

Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux

Nadia Mehidi, Nawel Amatusse *

Laboratoire de Physique théorique, Université A. Mira de Béjaia, route de Targa Ouzemmour, 06000 Béjaia, Algérie

Reçu le 21 mars 2008 ; accepté après révision le 4 mars 2009

Disponible sur Internet le 3 avril 2009

Présenté par Gérard Iooss

Résumé

Un modèle simplifié d'écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides est obtenu au moyen d'une méthode aux résidus pondérés combinée à un développement en gradient du profil de l'écoulement (Ruyer-Quil et Manneville, 2000). Il est décrit par deux équations couplées décrivant l'évolution de l'interface $h(x, t)$ et du débit local $q(x, t)$. Les prédictions de l'étude de stabilité linéaire sont en bon accord avec les données expérimentales et les calculs numériques de Preziosi et al. [L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, *J. Fluid Mech.* 201 (1989)]. **Pour citer cet article : N. Mehidi, N. Amatusse, *C. R. Mecanique* 337 (2009).**

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Modelling of two viscous fluids flow in circular pipe. A simplified model of core-annular flow is derived by using a weighted residual method combined with a long-wavelength expansion developed in 2000 by Ruyer-Quil and Manneville. A set of two coupled evolution equations for two fields, the thickness $h(x, t)$ and the flow rate $q(x, t)$ is obtained. Linear stability predictions are in good agreement with numerical and experimental results of Preziosi et al. [L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, *J. Fluid Mech.* 201 (1989)]. **To cite this article: N. Mehidi, N. Amatusse, *C. R. Mecanique* 337 (2009).**

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Mécanique des fluides ; Instabilité ; Fluides visqueux ; Écoulements coaxiaux ; Méthode des résidus pondérés

Keywords : Fluid mechanics; Instability; Viscous fluids; Core-annular flow; Weighted residual method

1. Introduction

La stabilité de l'interface entre deux fluides visqueux en écoulement laminaire a fait l'objet de nombreuses études. La plupart de ces études a concerné les écoulements de Couette et de Poiseuille entre deux plaques planes ou l'écoulement de Poiseuille coaxial en conduite circulaire. Pour ce dernier cas, on peut citer les travaux de Hickox [1], ainsi

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : nadbouam@yahoo.fr (N. Mehidi), amatousse@yahoo.fr (N. Amatusse).

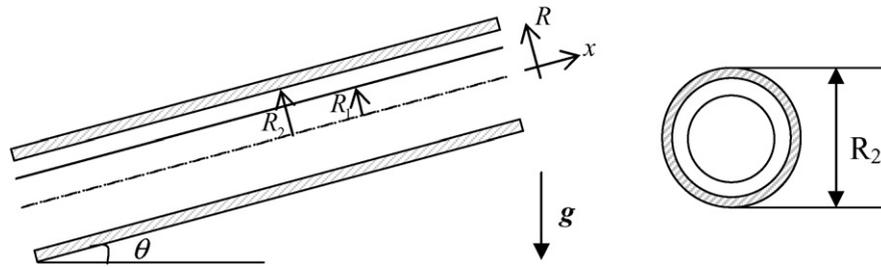


Fig. 1. Configuration et notations.

Fig. 1. Configuration and notations.

que ceux de Preziosi et al. [2]. Hickox étudie le cas où le fluide interne est le moins visqueux des deux. Il montre que pour des perturbations axisymétriques, l'interface est stable si le fluide interne est minoritaire. Preziosi et al. ont quant à eux étudié le cas d'un écoulement lubrifiant. Ils ont montré que pour certaines valeurs des rapports des rayons et des viscosités, il existe un nombre de Reynolds critique pour lequel l'instabilité capillaire est éliminée par le cisaillement. Ce genre de configuration a principalement fait l'objet d'études asymptotiques et numériques. A notre connaissance, les divers modèles existant dans la littérature n'ont concerné que des géométries planes. On retrouve parmi eux le développement asymptotique de Benney qui n'est valable qu'à des nombres de Reynolds faibles et les méthodes 'intégrales couche limite' de Shkadov qui utilisent une fonction poids uniforme sur l'épaisseur du film et qui bien que présentant des résultats très réalistes pour des nombres de Reynolds modérés ne prédisent pas correctement le seuil de l'instabilité.

Nous proposons dans ce travail, un modèle 2D décrivant l'écoulement de deux fluides à l'intérieur d'une conduite cylindrique inclinée. Ce travail fait suite à une étude qu'on a déjà menée dans le cas d'une géométrie plane [3]. Le modèle développé combine un développement en gradient du profil de l'écoulement à une méthode aux résidus pondérés [4]. Les fonctions tests utilisées sont de la forme de l'écoulement de base : elles sont de type polynomial pour le fluide interne et de type logarithmique pour le fluide pariétal. Cette théorie valable aussi bien au voisinage que loin du seuil de l'instabilité est au fait une amélioration de l'approche 'intégrale couche limite' de Shkadov.

2. Formulation du problème

On considère l'écoulement sous l'effet de la gravité de deux fluides concentriques à l'intérieur d'une conduite cylindrique (Fig. 1), le fluide interne est noté 1 et le fluide pariétal 2. R_1 est le rayon de la région fluide 1 et R_2 le rayon de la conduite. Les fluides sont newtoniens, incompressibles et immiscibles. L'écoulement est régi par les équations de Navier Stokes et de continuité :

$$\rho_j \left(\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \mathbf{v}_j \right) = -\nabla p_j + \rho_j \mathbf{g} + \mu_j \nabla^2 \mathbf{v}_j, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}_j = 0 \tag{1}$$

où ρ_j est la densité, μ_j la masse volumique, p_j la pression et $\mathbf{v}_j = (u_j, v_j)$ la vitesse dans chacun des fluides, ($j = 1, 2$). \mathbf{g} est l'accélération de la pesanteur.

Aux équations (1) sont adjointes les conditions aux limites : La vitesse \mathbf{v} est finie sur l'axe de symétrie.

$$\text{Condition d'adhérence à la paroi : } u_2 = v_2 = 0 \quad \text{en } R = R_2 \tag{2}$$

$$\text{Conditions de continuité des vitesses à l'interface : } \llbracket \mathbf{v} \rrbracket = 0 \tag{3}$$

$$\text{Condition cinématique à l'interface : } v_j = h_t + u_j h_x \tag{4}$$

Conditions de saut dynamique à l'interface :

$$\llbracket \mu \{ (u_R + v_x)(1 - h_x^2) - 2(u_x - v_R)h_x \} \rrbracket = 0 \tag{5}$$

$$\llbracket p + \frac{2\mu}{1 + h_x^2} \{ -v_R - u_x h_x^2 + h_x(u_R + v_x) \} \rrbracket = -\sigma (1 + h_x^2)^{-3/2} \left(h_{xx} - \frac{1}{h} + \frac{h_x^2}{2h} \right) \tag{6}$$

où σ est la tension superficielle. Lorsque l'écoulement est stationnaire et l'épaisseur constante ($h(x, t) = R_1$), la solution des équations (1)–(6) adimensionnées par le rayon R_1 de la région fluide 1 et la vitesse $u_0 = u_1(0) =$

($g \sin \theta R_1^2 / 4 \nu_1 \mu$) $[\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho) \ln d]$ le long de l'axe de symétrie est donnée par la composante axiale de la vitesse :

$$U_1(r) = \frac{u_1}{u_1(0)} = 1 - \frac{\mu r^2}{\mu - \rho(1 - d^2) - 2(1 - \rho) \ln d} \quad (7)$$

$$U_2(r) = \frac{u_2}{u_1(0)} = \frac{-\rho(r^2 - d^2) - 2(1 - \rho) \ln r + 2(1 - \rho) \ln d}{\mu - \rho(1 - d^2) - 2(1 - \rho) \ln d} \quad (8)$$

$$\text{où } r = R/R_1, \quad d = R_2/R_1, \quad \mu = \mu_2/\mu_1 \quad \text{et} \quad \rho = \rho_2/\rho_1$$

La mise sous forme adimensionnelle du système (1)–(6) est obtenue à l'aide des variables adimensionnelles suivantes : $u^* = u/u_0$, $x^* = x/\lambda$, $v^* = \nu\lambda/R_1 u_0$, $t^* = t u_0/\lambda$, $p^* = p R_1^2/\mu_1 u_0 \lambda$ où λ est la longueur d'onde dans la direction de l'écoulement. Pour tenir compte de l'hypothèse de grandes longueurs d'onde, on introduit le paramètre $\varepsilon = R_1/\lambda \ll 1$, on négligera alors dans les équations du mouvement les termes d'ordre supérieur à ε^2 . Il est à noter que $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{\partial}{\partial x} \sim \varepsilon$.

$$0 < r < h \quad R\varepsilon \mathbf{N}_1 u_1 = -P_{1x} + \left(u_{1rr} + \frac{u_{1r}}{r} + \varepsilon^2 u_{1xx} \right) + G \quad (9)$$

$$P_{1r} = \varepsilon^2 \left(v_{1rr} + \frac{v_{1r}}{r} - \frac{v_1}{r^2} \right) - \varepsilon G \cot \theta \quad (10)$$

$$h < r < d \quad \rho R\varepsilon \mathbf{N}_2 u_2 = -P_{2x} + \mu \left(u_{2rr} + \frac{u_{2r}}{r} + \varepsilon^2 u_{2xx} \right) + \rho G \quad (11)$$

$$P_{2r} = \mu \varepsilon^2 \left(v_{2rr} + \frac{v_{2r}}{r} - \frac{v_2}{r^2} \right) - \varepsilon \rho G \cot \theta \quad (12)$$

$$r = h(x, t) \quad u_{1r} - \mu u_{2r} = \varepsilon^2 \{ 2h_x(u_{1x} - \mu u_{2x}) - 2h_x(v_{1r} - \mu v_{2r}) - (v_{1x} - \mu v_{2x}) \} \quad (13)$$

$$[P] = 2\varepsilon^2(v_{1r} - \mu v_{2r}) + \varepsilon W \left(\frac{1}{h} - \varepsilon^2 \frac{h_x^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{xx} \right) \quad (14)$$

où \mathbf{N}_i représente l'opérateur non-linéaire $\partial_t + u_i \partial_x + v_i \partial_r$.

Les équations (9)–(14) font apparaître les nombres adimensionnels suivants : le nombre de Reynolds $R = \rho_1 u_0 R_1 / \mu_1$, le nombre de Weber $W = \sigma / \mu_1 u_0 = J^* / R d$ qu'on a supposé $O(\varepsilon^{-2})$ et $G = g \sin \theta R_1^2 / \nu_1 u_0$.

La pression est éliminée des équations de Navier Stokes en intégrant les équations (10) et (12) le long de l'épaisseur et en utilisant la condition normale (14). En reportant celles-ci dans (11) et (13), on aura :

$$R\varepsilon \mathbf{N}_1 u_1 = \Delta_r u_1 - \mu \Delta_r u_2|_{r=d} + (1 - \rho)G(1 - \cot \theta) - W\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - \varepsilon^2 \frac{h_x^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{xx} \right) + \varepsilon^2 u_{1xx} - \varepsilon^2 \frac{\partial v_{1r}}{\partial x} - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (v_{1r}|_h - \mu v_{2r}|_h) + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_r^h \left(\frac{v_{1r}}{r} - \frac{v_1}{r^2} \right) dr + \varepsilon^2 \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} \Big|_h - \frac{v_2}{r^2} \Big|_h \right) dr \quad (15)$$

$$R\varepsilon \rho \mathbf{N}_2 u_2 = \mu \Delta_r u_2 - \mu \Delta_r u_2|_{r=d} + \varepsilon^2 u_{2xx} + \varepsilon^2 \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} - \frac{v_2}{r^2} \right) dr - \varepsilon^2 \frac{\partial v_{2r}}{\partial x} \quad (16)$$

A ces deux équations on rajoute la condition cinématique sous forme intégrale :

$$q_x / 2\pi + h h_t = 0 \quad (17)$$

Où $\Delta_r = \partial_{rr} + 1/r \partial_r$, et $q = \int_0^h 2\pi r u_1 dr$ représente le débit instantané du fluide 1.

3. Le modèle

La technique utilisée combine une méthode aux résidus pondérés à un développement en gradient. Pour ce faire, on considère une projection des champs de vitesse axiale sur un ensemble de fonctions tests qui satisfont les conditions aux limites : adhérence à la paroi en $r = d$ et vitesse finie en $r = 0$:

$$u_1(x, r, t) = \sum_{k=0}^K a_k(x, t) f_k(r), \quad u_2(x, r, t) = \sum_{k=0}^K b_k(x, t) \tilde{f}_k(r) \tag{18}$$

Suivant la démarche initiée par Ruyer-Quil et Manneville [4] dans le cas des films liquides tombants et étendue aux cas de deux couches de fluides avec interface dans le cas plan [3], les champs de vitesse peuvent être écrits comme :

$$u_j(x, r, t) = u_j^{(0)} + \varepsilon u_j^{(1)} + O(\varepsilon^2) \tag{19}$$

où $u_j^{(0)}$ correspond à la solution à l'ordre zéro :

$$u_1^{(0)} = a_0(x, t) + a_1(x, t) \left(1 - \frac{r^2}{2h^2(x, t)}\right), \quad u_2^{(0)} = b_0(x, t) \left(\frac{d^2 - r^2}{h^2(x, t)}\right) + b_1(x, t) \ln\left(\frac{r}{d}\right) \tag{20}$$

Imposer à l'ordre 0 que les conditions aux limites (3), (5) et la contrainte relative au débit total soient vérifiées conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 - \mu(2b_0 - b_1) &= 0 \\ a_0 + \frac{a_1}{2} - \frac{b_0(d^2 - h^2)}{h^2} + b_1 \ln \frac{d}{h} &= 0 \\ Q_0 + \frac{\pi}{2}(d^2 - h^2)(b_0 + b_1) - \frac{\pi d^4}{2h^2} b_0 - \pi h^2 b_1 \ln \frac{d}{h} - \pi h^2 \left(a_0 + \frac{3}{4} a_1\right) &= 0 \end{aligned} \tag{21}$$

où $Q_0 = \frac{\pi}{2} \frac{(\mu + \rho - 2\rho d^2 - 2 + 2d^2 + \rho d^4)}{\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho) \ln d}$ représente le débit total.

Nous allons voir que la méthode de Galerkin permet d'éviter l'évaluation des corrections $u_j^{(1)}$ d'ordre ε si les fonctions poids sont correctement choisies.

L'élimination de la variable d'espace correspondant à la direction radiale (r) se fait en écrivant les résidus correspondant aux poids g_1 et g_2 appliqués à (15) et (16) :

$$\begin{aligned} &\int_0^h \left\{ -R\varepsilon N_1 u_1 + \Delta_r u_1 - \mu \Delta_r u_2|_{r=d} + (1 - \rho)G(1 - \cot\theta) - W\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h} - \varepsilon^2 \frac{h_x^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{xx} \right) \right. \\ &+ \varepsilon^2 \left[u_{1xx} - \frac{\partial v_{1r}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (v_{1r}|_h - \mu v_{2r}|_h) + \frac{\partial}{\partial x} \int_r^h \left(\frac{v_{1r}}{r} - \frac{v_1}{r^2} \right) dr + \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} \Big|_h - \frac{v_2}{r^2} \Big|_h \right) dr \right] \Big\} g_1 r dr \\ &+ \int_h^d \left\{ -R\varepsilon \rho N_2 u_2 + \mu \Delta_r u_2 - \mu \Delta_r u_2|_{r=d} + \varepsilon^2 \left[u_{2xx} + \mu \frac{\partial}{\partial x} \int_r^d \left(\frac{v_{2r}}{r} - \frac{v_2}{r^2} \right) dr - \frac{\partial v_{2r}}{\partial x} \right] \right\} g_2 r dr = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Les champs a_k, b_k ($k \geq 2$) de la correction $u_j^{(1)}$ sont au moins d'ordre ε et ne peuvent apparaître qu'au travers des termes suivants :

$$\int_0^h \Delta_r u_1 g_1 r dr + \mu \int_h^d \Delta_r u_2 g_2 r dr - \mu (\Delta_r u_2|_{r=d}) \left(\int_0^h g_1 r dr + \int_h^d g_2 r dr \right) \tag{23}$$

On impose :

$$\left(\int_0^h g_1 r \, dr + \int_h^d g_2 r \, dr \right) = 0 \quad (24)$$

et par une double intégration par partie des deux premières intégrales de (23), on aboutit à :

$$\begin{aligned} \int_0^h \Delta_r u_1 g_1 r \, dr + \mu \int_h^d \Delta_r u_2 g_2 r \, dr = & \left\{ h(u_{1r} g_1 - \mu u_{2r} g_2) \Big|_{r=h} \right\} - \left\{ h \left(u_1 \frac{dg_1}{dr} \Big|_{r=h} - \mu u_2 \frac{dg_2}{dr} \Big|_{r=h} \right) \right\} \\ & + \mu u_{2r} g_2 \Big|_{r=d} + \int_0^h u_1 \Delta_r g_1 r \, dr + \mu \int_h^d u_2 \Delta_r g_2 r \, dr \end{aligned} \quad (25)$$

On obtient un modèle simplifié et cohérent à l'ordre ε en posant dans un premier temps dans (25) :

$$g_1(h) = g_2(h), \quad g_2(d) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dg_1}{dr} - \mu \frac{dg_2}{dr} \right) \Big|_{r=h} = 0 \quad (26)$$

ensuite, en cherchant des fonctions poids sous la forme $\Delta_r g_1 = 1$ et $\Delta_r g_2 = \alpha$; les deux derniers termes de l'équation (25) seront ainsi directement proportionnels au débit. Notons qu'avec $g_1(h) = g_2(h)$ et en tenant compte de la condition (13), le terme $(u_{1r} g_1 - \mu u_{2r} g_2) \Big|_{r=h}$ est du second ordre en ε .

La condition (24) combinée à (26) nous donne les fonctions poids suivantes :

$$\begin{aligned} g_1(r) &= \frac{1}{4} r^2 + \frac{h^2}{2\mu} \frac{(-h^4 + d^4 + \mu h^4)}{(h-d)^2(h+d)^2} \ln(h/d) - \frac{h^2}{2\mu} \frac{(-2h^2 + 2d^2 - \mu d^2 + 2\mu h^2)}{(h-d)(h+d)} \\ g_2(r) &= -\frac{h^2}{4\mu} \frac{(-2h^2 + 2d^2 + \mu h^2)}{(h-d)^2(h+d)^2} (r^2 - d^2) + \frac{h^2}{4\mu} \frac{(-2h^4 + 2d^4 + 2\mu h^4)}{(h-d)^2(h+d)^2} \ln(r/d) \end{aligned} \quad (27)$$

L'expression de l'équation d'évolution en fonction des paramètres est très longue, cependant nous pouvons dire qu'elle est de la forme :

$$F_0(q, h) + \varepsilon R[F_1(q, h)q_t + \tilde{F}_1(\partial_x, q, h)] + \varepsilon^2 F_2(\partial_x, q, h) = 0 \quad (28)$$

Le modèle obtenu est constitué d'un système de deux équations couplées ((28) et (17)) dont les inconnues sont h et q .

4. Analyse linéaire de stabilité

L'influence des nombreux paramètres sur l'évolution des petites perturbations est déterminée à partir de la linéarisation du système (28) autour de l'état de base caractérisé par :

$$h_0 = 1 \quad \text{et} \quad q_0 = \frac{\pi}{2} \frac{(\mu - 2\rho + 4(1 - \rho) \ln d)}{\mu - \rho(1 - d^2) + 2(1 - \rho) \ln d}$$

En termes de modes normaux, la perturbation peut être écrite sous la forme : $(h, q) = (A, B)e^{i(kx - ct)}$ où k est le nombre d'onde réel et $c = c_r + ic_i$ est la vitesse complexe de l'onde. On aboutit alors à une relation de dispersion qu'on peut formellement écrire sous la forme suivante :

$$D(k, \omega, d, \rho, \mu, R, J^*, \cot\theta) = 0 \quad (29)$$

Le développement aux petits nombres d'onde de la célérité ($c = c_0 + ikc_1 + \dots$), donne :

$$c_0 = \frac{4(1 - \rho)}{\mu + 2(1 - \rho) \ln d - \rho(1 - d^2)} + \frac{(d^2 - 1)[\rho d^4 + (2\rho + \mu - 3)d^2 + (1 - \rho)(3 - 2\mu)]}{(\mu - 1 + d^4)(\mu + 2(1 - \rho) \ln d - \rho(1 - d^2))} \quad (30)$$

qui est le résultat obtenu par Hickox [1] dans son développement asymptotique exact au seuil. Nous vérifions également la validité du modèle, en comparant les résultats obtenus à l'ordre suivant à ceux de Hickox [1] et Preziosi [2]

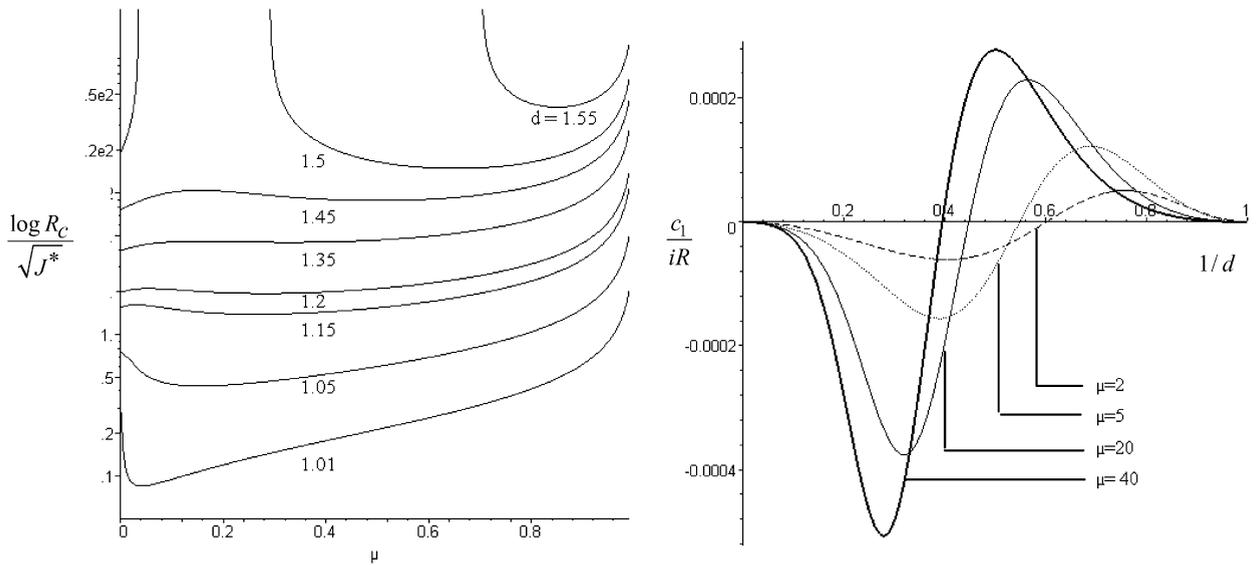


Fig. 2. A gauche : Évolution du nombre de Reynolds critique R_c en fonction de μ . A droite : Célérité complexe en fonction de l'épaisseur du fluide interne ($1/d$). Les résultats correspondent au modèle développé pour $\rho = 1$ et $W = 0$.

Fig. 2. Left: Evolution of the critical Reynolds number R_c versus μ . Right: Complex celerity versus internal fluid thickness ($1/d$). The results correspond to the developed model for $\rho = 1$ and $W = 0$.

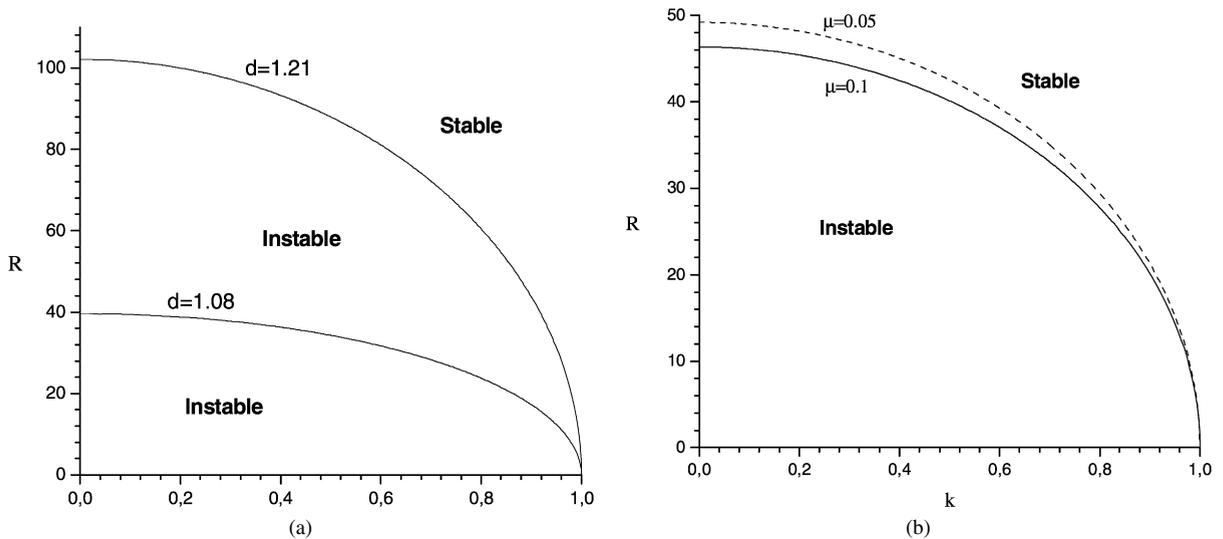


Fig. 3. Courbes de stabilité neutre dans le plan (k, R) correspondant au modèle développé.

Fig. 3. Neutral stability curves corresponding to the developed model. (a) $J^* = 2102$, $\rho = 1$, $\mu = 0.05$, $\theta = 90^\circ$; (b) $J^* = 930$, $d = 1.15$, $\rho = 1$, $\theta = 90^\circ$; (c) $J^* = 930$, $d = 1.15$, $\mu = 0.05$, $\theta = 90^\circ$; (d) $J^* = 2100$, $d = 2$, $\rho = 0.548$, $\mu = 5.48$, $\theta = 10^\circ$; (e) $J^* = 2100$, $d = 3$, $\rho = 0.548$, $\mu = 5.48$, $\theta = 10^\circ$.

(voir Fig. 2). A la criticalité, les résultats du modèle sont exactement ceux donnés par la théorie asymptotique, quelque soit la gamme des paramètres considérés.

A des nombres de Reynolds modérés, les prédictions du modèle restent en très bon accord avec les résultats expérimentaux (Fig. 3a) et les calculs numériques (Fig. 3b) effectués par Preziosi et al. [2]. Aussi, pour des valeurs de $\mu < 1$, une augmentation de la densité réduit la zone d'instabilité (Fig. 3c). L'effet inverse est observé pour des valeurs de $\mu > 1$. Par ailleurs, les deux types de l'instabilité interfaciale sont mis en évidence, l'une de grande longueur d'onde et l'autre est qualifiée d'onde courte (Figs. 3d, 3e).

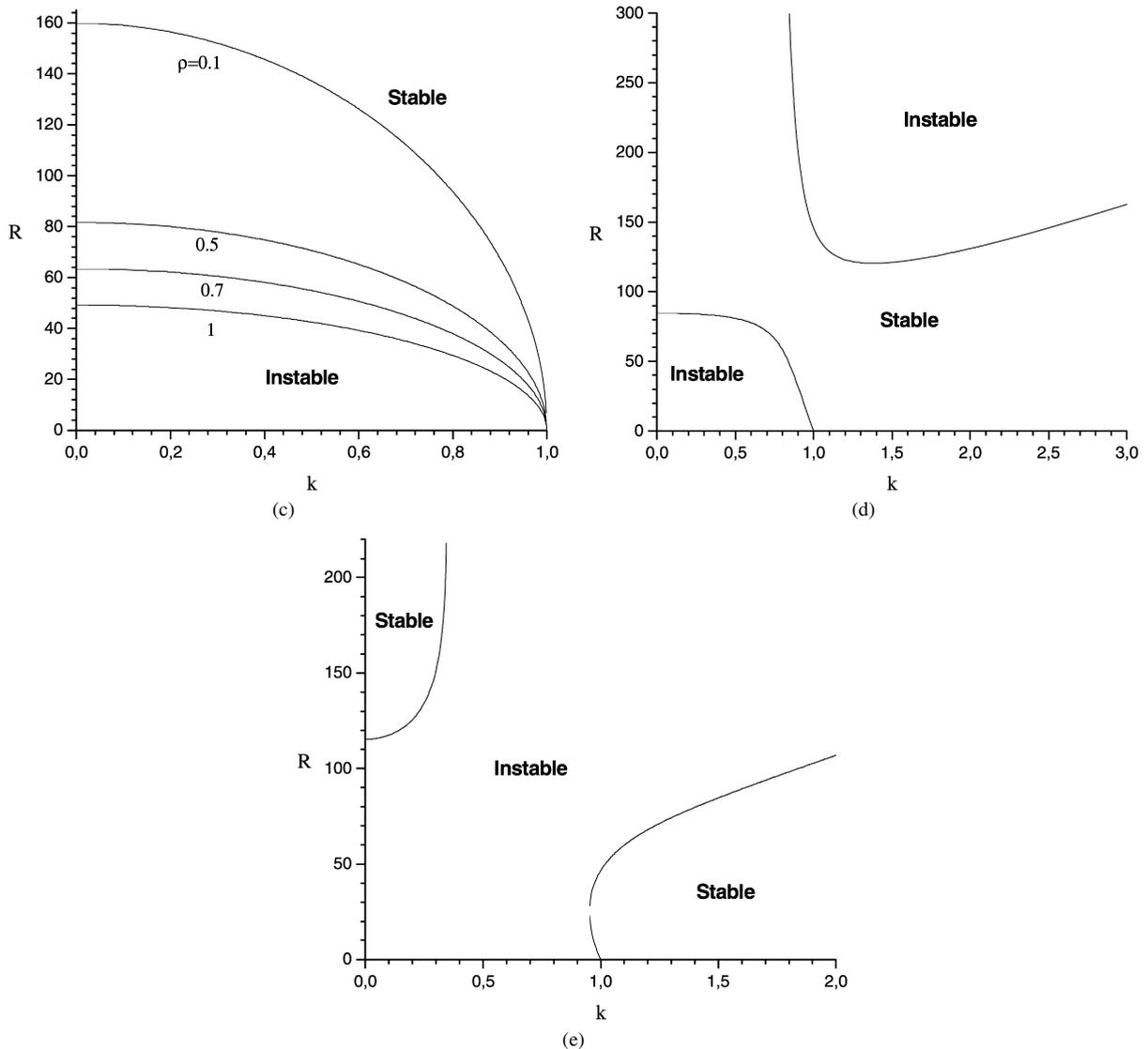


Fig. 3. (continued)

5. Conclusion

Nous avons proposé au cours de cette étude un modèle simplifié décrivant les instabilités de grandes longueurs d'onde se développant à l'interface entre deux fluides non miscibles s'écoulant à l'intérieur d'une conduite cylindrique. Ce modèle permet de prédire le seuil de l'instabilité de façon précise. Une étude analytique afin de comprendre le rôle des nombreux paramètres physiques en présence et d'expliquer le caractère stabilisateur ou déstabilisateur de certaines configurations est à considérer. Ce travail offre également la possibilité d'une étude détaillée de l'instabilité de l'interface loin du seuil d'instabilité.

Références

- [1] C.E. Hickox, Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow, *Phys. Fluids* 14 (1971) 251–262.
- [2] L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, *J. Fluid Mech.* 201 (1989) 323–356.
- [3] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatusse, Linear stability of a two layer film flow down an inclined channel: A second-order weighted residual approach, *Phys. Fluids* 19 (2007) 084106.
- [4] C. Ruyer-Quil, P. Manneville, Improved modelling of flows down inclined planes, *Eur. Phys. J. B* 15 (2000) 357–369.