

Resistance macroscopique d'un matériau biphasique aléatoire en configuration tridimensionnelle

Sylvain Turgeman *, Benaceur Guessab

Université Joseph Fourier – IUT1, département génie civil, BP 67, 38402 Saint-Martin d'Herès cedex, France

Reçu le 18 mars 2009 ; accepté après révision le 8 juin 2009

Disponible sur Internet le 8 juillet 2009

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

Résumé

On s'intéresse à la détermination de la résistance en traction d'un échantillon constitué d'un matériau biphasique aléatoire, pour différentes proportions des constituants. A cet effet on applique une méthode d'homogénéisation fondée sur une hypothèse de mélange parfait. Le résultat obtenu est comparé à la résistance déduite d'un calcul de structure probabiliste et aux résistances observées dans une simulation numérique sur un grand nombre d'échantillons. Cette comparaison met en évidence l'intérêt de la méthode d'homogénéisation utilisée et la pertinence de l'hypothèse de mélange parfait. **Pour citer cet article : S. Turgeman, B. Guessab, C. R. Mecanique 337 (2009).**

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Effective strength of a random biphasic three-dimensional material. We study the determination of tensile strength of a sample consisting of a biphasic random material, for different proportions of components. To this end we apply a method of homogenization based on an assumption of perfect mix. The result is compared with strength derived from a calculation of probabilistic structure and strength observed in a numerical simulation on a large number of samples. This comparison highlights the interest of the homogenization method used and the relevance of the assumption of perfect mix. **To cite this article: S. Turgeman, B. Guessab, C. R. Mecanique 337 (2009).**

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Rupture ; Calcul à la rupture ; Homogénéisation ; Matériau biphasique aléatoire

Keywords : Rupture ; Yield design ; Homogenization ; Random biphasic material

1. Introduction

La méthode d'homogénéisation [1] qui a pour objet la prédiction du domaine de résistance d'un matériau hétérogène aléatoire M , est basée sur la représentation de M par une famille de microstructures. Chacune de ces microstructures occupe un petit volume ω de l'ordre des hétérogénéités et est définie par la donnée d'un domaine

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : sylvain.turgeman@hmg.inpg.fr (S. Turgeman).

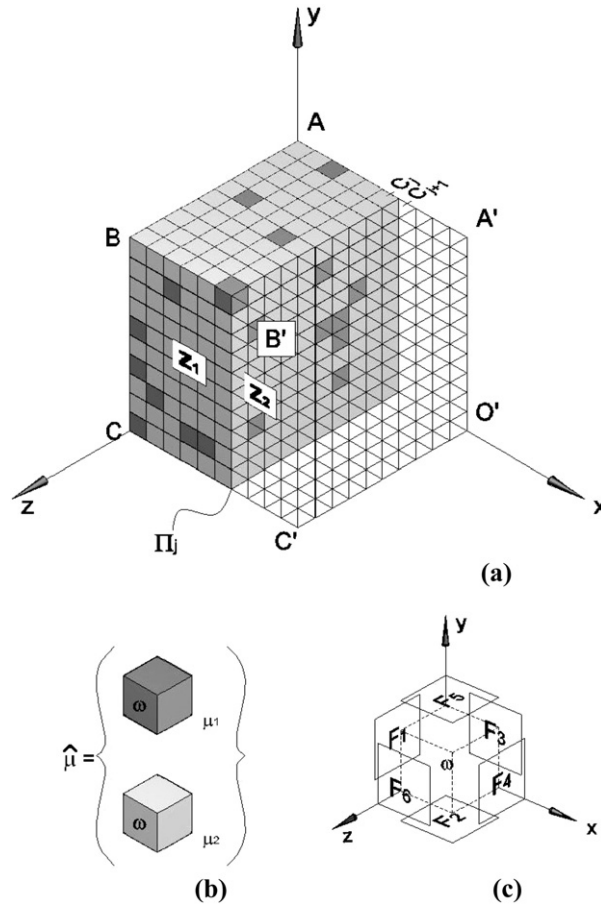


Fig. 1. (a) Echantillon E constitué du matériau M ; (b) Famille $\hat{\mu}$ des microstructures; (c) Numérotation des faces du volume élémentaire ω .
 Fig. 1. (a) Sample E constituted of the material M ; (b) Set $\hat{\mu}$ of microstructures; (c) Numbering of the faces of the elementary volume ω .

de résistance convexe en chaque point de ω . Les microstructures sont de plus pondérées relativement à leur fréquence d'apparition dans un volume représentatif Ω du matériau M . Si leur répartition dans Ω satisfait à une hypothèse de mélange parfait, la prédiction obtenue a, asymptotiquement, le statut de borne supérieure du domaine de résistance effectif d'échantillons constitués du matériau M . Cette méthode d'homogénéisation a été appliquée à un matériau biphasique aléatoire en configuration bidimensionnelle [1]. On la teste ici dans le cas de ce même matériau en configuration tridimensionnelle. Ce matériau est caractérisé par une structure microscopique et un critère de résistance de chaque phase très simple. Ceci permet de déterminer analytiquement la prédiction R_P de la résistance en traction d'un échantillon cubique E ; la résistance macroscopique R_P^* qui résulte d'un calcul probabiliste et les résistances moyenne et la plus probable relatives à un ensemble de réalisations numériques aléatoires d'échantillons tels que E . La comparaison de ces différentes résistances met en évidence l'intérêt de la méthode d'homogénéisation et la pertinence de l'hypothèse de mélange parfait qui la fonde.

2. Description et représentation du matériau M

On considère un échantillon cubique E , représentatif du matériau M , de volume Ω égal à N^3 unités de volume. Pour une partition particulière $P(E)$ de E en N^3 cubes élémentaires identiques au cube unité ω (Fig. 1a), on observe que les éléments de $P(E)$ sont constitués d'un matériau homogène M_k ($k = 1, 2$), de domaine de résistance

$$g_k = \{ \sigma \in IR_S^9 / |\sigma_{xx}| \leq \alpha_k \} \tag{1}$$

dans le repère privilégié $Oxyz$, avec $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$.

On note ρ la proportion de cubes élémentaires qui sont constitués du matériau M_2 et disposés aléatoirement dans Ω . Le matériau M est représenté exactement par la famille $\hat{\mu}$ composée des microstructures homogènes μ_k de domaine de résistance g_k , qui occupent le volume ω et qui sont affectées des coefficients ρ_k ($k \in \hat{m} = \{1, \dots, m\}$) avec $\rho_1 = 1 - \rho$ et $\rho_2 = \rho$, $m = 2$ (Fig. 1b).

3. Prédiction de la résistance en traction de M

Le domaine de résistance macroscopique G_P auquel conduit la méthode d'homogénéisation [1] résulte de champs de contraintes microstructuraux $\tilde{\sigma}(j, l, k)$ définis sur ω ($j \in \{1, \dots, 6\}; l \in \hat{m}, k \in \hat{m}$) (le champ $\tilde{\sigma}(j, l, k)$ est la moyenne arithmétique des restrictions d'un champ de contraintes σ admissible sur Ω , aux éléments de $P(E)$ qui sont dotés de la microstructure μ_k et adjacents par la face f_j de ω à un élément de $P(E)$ doté de la microstructure μ_l). Ces champs microstructuraux, dont la définition nécessite que N soit un entier infiniment grand [2] (d'où le caractère asymptotique de la méthode), sont soumis aux conditions suivantes :

- C1. Les champs $\tilde{\sigma}(j, l, k)$ sont admissibles sur ω (du fait de la convexité des domaines g_k , $k \in \hat{m}$) : $\text{div } \tilde{\sigma}(j, l, k)(y) = 0$; $\tilde{\sigma}(j, l, k) \in g_k$, $\forall j \in \{1, \dots, 6\}, l \in \hat{m}; k \in \hat{m}$.
- C2. Les champs moyens $\sum_{l=1}^m \rho_l \tilde{\sigma}(j, l, k)$ sont indépendants de $j \in \{1, \dots, 6\}$ ($\forall k \in \hat{m}$) (du fait d'une hypothèse de mélange parfait).
- C3. Les champs microstructuraux satisfont à une condition de continuité déduite de celle du champ σ dont ils sont issus : $\tilde{\sigma}(j, l, k)(y) \bullet n_j = -\tilde{\sigma}(j, k, l)(y') \bullet n_{j'}$ ($\forall y \in f_j, y' \in f_{j'}, j \in \{1, 2, 3\}, j' = j + 3, l \in \hat{m}, k \in \hat{m}$), avec y et y' points opposés sur les faces opposées F_j (de normale n_j) et $F_{j'}$ (de normale $n_{j'}$) de ω (Fig. 1c).
- C4. Le chargement macroscopique S , moyenne du champ σ sur Ω , est $S = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \rho_l \rho_k \langle \tilde{\sigma}(j_o, l, k) \rangle_\omega$ avec j_o pris quelconque dans $\{1, \dots, 6\}$ (du fait de l'hypothèse de mélange parfait et de sa conséquence C2) et avec $\langle \cdot \rangle_\omega$ désignant la moyenne dans ω [1].

On a alors :

$$G_P = \{S \in IR_S^9 / \tilde{\sigma}(j, l, k)(j \in \{1, \dots, 6\}; l \in \hat{m}; k \in \hat{m}) \text{ vérifiant C1, C2, C3, C4}\} \quad (2)$$

Dans le cas du matériau biphasique considéré, l'homogénéité des microstructures μ_k ($k \in \hat{m}$) conduit à considérer des champs microstructuraux homogènes tels que $\tilde{\sigma}_{xx}(j, 1, 1) = a_j$; $\tilde{\sigma}_{xx}(j, 2, 1) = b_j$; $\tilde{\sigma}_{xx}(j, 2, 2) = a'_j$; $\tilde{\sigma}_{xx}(j, 1, 2) = b'_j$; $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}(j, l, k) = d_{\alpha\beta}$ si $\alpha\beta \neq xx$ ($\forall j \in \{1, \dots, 6\}; l \in \hat{m}; k \in \hat{m}$). Les conditions C1 à C4 impliquent que $|a_j| \leq 1$ et $|b_j| \leq 1$ (d'après C1); $(1 - \rho)a_j + \rho b_j$ indépendants de j (d'après C2); $b_1 = b_4 = 0$ (d'après C3); $S_{\alpha\beta} = d_{\alpha\beta}$ si $\alpha\beta \neq xx$ et $S_{xx} = (1 - \rho)^2 a_1$ (d'après C4). Il s'ensuit que :

$$G_P = \{S \in IR_S^9 / |S_{xx}| \leq (1 - \rho)^2\} \quad (3)$$

et par conséquent la résistance en traction selon Ox prédite est

$$R_P = (1 - \rho)^2 \quad (4)$$

4. Résistance en traction la plus probable de E

L'échantillon E est soumis à un processus de chargement correspondant aux conditions suivantes (Fig. 1a) : sur (ABCO) la vitesse de déplacement v est nulle ; sur (A'B'C'O') $v = v_o = (1, 0, 0)$; sur toutes les autres faces de E , le vecteur contrainte s'y exerçant est nul en tout point. On considère le mécanisme de rupture cinématiquement admissible dans lequel E est divisé en deux zones rigides $Z1$ et $Z2$ avec $v = 0$ dans $Z1$, $v = v_o$ dans $Z2$ (Fig. 1a). La discontinuité de vitesse est localisée dans un plan de rupture Π_j situé à l'intersection des deux rangées de cubes élémentaires C_j et C_{j+1} ($j \in \{1, \dots, N - 1\}$). La partition $P(E)$ induit une division de Π_j en carrés. On note s le nombre de ces carrés, dits de type 2, qui sont adjacents à au moins un cube élémentaire constitué du matériau M_2 . La borne supérieure de la résistance en traction de E déduite de ce mécanisme de rupture [3] est

$$R_c(s) = (N^2 - s) / N^2 \quad (5)$$

Tableau 1

Comparaison des résistances : R_p (résistance prédite); R_c^* (résistance la plus probable); R_{em} et R_{ep} (résistances résultant de la simulation numérique).

Table 1

Comparison of the tensile strengths: R_p (predicted strength); R_c^* (the most likely strength); R_{em} and R_{ep} (strengths resulting of numerical simulation).

N	ρ (%)	1	3	5	7	9	20	30	40	50
	R_p	0,9801	0,9409	0,9025	0,8649	0,8281	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
10	R_c^*	0,9800	0,9400	0,9100	0,8700	0,8300	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	R_{em}	0,9579	0,9017	0,8518	0,8035	0,7597	0,5416	0,3787	0,2473	0,1446
	R_{ep}	0,9600	0,9100	0,8600	0,8000	0,7600	0,5600	0,3900	0,2500	0,1500
	ε (10^{-3})	9,09	13,97	16,34	19,11	19,68	24,43	26,16	23,16	21,23
50	R_c^*	0,9804	0,9412	0,9028	0,8652	0,8284	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	R_{em}	0,9734	0,9293	0,8873	0,8469	0,8080	0,6126	0,4595	0,3295	0,2213
	R_{ep}	0,9744	0,9304	0,8896	0,8480	0,8108	0,6144	0,4600	0,3316	0,2200
	ε (10^{-3})	1,48	2,21	2,91	3,34	3,46	4,50	4,51	4,34	3,87
100	R_c^*	0,9801	0,9409	0,9025	0,8649	0,8281	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	R_{em}	0,9764	0,9345	0,8941	0,8550	0,8171	0,6248	0,4734	0,3433	0,2343
	R_{ep}	0,9766	0,9348	0,8947	0,8557	0,8182	0,6259	0,4742	0,3442	0,2356
	ε (10^{-3})	0,66	1,02	1,37	1,62	1,63	2,16	2,11	1,99	1,96
500	R_c^*	0,9801	0,9409	0,9025	0,8649	0,8281	0,6400	0,4900	0,3600	0,2500
	R_{em}	0,9792	0,9394	0,9005	0,8626	0,8255	0,6365	0,4862	0,3563	0,2466
	R_{ep}	0,9792	0,9394	0,9006	0,8627	0,8256	0,6369	0,4865	0,3567	0,2467
	ε (10^{-3})	0,11	0,18	0,24	0,29	0,31	0,37	0,42	0,36	0,28

C'est la meilleure borne cinématique possible de la résistance en traction d'un échantillon E donné quand le plan Π_j est celui pour lequel s est maximum. Ce résultat, qui justifie le choix du mécanisme de rupture considéré, tient au fait que la puissance de déformation des matériaux M_1 et M_2 est finie (et par suite minimale) uniquement pour des vitesses de déformation d'extension selon Ox .

Les $C_{N^3}^{\rho N^3}$ réalisations aléatoires possibles de E , qu'on suppose équiprobables, conduisent à fixer s dans (5) à sa valeur la plus probable. Parmi les s carrés de type 2 (Fig. 1b), on dénombre t qui sont adjacents à 2 cubes constitués du matériau M_2 ; s' à un cube appartenant à C_j ; s'' à un cube appartenant à C_{j+1} . On a : $s = s' + s'' - t$, $s_1 \leq s \leq s_2$ avec $s_1 = \max(0, N^3(\rho - 1) + 2N^2)$ et $s_2 = \min(N^2, \rho N^3)$; $t_1 \leq t \leq t_2$ avec $t_1 = \max(0, 2N^2 - s + N^3(\rho - 1))$ et $t_2 = \min(N^2, \rho N^3 - s, s)$; $t \leq s' \leq s$. Ces paramètres déterminent la probabilité $p(s)$ que l'on ait s carrés de type 2 dans Π_j :

$$p(s) = \left(\sum_{t=t_1}^{t_2} \left(\sum_{s'=t}^s C_{N^2}^{s'} C_{s'}^t C_{N^2-s'}^{s-s'} \right) C_{N^3-2N^2}^{\rho N^3-s-t} \right) / C_{N^3}^{\rho N^3} \quad (6)$$

qui conduit à la résistance en traction selon Ox la plus probable d'un échantillon aléatoire E :

$$R_c^* = R_c(s^*) \quad (7)$$

avec s^* tel que $p(s^*) = \max(p(s), s_1 \leq s \leq s_2)$.

5. Simulation numérique et conclusion

On effectue numériquement p réalisations aléatoires d'échantillons cubiques, constitués du matériau M , et qui sont notés $E_i(\rho, N)$ ($i \in \hat{p} = \{1, \dots, p\}$) avec ρ compris entre 1 % et 50 % et N variant de 10 à 500. Pour tout couple (ρ, N) fixé, on détermine la résistance $R(i) = \text{Min}\{(N^2 - s(j))/N^2, j \in \{1, \dots, N - 1\}\}$ de chaque échantillon $E_i(\rho, N)$ ($i \in \hat{p}$) où $s(j)$ est le nombre de carrés de type 2 du plan Π_j . On en déduit alors : la résistance moyenne $R_{em} = \langle R(i) \rangle_{\hat{p}}$, l'écart-type ε et la résistance la plus probable R_{ep} . On compare dans le Tableau 1 ces valeurs aux résistances prédite R_p (cf. (4)) et plus probable R_c^* (cf. (7)). On observe que la concordance entre R_p et R_c^* , déjà très bonne pour $N = 10$, devient absolue à partir de $N = 100$. La simulation numérique complète cette comparaison

théorique et montre, qu'au fur et à mesure que N croît, la résistance moyenne R_{em} et la résistance la plus probable R_{ep} se rejoignent et tendent vers la résistance prédite. De plus, le caractère de borne supérieure de R_p , qui est assuré quand l'hypothèse de mélange parfait est satisfaite [1], est bien vérifié en moyenne ($R_{em} \leq R_p$). Cette observation accrédite la validité de cette hypothèse sur laquelle est fondée la méthode d'homogénéisation utilisée.

Références

- [1] B. Guessab, S. Turgeman, Prediction of effective yield strength domain for random heterogeneous materials, MRC (2009), doi:10.1016/j.mechrescom.2009.01.007.
- [2] A. Robert, Analyse non standard, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1985.
- [3] J. Salençon, Calcul à la rupture et analyse limite, Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.