loaded plate, *Journal of Acoustical Society of America* 98 (1995) 2365–2367.
- [16] E. Camus, M. Talmant, G. Berger, P. Laugier, Analysis of the axial transmission technique for the assessment of skeletal status, *Journal of the Acoustical Society of America* 108 (6) (2000) 3058–3065.
- [17] A.L. Shvalov, A sextic formalism for three-dimensional elastodynamics of cylindrically anisotropic radially inhomogeneous materials, *Proceedings of the Royal Society of London A* 459 (2003) 1611–1639.