

Comportement thermique d'un disque tournant soumis à des sources de chaleur surfaciques discrètes

Ali Hocine, Nacim Alilat *, Jean-Gabriel Bauzin

Laboratoire Thermique Interfaces Environnement, TIE, EA 4415, département GTE, Ville d'Avray, 50, rue de Sèvres, 92410 Ville d'Avray, France

Reçu le 22 février 2009 ; accepté après révision le 22 juin 2009

Disponible sur Internet le 22 juillet 2009

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

Résumé

Un modèle analytique est développé dans cette Note pour déterminer la distribution tridimensionnelle de la température dans un disque tournant soumis à des sources de chaleur surfaciques multiples. Les transformées intégrales de Fourier fréquentielle et de Hankel finie sont utilisées pour conduire les calculs analytiques. L'expression obtenue par cette technique est explicite et permet de calculer la température sans restriction sur les valeurs de la vitesse de rotation et des propriétés physiques. Parmi les applications industrielles pratiques concernées par ce modèle on peut citer le contact plaquette-disque dans les systèmes de freinage, ou bien les dispositifs tribologiques pion-disque. *Pour citer cet article : A. Hocine et al., C. R. Mecanique 337 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Thermal behaviour of a rotating disc subjected to discrete surface heat sources. Analytical model is developed in this Note to determine the 3D temperature distribution in a rotating disc subjected to multiple surface heat sources. The Fourier and Hankel integral transforms are used to perform the analytical calculations. The expression obtained by this way is explicit and allows one to compute the temperature without restriction on the rotating speed and the physical properties values. Some practice industrial applications are concerned by this calculation such the contact between pad and disc in braking systems, or the pin-on-disc tribological devices. *To cite this article: A. Hocine et al., C. R. Mecanique 337 (2009).*

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Transferts thermiques ; Sources de chaleur mobiles ; Pion-disque ; Systèmes de freinage ; Contacts glissants ; Modèle analytique

Keywords: Heat transfer; Moving heat sources; Pin-on-disc; Braking systems; Sliding contacts; Analytical model

1. Introduction

L'étude du comportement thermique des matériaux soumis au frottement revêt un grand intérêt dans de nombreux secteurs industriels. On peut citer comme exemples : la mise en forme des matériaux, la transmission de puissance, le freinage et bien d'autres. De nombreux auteurs se sont intéressés à cette problématique au cours de ces dernières

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : nacim.alilat@gmail.com (N. Alilat).

décennies. Le problème thermique a été abordé par l'étude de la diffusion dans un milieu soumis à une ou plusieurs sources de chaleur mobiles ou à une excitation rapide [1–9]. Les développements analytiques associés à ce type de problème sont difficiles à réaliser en raison de la présence du terme de transport lié à la mobilité relative. La modélisation du frottement pose également la problématique de la description des mécanismes de transferts de chaleur à l'interface. Des travaux théoriques et expérimentaux [10–15] ont été développés à ces fins. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité des études antérieures effectuées dans le domaine des contacts statiques [16,17].

Dans la référence [4], l'étude d'un contact unique a été proposée pour, d'une part, examiner l'influence des échanges convectifs sur les températures surfaciques, et d'autre part, poser les bases d'une modélisation analytique du problème de la source mobile excentrée. Dans cet article, nous généralisons cette modélisation au cas de plusieurs sources de chaleur localisées excentrées. Ces sources ont des rayons différents et peuvent occuper des positions quelconques. Cette configuration correspond à celle du freinage TGV (Train Grande Vitesse) où la plaquette est pourvue de plusieurs plots sertis frottant contre le disque tournant. D'autres exemples peuvent également être cités : contact non uniforme plaquette-disque d'un frein à disque automobile (contacts discrets et irréguliers) ou encore le dispositif de friction pion-disque, couramment utilisé en tribologie.

2. Description du problème

On considère un disque (Fig. 1) de rayon b , d'épaisseur d , tournant à une vitesse constante ω . La face $z = 0$ est soumise à plusieurs sources de chaleur circulaires ($j = 1, \dots, N$), excentrées de e_j par rapport au centre du disque, ayant chacune un rayon a_j et dissipant un flux de chaleur de densité q_j (uniforme et constante). Le repérage angulaire est noté θ_j . Le reste de la face $z = 0$ est considéré adiabatique. La face opposée, $z = d$, est maintenue à une température uniforme considérée nulle. La face latérale, $r = b$, est supposée adiabatique.

3. Equations du problème

En se référant aux notations de la Fig. 1 et en considérant que les propriétés thermiques du disque sont indépendantes de la température, les équations qui gouvernent la diffusion de la chaleur dans le disque en régime établi s'écrivent :

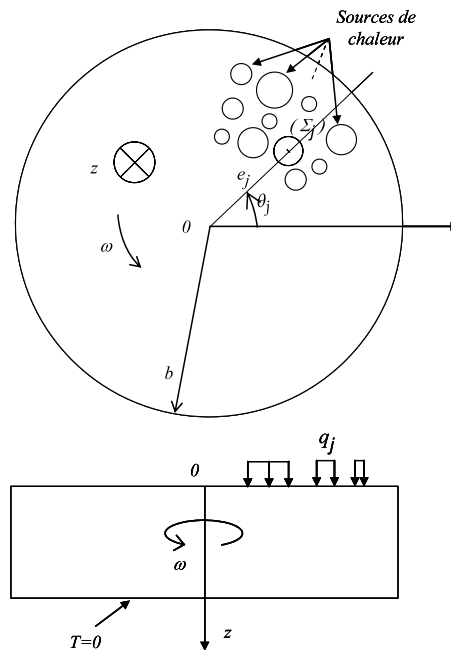


Fig. 1. Schéma du dispositif étudié.

Fig. 1. Scheme of the studied device.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\omega}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=b} = 0 \quad (2)$$

$$(T)_{\theta=-\pi} = (T)_{\theta=\pi}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_{\theta=-\pi} = \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_{\theta=\pi} \quad (3)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = \begin{cases} q_j : \text{sur } \Sigma_j \\ 0 : \text{ailleurs} \end{cases}, \quad (T)_{z=d} = 0 \quad (4)$$

Les paramètres α et λ représentent respectivement la diffusivité et la conductivité thermique du disque. Le dernier terme de gauche de l'équation (1) est le terme de transport. Il traduit le défilement de la matière (du disque) sous les sources de chaleur.

4. Solution analytique

Pour résoudre le système d'équations (1)–(4) on utilise successivement la transformée de Fourier fréquentielle puis la transformée de Hankel finie :

$$\tilde{T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T e^{-im\theta} d\theta \quad (m = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (5)$$

$$\tilde{T} = \int_0^b r J_m(\beta_n r) \tilde{T} dr \quad (6)$$

Dans l'équation (5) i est le nombre imaginaire pur tel que : $i^2 = -1$. Dans l'équation (6) J_m est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre m et β_n sont les racines de l'équation transcendante suivante :

$$J'_m(\beta_n b) = 0 \quad (7)$$

J'_m est la dérivée de la fonction J_m .

Les équations transformées se ramènent à une simple équation différentielle de second ordre :

$$\frac{d^2 \tilde{T}}{dz^2} - (\beta_n^2 + im\omega/\alpha) \tilde{T} = 0 \quad (8)$$

$$-\lambda \left(\frac{d\tilde{T}}{dz} \right)_{z=0} = \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j, \quad (\tilde{T})_{z=d} = 0 \quad (9)$$

Les transformées intégrales (5) et (6) des conditions aux limites de flux q_j en $z = 0$ sont délicates à calculer en raison de l'interdépendance des bornes d'intégration en r et θ . Pour pallier cette difficulté, il est procédé à un changement de repère [4,15]. Le repère initial (r, θ) est transformé en (ρ, φ) comme l'illustre la Fig. 2. L'intégration dans ce nouveau repère est plus aisée étant donné que les bornes d'intégration y sont indépendantes. Les deux référentiels sont liés par la relation : $r^2 = e_j^2 + \rho^2 - 2e_j \rho \cos(\varphi)$.

Nous disposons par ailleurs de la relation suivante [18, p. 363] :

$$J_m(\beta_n r) e^{-im\theta} = J_m(\beta_n r) e^{-im(\theta_j + \xi)} = e^{-im\theta_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta_n \rho) J_{k+m}(\beta_n e_j) e^{-ik\varphi} \quad (10)$$

Les transformées intégrales (5) et (6) appliquées à q_j conduisent à :

$$\tilde{q}_j = q_j \frac{e^{-im\theta_j}}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{-ik\varphi} d\varphi \int_0^{a_j} \rho J_k(\beta_n \rho) J_{k+m}(\beta_n e_j) d\rho \quad (11)$$

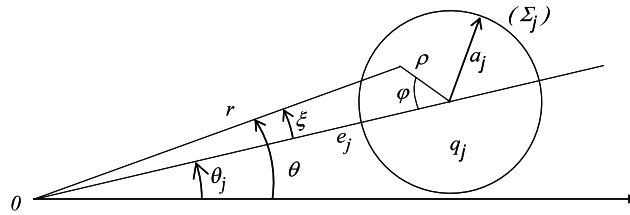


Fig. 2. Changement de référentiel.

Fig. 2. Change of referential.

Dans l'équation (11), l'intégrale suivant φ est nulle, excepté pour le cas particulier $k = 0$, pour lequel elle vaut 2π . Ainsi, l'équation (11) se réduit à :

$$\tilde{q}_j = q_j e^{-im\theta_j} J_m(\beta_n e_j) \int_0^{a_j} \rho J_0(\beta_n \rho) d\rho \tag{12}$$

Soit :

$$\tilde{q}_j = q_j e^{-im\theta_j} J_m(\beta_n e_j) \frac{a_j J_1(\beta_n a_j)}{\beta_n} \tag{13}$$

Pour exprimer la solution de l'équation (8), il convient de distinguer le cas particulier ($m = 0, n = 0$) pour lequel on a :

$$\tilde{T}(m = 0, n = 0) = \frac{1}{2\lambda} \sum_{j=1}^N q_j a_j^2 (d - z) \tag{14}$$

Lorsque m et/ou $n \neq 0$, on a :

$$\tilde{T}(m, \text{ et/ou, } n \neq 0) = \sum_{j=1}^N \tilde{q}_j \left\{ \frac{sh[\gamma(d - z)]}{\lambda \gamma ch(\gamma d)} \right\} \tag{15}$$

avec $\gamma = \sqrt{\beta_n^2 + im\omega/\alpha}$.

En utilisant les transformées intégrales inverses (16) et (17) on déduit l'expression de la température $T(r, \theta, z)$.

$$\tilde{T} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n^2 J_m(\beta_n r)}{[(\beta_n b)^2 - m^2] J_m^2(\beta_n b)} \tilde{T} \tag{16}$$

$$T = \Re e \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \tilde{T} e^{im\theta} \right\} \quad (\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_{m \neq 0} = 2) \tag{17}$$

La notation $\Re e$ désigne la partie réelle.

La Fig. 3 présente des exemples de deux cartographies thermiques du disque dans le cas de 4 sources identiques situées 2 à 2 sur les mêmes rayons et positions angulaires. Ces cartographies correspondent à deux vitesses de rotation différentes, caractérisées par le groupement adimensionnel de Peclet : $Pe = \omega b^2/\alpha$. On peut observer : (i) la formation d'une traînée thermique qui s'accroît avec l'augmentation de la vitesse, (ii) l'interaction entre les sources qui est plus marquée à faible vitesse.

5. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article un modèle analytique pour calculer la température d'un disque tournant soumis à des sources de chaleur surfaciques. La solution proposée est explicite et n'impose aucune limitation en termes de vitesse et de grandeurs géométriques et physiques. Elle permet de s'affranchir des modélisations numériques, particulièrement complexes pour ce type de problème. Les températures et les gradients thermiques sont exprimés par des relations simples et rapides en temps de calculs.

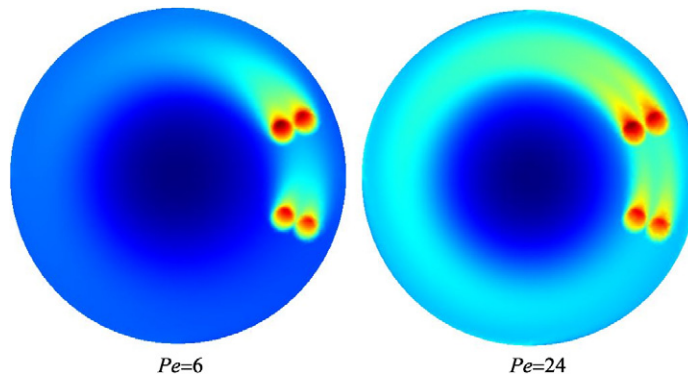


Fig. 3. Cartographies thermiques.

Fig. 3. Thermal maps.

Références

- [1] H. Blok, Les températures de surface dans des conditions de graissage sous extrême pression, Proc. Sd. World Petrol. Cong. 3 (1937) 471–486.
- [2] N. Laraqi, An exact explicit analytical solution for steady-state temperature of a half space subjected to a circular moving heat source, ASME J. Tribol. 125 (2003) 859–862.
- [3] A. Baïri, J.M. Garcia-de-Maria, N. Laraqi, Effect of thickness and thermal properties of film on the thermal behavior of moving rough interfaces, Eur. Phys. J. – Appl. Phys. 26 (1) (2004) 29–34.
- [4] N. Alilat, A. Baïri, N. Laraqi, Three-dimensional calculation of temperature in a rotating disk subjected to an eccentric circular heat source and surface cooling, Numer. Heat Transfer 46 (2) (2004) 167–180.
- [5] A. Baïri, N. Alilat, J.G. Bauzin, N. Laraqi, Three-dimensional stationary thermal behavior of a bearing ball, Int. J. Thermal Sci. 43 (2004) 561–568.
- [6] D. Couédel, P. Rogeon, P. Lemasson, M. Carin, J.C. Parpillon, R. Berthet, 2D-heat transfer modelling within limited regions using moving sources: Application to electron beam welding, Int. J. Heat Mass Transfer 46 (23) (2003) 4553–4559.
- [7] N. Laraqi, A. Baïri, L. Segui, Temperature and thermal resistance in frictional devices, Appl. Therm. Eng. 24 (17) (2004) 2567–2581.
- [8] A. Baïri, N. Laraqi, Diagrams for fast transient conduction in sphere and long cylinder subject to sudden and violent thermal effects on its surface, Appl. Therm. Eng. 23 (2003) 1373–1390.
- [9] A. Baïri, N. Laraqi, N. Alilat, Z. Zouaoui, Fast transient conduction in infinite plate subject to violent thermal effects, Appl. Therm. Eng. 24 (1) (2004) 1–15.
- [10] F.F. Ling, T.E. Simkins, Measurement of pointwise juncture condition of temperature at the interface of two bodies in sliding contact, ASME J. Basic Eng. 85 (1963) 481–486.
- [11] J.G. Bauzin, N. Laraqi, Simultaneous estimation of frictional heat flux and two thermal contact parameters for sliding solids, Numer. Heat Transfer 45 (4) (2004) 313–328.
- [12] B. Bourouga, J.M. Briot, J.P. Bardon, Influence de la vitesse et de la charge sur la conductance thermique de transport entre les bagues d'un roulement à rouleaux, Int. J. Thermal Sci. 40 (7) (2001) 622–637.
- [13] B. Salti, N. Laraqi, 3-D numerical modeling of heat transfer between two sliding bodies. Temperature and thermal contact resistance, Int. J. Heat Mass Transfer 42 (13) (1999) 2363–2374.
- [14] J.P. Bardon, Bases physiques des conditions de contact thermique imparfait entre milieux en glissement relatif, Rev. Gén. Therm. Fr. 386 (1994) 86–91.
- [15] N. Laraqi, N. Alilat, J.M. Garcia-de-Maria, A. Baïri, Temperature and division of heat in a pin-on-disc frictional device – Exact analytical solution, Wear 266 (7–8) (2009) 765–770.
- [16] M. Amara, V. Timchenko, M. El Ganaoui, E. Leonardi, G. de Vahl Davis, A 3D computational model of heat transfer coupled to phase change in multilayer materials with random thermal contact resistance, Int. J. Thermal Sci. 48 (2009) 421–427.
- [17] N. Laraqi, A. Baïri, Theory of thermal resistance between solids with randomly sized and located contacts, Int. J. Heat Mass Transfer 45 (20) (2002) 4175–4180.
- [18] M. Abramowitz, I.A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publication, Inc., New York, 1972.