Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Mecanique 337 (2009) 733–738

Comptes Rendus Mecanique

Décomposition de Kelvin et concept de contraintes effectives multiples pour les matériaux anisotropes

Rodrigue Desmorat

LMT-Cachan, ENS Cachan/Univ. Paris 6/CNRS/PRES Universud Paris, 61 avenue du président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

Reçu le 26 juin 2009 ; accepté après révision le 29 septembre 2009

Disponible sur Internet le 29 octobre 2009

Présenté par Jean-Baptiste Leblond

Résumé

Le concept de contrainte effective, désormais classique en mécanique de l'endommagement, est généralisé au cas d'une anisotropie élastique initiale. Afin d'être utilisée aussi bien pour le couplage endommagement–élasticité que pour le couplage endommagement–(visco-)plasticité, la contrainte effective ne doit *a priori* pas dépendre des caractéristiques élastiques. La décomposition de Kelvin du tenseur d'élasticité permet de définir une telle contrainte pour l'isotropie et la symétrie cubique. Pour les autres classes de symétries matérielles, le concept de contraintes effectives multiples est proposé. ***Pour citer cet article : R. Desmorat, C. R. Mecanique 337 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Kelvin decomposition and multiple effective stresses concept in anisotropic materials. The effective stress concept, now classical in continuum damage mechanics, is generalized to the case of an initial anisotropy. In order to be used for both damage–elasticity and damage–(visco-)plasticity coupling, the effective stress should not depend on the elastic properties. Kelvin decomposition of the elasticity tensor allows to define such a stress for isotropic and cubic symmetries. For other material symmetries, the concept of multiple effective stresses is proposed. ***To cite this article: R. Desmorat, C. R. Mecanique 337 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Mots-clés : Endommagement ; Anisotropie ; Décomposition de Kelvin ; Contrainte effective ; Monocristaux

Keywords: Damage; Anisotropy; Kelvin decomposition; Effective stress; Single crystals

Abridged English version

Continuum damage mechanics has been first developed for initially isotropic materials (with then induced damage anisotropy [1–3]), more recently for heterogeneous material such as composites (with then fixed damage directions [4]). There still is a lack of theoretical tools to deal with the coupling damage-elasticity and damage–(visco-)plasticity in anisotropic homogeneous materials such as single crystals, rocks, *etc*. The effective stress $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}/(1-d)$ is such a tool in case of isotropic damage d [5], the effective stress (2) is also such a tool in case of induced anisotropic

Adresse e-mail : rodrigue.desmorat@lmt.ens-cachan.fr.

1631-0721/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crme.2009.09.012

damage but isotropic elasticity: as expression (2) is symmetric and independent from the elasticity parameters, it can be used for damage coupling with both elasticity and (visco-)plasticity. Note that $(.)'$ stands for deviatoric part, η is the hydrostatic sensitivity parameter, and $\boldsymbol{D}$ is the second-order induced anisotropic damage.

Let us work here with Gibbs free enthalpy $\rho\psi^\star$. For neither plastified nor damaged materials, $\rho\psi^\star = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}$, with $\mathbb{S} = \mathbb{E}^{-1}$ the compliance tensor representative of material symmetries. Kelvin modes of elasticity tensor are the couples (eigenvalues $s^{(I)}$, second-order eigentensors $\boldsymbol{S}^{(I)}$) solutions of the eigenvalue problem (3) [6]. There are six $\boldsymbol{S}^{(I)}$ but most often some eigenvalues (called Kelvin moduli) are multiple so that Eq. (4) stands, with N the number of different Kelvin moduli $s^{(I)}$. The projectors $\mathbb{P}^K$ are then unique. Gibbs free enthalpy can be rewritten as Eq. (5), with $\boldsymbol{\sigma}^K$ the projection of the stress tensor on Kelvin mode K (called next Kelvin stress).

For isotropic elasticity: $N = 2$, Kelvin moduli are $s^{K=1} = 1/3K$, $s^{K=2} = 1/2G$, with K and G the bulk and shear moduli. One has $\boldsymbol{S}^{K=1} = \mathbf{1}/\sqrt{3}$, $\mathbb{P}^{K=1} = \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$, $\mathbb{P}^{K=2} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$. The stress $\boldsymbol{\sigma}^{K=1} = \mathbb{P}^{K=1} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}$ is the hydrostatic stress. The stress $\boldsymbol{\sigma}^{K=2} = \mathbb{P}^{K=2} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'$ is the deviatoric stress. *For cubic elasticity*: $N = 3$, $s^{K=1} = s^{(1)} = 1/3K = (1 - 2\nu)/E$, $s^{K=2} = s^{(2)} = s^{(3)} = (1 + \nu)/E$, $s^{K=3} = s^{(4)} = s^{(5)} = s^{(6)} = 1/2G$ (with $G \neq E/2(1 + \nu)$). The eigentensors are given by Eq. (6) (in natural anisotropy basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$). Three tensors $\mathbb{P}^K$ as well as three Kevin stresses $\boldsymbol{\sigma}^K$ are then defined. *For more general anisotropy*, some projectors $\mathbb{P}^K$ depends on the elasticity parameters.

M. François [7] is probably the first to have foreseen the interest of Kelvin decomposition in order to write the coupling with damage (Eq. (7)). The scalar damages are denoted d^K and it is necessary to regroup the eigenmodes associated with multiples eigenvalues. Damage is nevertheless most often anisotropic. The coupling elasticity–damage can be written as Eq. (8) if one uses Ladevèze framework [8]. A maximum of N tensorial damage variables $\boldsymbol{H}^K = (\mathbf{1} - \boldsymbol{D}^K)^{-1/2}$ (second-order tensors) is considered in theory. In practice, the damage variables are rarely independent and this number is reduced by the observed degradation mechanisms. A single damage variable $\boldsymbol{D}$ can advantageously be considered (a single damage evolution law will be necessary), with several possible (non-equivalent) choices to link the $\boldsymbol{D}^K$ to the thermodynamics variable $\boldsymbol{D}$, as $\boldsymbol{D}^K = \eta^K \boldsymbol{D}$ or $\boldsymbol{D}^K = \eta^K D_H \mathbf{1}$, where η^K is Kelvin mode sensitivity parameter (generalizing the notion of hydrostatic sensitivity introduced in [9]).

Eq. (8) indirectly defines N effective stresses $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^K$, one per Kelvin modulus. The elastic strain is gained from Eq. (10), as Eq. (11). When projectors $\mathbb{P}^K$ do not depend on elasticity characteristics, it is possible to define a global effective stress $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ by Eq. (12), symmetric and independent from the elasticity parameters, such as $\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ or $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon}^e$. The effective stress takes the form (13) showing how tensorial damage acts on projectors $\mathbb{P}^K$: material symmetry is changed, the compliance tensor reading $\tilde{\mathbb{S}} = \sum_K s^K \tilde{\mathbb{P}}^K : \mathbb{P}^K$. This is commonly encountered and called induced (damage) anisotropy for initially isotropic materials. Let us note that the effective projectors $\tilde{\mathbb{P}}^K$ remain proportional to initial projectors $\mathbb{P}^K$ only in case of scalar damages (tensors $\boldsymbol{H}^K$ spherical, the group of symmetry of elasticity tensor remains then unchanged).

In both cases of isotropic elasticity (Eq. (2) due to Eq. (11) with $\boldsymbol{D}^{K=1} = \frac{1}{3}\eta \operatorname{tr}\boldsymbol{D}\mathbf{1} \rightarrow \boldsymbol{H}^{K=1} = \mathbf{1}/\sqrt{1 - \eta D_H}$ and $\boldsymbol{D}^{K=2} = \boldsymbol{D}$) and of cubic elasticity (Eq. (15)), the global effective stress (such as $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon}^e$) is found symmetric and independent from the elastic properties. It can therefore be used for the coupling with plasticity by replacing the stress $\boldsymbol{\sigma}$ by the effective stress $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ in the yield function f (defining the elasticity domain as $f < 0$) and in the evolution potential $g = f +$ *complementary potential* (defining the plasticity evolution laws by normality [5]). In Eq. (15) $(.)^d$ stands for "diagonal part of the deviator in natural anisotropy basis", $(.)^{\bar{d}}$ stands for "out of diagonal deviatoric tensor" in this basis.

For anisotropic material, the concept of multiple effective stresses defines the coupling damage–plasticity as follows: (i) use Kelvin decomposition to make the projected (Kelvin) stresses appear in the criterion function, $f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}^{K=1}, \ldots, \boldsymbol{\sigma}^{K=N})$, (ii) replace each Kelvin stress $\boldsymbol{\sigma}^K$ by the effective stress $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^K$. As an example, Hill criterion for cubic symmetry simply reads $f = 3F\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + L\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} - 1 < 0$, with F and L as material parameters. Coupled with damage, even anisotropic, it becomes $f = 3F\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d + L\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\bar{d}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\bar{d}} - 1 < 0$.

Plasticity and (visco-)plasticity laws are derived by normality (*i.e.* by derivation of potential g, thus of criterion f, with respect to the stress and to eventual hardening variables). An evolution law for anisotropic damage induced by (visco-)plasticity completes the modeling [9,10]. The proof of the positivity of the dissipation due to damage given in [10] still holds for any damage law, standard or non-standard, such as $\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant 0$.

To conclude, the concept of multiple effective stresses seems well adapted to anisotropic materials. It allows for quite an easy coupling of elasticity and (visco-)plasticity with damage. The arbitrary is limited: a maximum of 6 Kelvin effective stresses is obtained, even for the most general (triclinic) anisotropy. The framework independency is guaranteed (objectivity of the formulation) by grouping the modes with identical Kelvin modulus. This allows for initially isotropic but also for initially cubic materials, as single crystals AM1 and CMSX2, to define a global symmetric effective stress $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, independent from the elastic properties.

1. Introduction

A l'origine, la mécanique de l'endommagement a été développée pour les matériaux initialement isotropes, puis pour les matériaux composites, matériaux anisotropes hétérogènes à microstructure périodique. Pour les premiers (métaux, bétons, céramiques, *etc.*) l'endommagement est à anisotropie induite [1–3], pour les composites, l'anisotropie de l'endommagement est fixée par l'anisotropie initiale et les directions des renforts matériels [4].

Il existe néanmoins toute une classe de matériaux monolithiques, comme les monocristaux, les matériaux laminés, les roches, *etc.*, à élasticité initiale anisotrope et à endommagement anisotrope induit par le chargement, pour lesquels il manque des outils théoriques permettant d'écrire les couplages élasticité–endommagement et (visco-)plasticité–endommagement. La micro-mécanique rencontre des difficultés pour le second couplage, fortement nonlinéaire. La contrainte effective

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d} \tag{1}$$

définie pour un endommagement isotrope d est un tel outil. Son utilisation combinée au principe d'équivalence en déformation a permis le développement de l'élasto–(visco-)plasticité couplée à l'endommagement isotrope [5]. L'isotropie de l'endommagement est une hypothèse forte dont on souhaite en général s'affranchir.

Nous discutons dans la présente note la possibilité de définir, dans le cadre de l'élasticité anisotrope et d'un endommagement anisotrope induit, une contrainte effective indépendante des caractériques élastiques généralisant celle, symétrique et dérivant d'un potentiel élastique [9],

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{H}\right)' + \frac{1}{3}\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{1-\eta D_H}\mathbf{1}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{H} = (\mathbf{1}-\boldsymbol{D})^{-1/2} \\ D_H = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{D} \end{cases} \tag{2}$$

définie pour les matériaux initialement isotropes. La notation $(.)'$ désigne la partie déviatorique, η est le paramètre de sensibilité hydrostatique, et $\boldsymbol{D}$ est l'endommagement anisotrope induit. Ce dernier est représenté par un tenseur d'ordre 2.

2. Décomposition de Kelvin et réécriture du potentiel d'état

Travaillons avec une formulation en contrainte pour laquelle l'enthalpie libre du matériau non endommagé (ni plastifié) est $\rho\psi^\star = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma}$, avec $\mathbb{S}$ le tenseur de souplesse, représentatif de l'anisotropie initiale ($\mathbb{E} = \mathbb{S}^{-1}$ est le tenseur de Hooke).

Les modes de Kelvin du tenseur d'élasticité sont les couples (valeur propre $s^{(I)}$, tenseur propre $\boldsymbol{S}^{(I)}$) solutions du problème aux valeurs propres (sans sommation)

$$\mathbb{S} : \boldsymbol{S}^{(I)} = s^{(I)}\boldsymbol{S}^{(I)}, \qquad \boldsymbol{S}^{(I)} : \boldsymbol{S}^{(J)} = \delta_{IJ} \tag{3}$$

Les tenseurs propres $\boldsymbol{S}^{(I)}$ sont des tenseurs d'ordre 2. Ils sont au nombre de 6, mais le plus souvent certaines valeurs propres (ou modules de Kelvin) $s^{(I)}$ sont multiples, de sorte que

$$\mathbb{S} = \sum_{I=1}^{6} s^{(I)}\boldsymbol{S}^{(I)} \otimes \boldsymbol{S}^{(I)} = \sum_{K=1}^{N\leqslant 6} s^K\,\mathbb{P}^K, \qquad \mathbb{P}^K = \sum_{I/s^{(I)}=s^K} \boldsymbol{S}^{(I)} \otimes \boldsymbol{S}^{(I)} \tag{4}$$

où N est le nombre de modules de Kelvin différents (2 pour l'élasticité, 3 pour la symétrie cubique... 6 pour l'absence de symétrie ou symétrie triclinique). Les projecteurs $\mathbb{P}^K$ sont ainsi uniques. On trouvera dans [6] les expressions des modules et des modes de Kelvin pour les principales symétries matérielles.

L'enthalpie libre du matériau élastique se réécrit

$$\rho\psi^\star = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{N} s^K \boldsymbol{\sigma}^K : \boldsymbol{\sigma}^K, \quad \text{où } \boldsymbol{\sigma}^K = \mathbb{P}^K : \boldsymbol{\sigma} \tag{5}$$

$\boldsymbol{\sigma}^K$ est la projection du tenseur des contraintes sur le mode de Kelvin considéré (que l'on propose d'appeler contrainte de Kelvin) et $\mathbb{P}^K$ un projecteur, sans dimension.

Dans le cas de l'élasticité isotrope : $N = 2$, les modules de Kelvin sont $s^{K=1} = 1/3K$, $s^{K=2} = 1/2G$, $K = E/3(1-2\nu)$ et $G = E/2(1+\nu)$ étant les modules de compressibilité et de cisaillement. On a $\boldsymbol{S}^{K=1} = \mathbf{1}/\sqrt{3}$, $\mathbb{P}^{K=1} = \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$, $\mathbb{P}^{K=2} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{K=1} = \mathbb{P}^{K=1} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1}$ est la contrainte hydrostatique. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{K=2} = \mathbb{P}^{K=2} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}'$ est le déviateur des contraintes.

Dans le cas de l'élasticité cubique : $N = 3$, $s^{K=1} = s^{(1)} = 1/3K = (1-2\nu)/E$, $s^{K=2} = s^{(2)} = s^{(3)} = (1+\nu)/E$, $s^{K=3} = s^{(4)} = s^{(5)} = s^{(6)} = 1/2G$ (avec $G \neq E/2(1+\nu)$). Dans la base naturelle d'anisotropie[1] $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{S}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{1}, \qquad \boldsymbol{S}^{(2)} = \frac{\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1 - \vec{e}_2\otimes\vec{e}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{S}^{(3)} = \frac{\vec{e}_1\otimes\vec{e}_1 + \vec{e}_2\otimes\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3\otimes\vec{e}_3}{\sqrt{6}} \\ \boldsymbol{S}^{(4)} = \frac{\vec{e}_1\otimes\vec{e}_2 + \vec{e}_2\otimes\vec{e}_1}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{S}^{(5)} = \frac{\vec{e}_2\otimes\vec{e}_3 + \vec{e}_3\otimes\vec{e}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{S}^{(6)} = \frac{\vec{e}_3\otimes\vec{e}_1 + \vec{e}_1\otimes\vec{e}_3}{\sqrt{2}}\end{gathered} \tag{6}$$

et 3 tenseurs $\mathbb{P}^K$ ainsi que 3 projections $\boldsymbol{\sigma}^K$ du tenseur des contraintes (ou contraintes de Kelvin) sont ainsi définis.

Dans le cas d'anisotropies plus générales, certains tenseurs propres (2 pour l'isotropie transverse, 3 pour l'orthotropie) et donc certains projecteurs $\mathbb{P}^K$ exprimés dans la base naturelle d'anisotropie dépendent des paramètres élastiques.

3. Couplage avec l'endommagement isotrope ou anisotrope

M. François est le premier à avoir vu l'intérêt de la décomposition de Kelvin pour le couplage avec l'endommagement [7]. Il l'a utilisée pour définir le couplage élasticité–endommagement isotrope à plusieurs variables scalaires d^K sous la forme

$$\rho\psi_e^\star = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{N} \frac{s^K}{1-d^K}\boldsymbol{\sigma}^K : \boldsymbol{\sigma}^K \tag{7}$$

où $\rho\psi_e^\star$ est la partie élastique de l'enthalpie libre (la loi d'élasticité est $\boldsymbol{\epsilon}^e = \rho\frac{\partial\psi_e^\star}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$) et où il est nécessaire de regrouper les modes associés aux valeurs propres multiples.

L'endommagement est le plus souvent anisotrope. Le couplage élasticité–endommagement peut alors être écrit

$$\rho\psi_e^\star = \frac{1}{2}\sum_{K=1}^{N} s^K \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}^K\boldsymbol{\sigma}^K\boldsymbol{H}^K\boldsymbol{\sigma}^K\right) \tag{8}$$

si l'on utilise le formalisme de Ladevèze [8]. Un maximum de N variables tensorielles d'endommagement $\boldsymbol{H}^K = (\mathbf{1} - \boldsymbol{D}^K)^{-1/2}$ (d'ordre 2) est considéré en théorie. En pratique, les variables d'endommagement sont rarement indépendantes et ce nombre est restreint par le nombre de mécanismes de dégradation observés. Une seule variable $\boldsymbol{D}$ peut avantageusement être considérée (une seule loi d'évolution sera alors nécessaire), avec plusieurs choix possibles (non équivalents) pour relier les $\boldsymbol{D}^K$ à la variable thermodynamique $\boldsymbol{D}$ comme

$$\boldsymbol{D}^K = \eta^K\boldsymbol{D}, \quad \text{où } \boldsymbol{D}^K = \eta^K D_H\,\mathbf{1} \tag{9}$$

où les η^K sont les paramètres de sensibilité au mode de Kelvin considéré (généralisant la notion de sensibilité hydrostatique introduite en [9]) et où $D_H = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{D}$ est l'endommagement hydrostatique. Dans l'absolu certains η^K peuvent être tensoriels.

[1] Base dans laquelle la matrice de souplesse prend la forme canonique usuelle en $1/E_i$, $-\nu_{ij}/E_i$ ....

Le grand intérêt de l'expression (8) est qu'elle définit indirectement N contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^K$ (de Kelvin), une par module de Kelvin. En effet, la déformation élastique en dérive,

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \rho \frac{\partial \psi_e^\star}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{K=1}^{N} s^K \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^K}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \left(\boldsymbol{H}^K \boldsymbol{\sigma}^K \boldsymbol{H}^K\right) = \sum_{K=1}^{N} s^K \mathbb{P}^K : \left(\boldsymbol{H}^K \boldsymbol{\sigma}^K \boldsymbol{H}^K\right) \tag{10}$$

soit

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^K = \mathbb{P}^K : \left(\boldsymbol{H}^K \boldsymbol{\sigma}^K \boldsymbol{H}^K\right) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\epsilon}^e = \sum_{K=1}^{N} s^K \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^K \tag{11}$$

Lorsque les projecteurs $\mathbb{P}^K$ ne dépendent pas des caractéristiques élastiques, il est possible de définir une contrainte effective globale $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, indépendante des modules élastiques. La dernière égalité la définit de sorte que $\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbb{S} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ soit équivalent à $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon}^e$,

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{K=1}^{N} \mathbb{P}^K : \left(\boldsymbol{H}^K \boldsymbol{\sigma}^K \boldsymbol{H}^K\right) \tag{12}$$

Cette relation se réécrit sous la forme

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{K=1}^{N} \tilde{\mathbb{P}}^K : \boldsymbol{\sigma}^K, \quad \tilde{\mathbb{P}}^K = \mathbb{P}^K : \left(\boldsymbol{H}^K \underline{\overline{\otimes}} \boldsymbol{H}^K\right) = \sum_I \boldsymbol{S}^{(I)} \otimes \left(\boldsymbol{H}^K \boldsymbol{S}^{(I)} \boldsymbol{H}^K\right) \tag{13}$$

qui met en évidence l'effet d'un endommagement tensoriel sur les projecteurs en changeant ainsi la symétrie du milieu matériel dont le tenseur de souplesse devient $\tilde{\mathbb{S}} = \sum_K s^K \tilde{\mathbb{P}}^K : \mathbb{P}^K$. C'est ce qui est communément rencontré et appelé anisotropie induite – par l'endommagement – pour les matériaux initialement isotropes. Remarquons que les projecteurs du milieu endommagé ne restent proportionnels aux projecteurs initiaux que si les endommagements sont scalaires (tenseurs $\boldsymbol{H}^K$ sphériques, le groupe de symétrie du tenseur d'élasticité est inchangé dans ce cas).

Une formulation en déformation, considérant l'énergie libre $\rho\psi$, est formellement identique.

4. Contrainte effective globale pour l'isotropie et la symétrie cubique

Explicitons la contrainte effective (12) dans le cas de l'élasticité isotrope en posant $\boldsymbol{D}^{K=1} = \frac{1}{3}\eta \operatorname{tr} \boldsymbol{D} \mathbf{1} \rightarrow \boldsymbol{H}^{K=1} = \mathbf{1}/\sqrt{1-\eta D_H}$ et $\boldsymbol{D}^{K=2} = \boldsymbol{D}$. On a rappelons le $\boldsymbol{\sigma}^{K=1} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1}$, $\boldsymbol{\sigma}^{K=2} = \boldsymbol{\sigma}'$ et

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}^{K=1} : \left(\boldsymbol{H}^{K=1} \boldsymbol{\sigma}^{K=1} \boldsymbol{H}^{K=1}\right) = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{1-\eta D_H} \mathbf{1} \\ &\mathbb{P}^{K=2} : \left(\boldsymbol{H}^{K=2} \boldsymbol{\sigma}^{K=2} \boldsymbol{H}^{K=2}\right) = \left((\mathbf{1}-\boldsymbol{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}' (\mathbf{1}-\boldsymbol{D})^{-1/2}\right)' \end{aligned} \tag{14}$$

de sorte que l'on retrouve la contrainte effective (2).

Les modes de Kelvin de l'élasticité cubique ont été rappelés au paragraphe 2. Les projecteurs $\mathbb{P}^K$ correspondant définissent 3 contraintes $\boldsymbol{\sigma}^K$:

- la contrainte hydrostatique $\sigma_H \mathbf{1} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{1}$ (module de Kelvin de $\mathbb{S}$ associé $1/3K$)
- la partie diagonale du déviateur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^d$ (module de Kelvin $(1+\nu)/E$),
- la partie hors diagonale du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}$ (module de Kelvin $1/2G$),

avec $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_H \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}' = \sigma_H \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}^d + \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}}$. La contrainte effective (12) définie par la relation $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \boldsymbol{\epsilon}^e$ et généralisant (2) au cas d'une élasticité cubique initiale est

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left[(\mathbf{1}-\eta_d \boldsymbol{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^d (\mathbf{1}-\eta_d \boldsymbol{D})^{-1/2}\right]^d + \left[(\mathbf{1}-\eta_{\bar{d}} \boldsymbol{D})^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} (\mathbf{1}-\eta_{\bar{d}} \boldsymbol{D})^{-1/2}\right]^{\bar{d}} + \frac{\sigma_H}{1-\eta D_H} \mathbf{1} \tag{15}$$

où $(.)^d$ signifie « partie diagonale du déviateur dans la base naturelle d'anisotropie », et $(.)^{\bar{d}}$ signifie « partie hors diagonale du déviateur » dans cette base.

5. Couplage de la (visco-)plasticité avec l'endommagement

Une fonction critère $f(\boldsymbol{\sigma})$ définit le domaine élastique initial des modèles de plasticité ou de visco-plasticité anisotropes par $f < 0$ (critère de Hill par exemple) et sert souvent de potentiel d'évolution (les lois de plasticité en dérivent par normalité). Lorsque la plasticité est non associée, le potentiel d'évolution est généralement de la forme $g = f + f_X + f_D$ [5] où les potentiels complémentaires d'écrouissage cinématique f_X et d'endommagement f_D ne dépendent pas de la contrainte.

Pour les matériaux anisotropes, le concept de contraintes effectives multiples définit le couplage endommagement–plasticité en utilisant la décomposition de Kelvin pour réécrire la fonction critère en faisant apparaître les contraintes de Kelvin, $f(\boldsymbol{\sigma}) = f(\boldsymbol{\sigma}^{K=1}, \ldots, \boldsymbol{\sigma}^{K=N})$. A titre d'exemple le critère de Hill initial pour la symétrie cubique s'écrit simplement $f = 3F\,\boldsymbol{\sigma}^d : \boldsymbol{\sigma}^d + L\,\boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} : \boldsymbol{\sigma}^{\bar{d}} - 1 < 0$, avec F et L des paramètres. Couplé à l'endommagement, isotrope ou non, il devient $f = 3F\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^d + L\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\bar{d}} : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\bar{d}} - 1 < 0$.

Pour l'isotropie ou la symétrie cubique, le couplage plasticité–endommagement s'écrit également en utilisant le concept de contrainte effective (globale) et en remplaçant, dans la fonction critère f initiale, la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ par la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$.

Les lois de plasticité ou de viscoplasticité couplées à l'endommagement sont obtenues par normalité (*i.e.* par dérivation de g donc de f par rapport à la contrainte et aux éventuelles variables d'écrouissage). Une loi d'évolution de l'endommagement anisotrope induit par la plasticité [9,10] complète la modélisation. La positivité de la dissipation due à l'endommagement se démontre comme en [10] pour toute loi d'évolution, éventuellement non standard, telle que $\dot{\boldsymbol{D}} \geqslant 0$.

6. Conclusion

Le concept de contraintes effectives multiples (dites de Kelvin) est particulièrement adapté aux matériaux anisotropes. Il permet un couplage aisé de l'élasticité et de la (visco-)plasticité avec l'endommagement anisotrope. Ce concept donne une grande souplesse de modélisation tout en limitant l'arbitraire : les contraintes effectives obtenues sont symétriques et sont au plus au nombre de 6.

L'indépendance au repère est garantie (objectivité de la formulation) en regroupant les modes à même module de Kelvin. Cela permet, pour les matériaux isotropes et pour les matériaux à symétrie cubique initiale (comme les monocristaux AM1 et CMSX2 utilisés en aéronautique), de définir une contrainte effective globale, symétrique, indépendante des caractéristiques élastiques.

Références

[1] J.-L. Chaboche, Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope, Col. Euromech 115, Eds. du CNRS, Grenoble, 1979.

[2] J.-P. Cordebois, F. Sidoroff, Endommagement anisotrope en élasticité et plasticité, J.M.T.A. (Numéro spécial) (1982) 45–60.

[3] J. Mazars, Y. Berthaud, S. Ramtani, The unilateral behaviour of damaged concrete, Engineering Fracture Mechanics 35 (4/5) (1990) 629.

[4] P. Ladevèze, E. Le Dantec, Damage modelling of the elementary ply for laminated composites, Composites Science & Technology 43 (3) (1992) 257–267.

[5] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, Mécanique des matériaux solides, Dunod, 1985.

[6] M.M. Mehrabadi, S.C. Cowin, Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, Q. J. Mech. Appl. Mech. 43 (1990) 15–41.

[7] M. François, Détermination des symétries matérielles de matériaux anisotropes, thèse de l'Université Paris 6, 1995.

[8] P. Ladevèze, On an anisotropic damage theory, in: J.P. Boehler (Ed.), Failure Criteria of Structured Media, Proc. CNRS Int. Coll. 351, Villars-de-Lans, 1993, pp. 355–363.

[9] J. Lemaitre, R. Desmorat, M. Sauzay, Anisotropic damage law of evolution, Eur. J. Mech., A/Solids 19 (2000) 187–208.

[10] R. Desmorat, Positivité de la dissipation intrinsèque d'une classe de modèles d'endommagement anisotropes non standards, C. R. Mécanique 334 (2006) 587–592.