

Modélisation de tissus biologiques en hyperélasticité anisotrope – Étude théorique et approche éléments finis

François Peyraut ^{a,*}, Christine Renaud ^b, Nadia Labeled ^a, Zhi-Qiang Feng ^b

^a Laboratoire M3M, Université de technologie de Belfort-Montbéliard, 90010 Belfort, France

^b Laboratoire LME-Evry, Université d'Évry – Val d'Essonne, 91020 Évry, France

Reçu le 19 décembre 2008 ; accepté après révision le 13 mars 2009

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

Résumé

Pour déterminer les déformations et les contraintes au sein de tissus biologiques tels que les ligaments, les tendons ou les parois artérielles, les lois de comportements hyperélastiques anisotropes sont souvent utilisées dans le cadre de la méthode des éléments finis [J.A. Weiss, B.N. Maker, S. Govindjee, Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 135 (1996) 107–128]. Dans cet article, on se propose de réaliser une telle étude en parallèle avec une analyse analytique. Cette analyse complémentaire permet de comprendre pourquoi la correspondance n'est pas biunivoque entre la déformation principale λ_2 et le quatrième invariant de la matrice de dilatation pour un modèle usuel tel que celui proposé par Holzapfel, Gasser et Ogden [G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, R.W. Ogden, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *J. Elasticity* 61 (2000) 1–48; T.C. Gasser, R.W. Ogden, G.A. Holzapfel, Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations, *J. R. Soc. Interface* 3 (2006) 15–35]. On établit en effet qu'une correspondance non bijective apparaît lorsque l'angle entre les fibres de collagène et la direction circonférentielle dépasse une valeur critique égale à $54,73^\circ$. L'importance de cet angle critique a déjà été relevée par Guo et al. (2006). **Pour citer cet article :** F. Peyraut et al., *C. R. Mecanique* 337 (2009).

© 2009 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Abstract

Modeling of biological tissues with anisotropic hyperelastic laws – Theoretical study and finite element analysis. To determine the strain and stress in the biological soft tissues such as ligaments, tendons or arterial walls, anisotropic hyperelastic constitutive laws are often used in the context of finite element analysis [J.A. Weiss, B.N. Maker, S. Govindjee, Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 135 (1996) 107–128]. In the present paper, we propose to realize such a study together with an analytical study. This study allows for the understanding of the reason why it does not exist a one-to-one correspondence between the principal stretch λ_2 and the fourth invariant of the dilatation tensor for the material model proposed by Holzapfel, Gasser and Ogden [G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, R.W. Ogden, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *J. Elasticity* 61 (2000) 1–48; T.C. Gasser, R.W. Ogden, G.A. Holzapfel, Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations, *J. R. Soc. Interface* 3 (2006) 15–35]. In fact, the relationship becomes non-bijective when the angle between the collagen

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : francois.peyraut@utbm.fr (F. Peyraut).

fibers and the circumferential direction is greater than a critical angle of 54.73° . Importance of this critical angle was also discussed by Guo et al. (2006). **To cite this article:** F. Peyraut et al., C. R. Mecanique 337 (2009).

© 2009 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

Mots-clés : Biomécanique ; Hyperélasticité anisotrope ; Modèle HGO ; Éléments finis

Keywords : Biomechanics ; Anisotropic hyperelasticity ; HGO model ; Finite element

Abridged English version

This Note deals with the modeling of anisotropy due to collagen fibers [1] in the hyperelasticity framework. Two anisotropic densities [2,1] are used according to two distinct directions \mathbf{a}^1 et \mathbf{a}^2 corresponding to two fiber families (2). Transversely isotropic densities can be expressed by the three usual invariants and two additional mixed invariants J_4^a and J_5^a (3). Anisotropic density characterized by an exponential form depends only on J_4^a which represents the fiber lengthening as in Holzapfel–Gasser–Ogden's constitutive law (HGO) (6).

Theoretically, two cases are considered $J_4 \geq 1$ and $J_4 < 1$. For $J_4 \geq 1$, one single solution (physically acceptable) allows to express principal stretches λ_1 and λ_2 with respect to the fourth mixed invariant and the angle β between collagen fibers and the circumferential direction (16).

In the second case, the constitutive law is reduced to the neo-Hookean model. The analysis shows the non-bijective relationship between the principal stretch λ_2 and the fourth invariant of the dilatation tensor when the angle between collagen fibers and the circumferential direction is greater than the critical value of 54.73° (Fig. 3).

An unconstrained uniaxial tension test is studied analytically and numerically. The finite element analysis with the HGO hyperelastic anisotropic model gives results very close to analytical principal stretches (Fig. 4) and underlines anisotropic behavior (contracting of the section in the direction 2 and swelling in the direction 3 when both extremities of the sample are constrained (Fig. 5)).

1. Introduction

Les densités d'énergie les plus utilisées en hyperélasticité anisotrope impliquent des lois puissance [3] ou des lois exponentielles [4,2]. Il est généralement admis que l'anisotropie est due aux fibres de collagène [1] alors que la matrice se comporte de manière isotrope. C'est la raison pour laquelle la densité d'énergie W est séparée en une partie isotrope et une partie anisotrope [5] :

$$W = W_{iso} + \sum_{a=1}^n W_{ani}^a \quad (1)$$

Chaque densité anisotrope W_{ani}^a fait référence à une direction privilégiée du matériau. Pour modéliser les ligaments ou les tendons, le nombre de famille de fibres n est égal à 1. Il est égal à 2 pour représenter le comportement des parois artérielles. Dans la loi HGO proposée par Holzapfel, Gasser et Ogden [2,1], deux densités anisotropes sont superposées avec deux directions privilégiées \mathbf{a}^1 et \mathbf{a}^2 correspondant à deux familles de fibres distinctes :

$$\mathbf{a}^1 = \{\cos(\beta), \sin(\beta), 0\}^T ; \quad \mathbf{a}^2 = \{\cos(\beta), -\sin(\beta), 0\}^T \quad (2)$$

où β représente l'angle entre les fibres de collagène et la direction circonférentielle sur des tissus extraits d'aorte abdominale humaine (Fig. 1). Dans la suite, on notera en abrégé c , s et t le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle β . Les lois hyperélastiques anisotropes incluent les trois invariants classiques I_1 , I_2 et I_3 de la matrice de dilution \mathbf{C} ainsi que deux invariants additionnels J_4^a et J_5^a liés à l'anisotropie des tissus [6]. Ces deux derniers invariants sont liés au tenseur structurel \mathbf{M}^a lui même relié à la direction préférentielle \mathbf{a} des fibres de collagène :

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2 = \text{tr}(\text{cof}(\mathbf{C})), \quad I_3 = \det(\mathbf{C}), \quad J_4^a = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{M}^a), \quad J_5^a = \text{tr}(\mathbf{C}^2\mathbf{M}^a), \quad \mathbf{M}^a = \mathbf{a}^a \otimes \mathbf{a}^a \quad (3)$$

Classiquement, le second tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff \mathbf{S} dérive de la densité W :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (4)$$

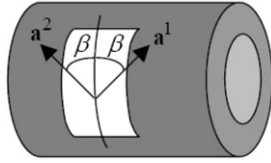


Fig. 1. Angle β .

Fig. 1. Angle β .

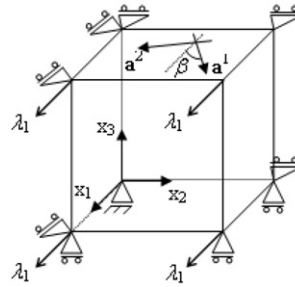


Fig. 2. Essai de traction uniaxiale non contraint.

Fig. 2. Test of unconstrained uniaxial traction.

Ce qui s'écrit encore [3] :

$$\mathbf{S} = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial I_3} \text{cof}(\mathbf{C}) + \frac{\partial W}{\partial J_4^a} \mathbf{M}^a + \frac{\partial W}{\partial J_5^a} (\mathbf{C} \mathbf{M}^a + \mathbf{M}^a \mathbf{C}) \right] \quad (5)$$

où $\text{cof}(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-T}$ représente la matrice des cofacteurs de \mathbf{C} . Le comportement anisotrope du modèle HGO est de type exponentiel :

$$J_4^a \geq 1 : W_{ani}^a = \frac{k_1}{2k_2} [\exp(k_2(J_4^a - 1)^2) - 1]; \quad J_4^a < 1 : W_{ani}^a = 0 \quad (6)$$

La densité W_{ani}^a ne dépend que du quatrième invariant J_4^a qui représente l'allongement dans la direction des fibres. Comme elle est nulle lorsque J_4^a est plus petit que 1, le modèle HGO prend en compte le fait que les fibres ne travaillent pas en compression. La partie isotrope de la densité, décrivant le comportement de la matrice, est représentée par le modèle néo-hookéen :

$$W_{iso} = c_1 (I_1 I_3^{-1/3} - 3) \quad (7)$$

On reprendra dans cet article les valeurs des paramètres matériels c_1 , k_1 et k_2 qui ont été choisis dans [7] de manière à ajuster le modèle avec des données expérimentales : $c_1 = 10,2069$ kPa ; $k_1 = 0,0017$ kPa ; $k_2 = 882,847$. On supposera que ces paramètres restent constants quand a change dans l'expression (6) de W_{ani}^a . Cette hypothèse est légitime car les propriétés des fibres sont indépendantes de leur orientation. Dans la suite, on ne fera plus apparaître l'indice a .

2. Description du problème

On considère le modèle HGO dans le cadre d'un essai de traction uniaxiale non contraint (Fig. 2). Ce test est habituellement utilisé pour identifier les propriétés mécaniques de bandes de tissus artériels. Pour calculer les déformations principales λ_1 , λ_2 et λ_3 , on se propose de traiter analytiquement puis numériquement le problème. La contrainte d'incompressibilité $J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$, \mathbf{F} étant la matrice gradient des déformations, est prise en compte dans le modèle éléments finis par un terme de pénalité de la forme $\frac{k}{2} (J - 1)^2$. Ce terme est ajouté à la densité d'énergie (1) avec k égal à 10^5 .

D'un point de vue analytique, la contrainte d'incompressibilité est traitée à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange p représentant une pression hydrostatique.

3. Étude théorique

On rappelle que \mathbf{S} est relié aux contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par la relation classique :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (8)$$

En utilisant de manière combinée la condition de bord libre $\sigma_{33} = 0$ avec l'expression (5) des contraintes et les densités d'énergie (6) et (7), le multiplicateur de Lagrange disparaît et on obtient :

$$J_4 \geq 1 : \begin{cases} \sigma_{11} = 2[c_1(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}) + 2k_1\lambda_1^2c^2(J_4 - 1)\exp(k_2(J_4 - 1)^2)] \\ \sigma_{22} = 2[c_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}) + 2k_1\lambda_2^2s^2(J_4 - 1)\exp(k_2(J_4 - 1)^2)] \end{cases} \quad (9)$$

$$J_4 < 1 : \sigma_{11} = 2c_1(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}) ; \quad \sigma_{22} = 2c_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}) \quad (10)$$

Le but du calcul qui suit est d'établir que les déformations principales se déduisent d'une équation polynômiale de degré 3 que l'on peut résoudre algébriquement par les formules de Cardan. Comme les contraintes s'expriment différemment selon la valeur de J_4 par rapport à 1, il est naturel de distinguer deux cas :

Cas 1 : $J_4 \geq 1$

La condition de bord libre $\sigma_{22} = 0$ appliquée à la formule (9) donne :

$$c_1(\lambda_2^2 - \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}) + 2k_1\lambda_2^2s^2(J_4 - 1)\exp[k_2(J_4 - 1)^2] = 0 \quad (11)$$

Par ailleurs, la définition (3) du quatrième invariant peut se formuler de la manière suivante :

$$(\lambda_1cJ_4^{-1/2})^2 + (\lambda_2sJ_4^{-1/2})^2 = 1 \quad (12)$$

Cela suggère l'utilisation d'un système de coordonnées polaires pour résoudre (11). On introduit donc naturellement un angle polaire θ en considérant $J_4^{1/2}$ comme le rayon :

$$\lambda_1c = J_4^{1/2} \cos(\theta) ; \quad \lambda_2s = J_4^{1/2} \sin(\theta) \quad (13)$$

En reportant (13) dans l'équation non linéaire (11), les déformations principales λ_1 et λ_2 sont remplacées par deux nouvelles variables θ et J_4 :

$$c_1(J_4 \sin^2\theta s^{-2} - s^2c^2J_4^{-2} \sin^{-2}\theta \cos^{-2}\theta) + 2k_1 \sin^2\theta J_4(J_4 - 1)\exp[k_2(J_4 - 1)^2] = 0 \quad (14)$$

En isolant tous les termes dépendant de θ dans le même membre, l'équation (14) est équivalente à :

$$\cos(\theta) - \cos^3\theta = s^2cJ_4^{-3/2} \left\{ 1 + \frac{2k_1}{c_1}s^2(J_4 - 1)\exp[k_2(J_4 - 1)^2] \right\}^{-1/2} = A \quad (15)$$

Les trois racines de l'équation polynômiale cubique (15) peuvent être calculées analytiquement à l'aide des formules de Cardan. Après discussion sur le signe du discriminant $\Delta = A^2/4 - 1/27$ et élimination des racines indésirables (celles purement imaginaires par exemple), on obtient une solution unique :

$$\lambda_1 = J_4^{1/2} \cos(\theta)c^{-1}, \quad \lambda_2 = J_4^{1/2} \sin(\theta)s^{-1}, \quad \cos(\theta) = 2\sqrt{3}/3 \cos(\alpha/3), \quad \alpha = \arccos(-3\sqrt{3}A/2) \quad (16)$$

Cas 2 : $J_4 < 1$

Le cas où J_4 est inférieur à 1 est plus simple à traiter car la loi de comportement se réduit au modèle néo-hookéen. Il résulte alors de (10) que :

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1/2} \quad (17)$$

Cependant, si on souhaite étudier la dépendance de λ_1 et λ_2 par rapport à J_4 , pour avoir une approche homogène à celle réalisée pour le cas précédent $J_4 \geq 1$, on est amené à résoudre une nouvelle équation polynômiale cubique. Celle-ci se déduit facilement de (12) et (17) :

$$\lambda_1^3 - J_4c^{-2}\lambda_1 + t^2 = 0 \quad (18)$$

La discussion portant sur le signe du discriminant $\Delta_1 = t^4 - J_4^3/(27c^6)$ montre que trois cas peuvent se présenter. Soit il n'existe aucune solution, soit il en existe une seule, soit il en existe deux distinctes. Ces différentes situations se présentent en fonction de la valeur prise par l'angle β relativement à un angle critique défini par $\beta_c = \arccos(\sqrt{3}/3) \approx 54.73^\circ$. Pour $\beta \geq \beta_c$, on a :

- si $\Delta_1 = 0$ il existe une solution unique définie par : $\lambda_1 = \sqrt{J_4c^{-2}/3}$ (19)

- si $\Delta_1 < 0$: il existe deux solutions distinctes λ_{1a} et λ_{1b} définies par :

$$\lambda_{1a} = 2\sqrt{\frac{J_4}{3c^2}} \cos\left(\frac{\gamma}{3}\right), \quad \lambda_{1b} = 2\sqrt{\frac{J_4}{3c^2}} \cos\left(\frac{\gamma + 4\pi}{3}\right), \quad \gamma = \arccos\left[-t^2 \sqrt{\frac{27c^6}{4J_4^3}}\right] \quad (20)$$

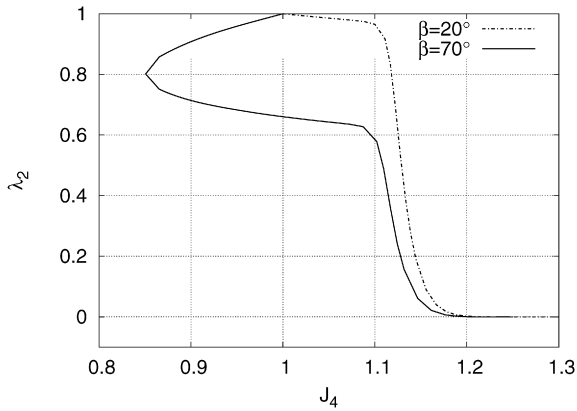


Fig. 3. Courbe λ_2 - J_4 .
Fig. 3. The λ_2 - J_4 curve.

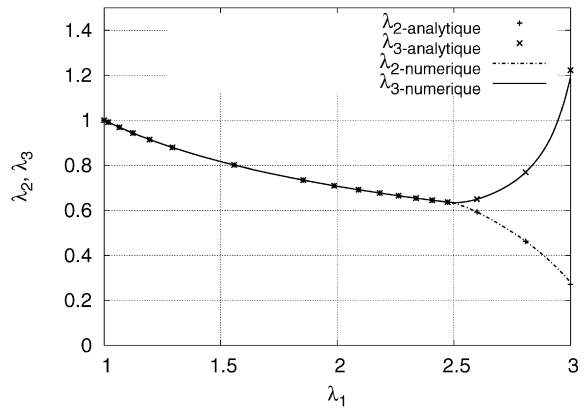


Fig. 4. Comparaison numérique-analytique ($\beta = 70^\circ$).
Fig. 4. Computed-analytical comparison ($\beta = 70^\circ$).

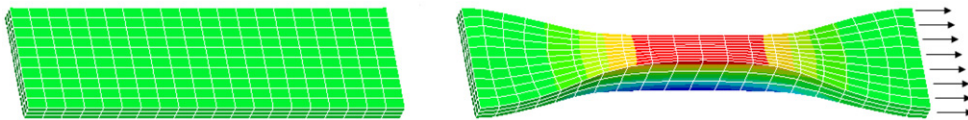


Fig. 5. Test de traction uniaxiale contraint – calcul numérique avec FER.
Fig. 5. Test of constrained uniaxial traction – calculation with FER.

Dans tous les autres cas ($\beta < \beta_c$ ou $\Delta_1 > 0$), il n'existe aucune solution. Lorsque la solution λ_1 existe, λ_2 est calculé en fonction de λ_1 par la formule (17). La variation de λ_2 en fonction de J_4 est présentée sur la Fig. 3 pour deux angles β différents. Lorsque β est strictement inférieur à β_c , on ne trouve aucune solution correspondante à $J_4 < 1$. Le tissu biologique ne peut donc être comprimé dans la direction des fibres ($J_4 < 1$) que si β est supérieur à β_c . Dans ce cas, le caractère non biunivoque de la dépendance de λ_2 par rapport à J_4 apparaît clairement. Il existe bien deux solutions distinctes conformément à la prédiction de la formule (20). On peut également montrer que le point de rebroussement qui apparaît sur la Fig. 3 est une racine double de l'équation cubique (18) et que cette racine double est donnée par la formule (19). On note enfin que J_4 est strictement inférieur à 1 lorsque λ_2 est compris entre environ 0,65 et 1. Dans ces conditions, le modèle HGO ne prend en compte que la densité isotrope néo-hookéenne (paragraphe 1). En deçà d'une valeur de λ_1 égale à 2,5, correspondant à une variation de λ_2 entre 0,65 et 1 (Fig. 4), le comportement est donc isotrope. La relation entre les déformations principales est alors donnée par l'éq. (17).

4. Calcul éléments finis

Le modèle HGO a été implémenté dans le code de calcul aux éléments finis FER à l'aide d'une formulation lagrangienne totale [8]. Les calculs numériques corroborent les résultats obtenus avec l'étude analytique. En effet, on constate une parfaite correspondance entre les déformations principales calculées analytiquement et numériquement (Fig. 4). Un calcul numérique a également été réalisé dans le cas où les deux extrémités de l'échantillon sont contraintes (Fig. 5). On note un rétrécissement de la section dans la direction 2 et un gonflement dans la direction 3, ce qui est typique d'un comportement non isotrope. Ce résultat est conforme aux observations réalisées dans [1]. Il est également cohérent avec le calcul analytique présenté sur la Fig. 4 qui montre, qu'à partir d'une valeur seuil de λ_1 , λ_3 augmente alors que λ_2 diminue.

5. Conclusion

On a présenté dans cette note une étude théorique ainsi qu'une analyse éléments finis du modèle hyperélastique anisotrope HGO. Les calculs portent sur l'essai de traction uniaxiale habituellement utilisé pour identifier les proprié-

tés mécaniques de bandes de tissus artériels. Moyennant un changement d'inconnue, on a montré que les déformations principales peuvent être calculées analytiquement. Ce calcul permet d'expliquer la correspondance non bijective entre la déformation principale λ_2 et le quatrième invariant de la matrice de dilatation lorsque l'angle entre les fibres de collagène et la direction circonférentielle dépasse une valeur critique égale à $54,73^\circ$.

Références

- [1] T.C. Gasser, R.W. Ogden, G.A. Holzapfel, Hyperelastic modelling of arterial layers with distributed collagen fibre orientations, *J. R. Soc. Interface* 3 (2006) 15–35.
- [2] G.A. Holzapfel, T.C. Gasser, R.W. Ogden, A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models, *J. Elasticity* 61 (2000) 1–48.
- [3] J. Schröder, P. Neff, D. Balzani, A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity, *Int. J. Solids Struct.* 42 (2005) 4352–4371.
- [4] Y.C. Fung, K. Fronek, P. Patitucci, Pseudoelasticity of arteries and the choice of its mathematical expression, *Am. J. Physiol.* 237 (1979) H620–H631.
- [5] J.A. Weiss, B.N. Maker, S. Govindjee, Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 135 (1996) 107–128.
- [6] A.J.M. Spencer, Isotropic polynomial invariants and tensor functions, in: J.P. Boehler (Ed.), *Applications of Tensor Functions in Solids Mechanics*, in: CISM Course, No. 282, Springer Verlag, 1987.
- [7] D. Balzani, P. Neff, J. Schröder, G.A. Holzapfel, A polyconvex framework for soft biological tissues. Adjustment to experimental data, *Int. J. Solids Struct.* 43 (2006) 6052–6070.
- [8] Z.-Q. Feng, <http://lmeec.univ-evry.fr/~feng/FerSystem.html>.