



# Influence d'un écoulement horizontal sur les propriétés linéaires de la convection de fluides viscoélastiques en milieux poreux

## *Influence of horizontal through-flow on the linear properties of viscoelastic fluids convection in porous media*

Sílvia C. Hirata \*, Mohamed Najib Ouarzazi

Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, Université Lille 1, Boulevard Paul-Langevin, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

### INFO ARTICLE

#### Historique de l'article :

Reçu le 3 février 2010

Accepté le 16 juillet 2010

Disponible sur Internet le 31 juillet 2010

#### Mots-clés :

Instabilité

Fluide viscoélastique

Milieu poreux

Convection mixte

#### Keywords:

Instability

Viscoelastic fluid

Porous medium

Mixed convection

### R É S U M É

Le système étudié est constitué d'un massif poreux, chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal d'un fluide viscoélastique. La loi de comportement adoptée pour décrire le comportement viscoélastique des solutions polymères diluées est du type Oldroyd-B. Lorsque le débit est nul, ce système est le siège d'instabilités stationnaires ou oscillatoires. Nous proposons une analyse temporelle de stabilité pour étudier l'influence combinée des propriétés viscoélastiques du fluide et de l'écoulement principal sur les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilités. Nous montrons que la présence de l'écoulement moyen a un effet déstabilisant et qu'elle favorise l'émergence de rouleaux transversaux mobiles (R.T.), parmi une infinité de modes tridimensionnels instables. La longueur d'onde, les fréquences d'oscillations et le seuil d'apparition de ces R.T. ont été déterminés en fonction des nombres sans dimension du problème.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### A B S T R A C T

This paper investigates the instability of a viscoelastic fluid in a saturated porous medium heated from below and subjected to an horizontal through-flow. The Oldroyd-B constitutive equation is used to describe the viscoelastic behavior of diluted polymeric solutions. In the absence of the horizontal flow, the onset of convection can be characterized either by stationary or oscillatory instabilities. A temporal stability analysis is carried out in order to study the combined influence of the viscoelastic properties of the fluid and the main flow on the linear characteristics of these two types of instabilities. It is shown that the presence of the through-flow has a destabilizing effect and that it favors the emergence of mobile transverse rolls (R.T.), among an infinity of three-dimensional unstable modes. The thresholds for the appearance of these R.T., as well as their wavelengths and frequencies, are determined as functions of the dimensionless parameters of the problem.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

\* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : [silvia.hirata@univ-lille1.fr](mailto:silvia.hirata@univ-lille1.fr) (S.C. Hirata), [najib.ouarzazi@univ-lille1.fr](mailto:najib.ouarzazi@univ-lille1.fr) (M. Najib Ouarzazi).

## Abridged English version

The stability of mixed convection in a Newtonian fluid medium heated from below and cooled from above, also known as the Poiseuille–Rayleigh–Bénard (PRB) problem, has been extensively investigated in the past decades (for detailed review, see [1]). Mixed convection in porous media has received much less attention in the published literature [2–8]. The present paper extends the mixed convection problem in porous media for the case of a viscoelastic fluid flow owing to its numerous environmental and industrial applications. The simplest constitutive model known to describe the behavior of viscoelastic fluids is the Oldroyd-B model (see Eq. (1)). Without a superimposed through-flow, Kim et al. [9] treated the natural convection problem of a viscoelastic fluid in a saturated porous medium. Their work highlighted the effects of the viscoelastic properties of the fluid on the onset of the thermoconvective instabilities. It was shown that the competition between the processes of viscous relaxation, viscous retardation and thermal diffusion could lead either to a Hopf bifurcation, giving rise to oscillatory structures, or to a stationary bifurcation. The objective of this work is to examine, for the first time to our best knowledge, the influence of the main horizontal flow on the linear characteristics of these two types of instabilities. Under the Boussinesq approximation and Darcy's law extended to a viscoelastic Oldroyd-B fluid [10], the physical system is governed by the set of dimensionless equations (2)–(6). The linear stability analysis is performed by linearizing the equations of motion (2)–(6) around the conductive state (7). Considering normal modes perturbations of the form  $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ , we obtain the dispersion relation (8).

**Results for  $Pe = 0$ .** Thresholds for the onset of stationary and oscillatory instabilities for  $Pe = 0$  are presented in Fig. 1, where the critical Rayleigh number is plotted against the retardation time  $\lambda_2$ , for different values of the relaxation time  $\lambda_1$ . It can be observed that the relaxation time has a destabilizing effect, while the retardation time stabilizes the system. Fig. 2 shows the regions of stationary and oscillatory instabilities in the  $(\lambda_1, \lambda_2)$  plane. We note that the region where a Hopf bifurcation occurs is larger than the region where the system observes a transition towards a stationary instability.

**Results for  $Pe \neq 0$ .** First, if we consider the case of longitudinal rolls (R.L.) characterized by  $k_x = 0$  and  $k_y \neq 0$ , the dispersion equation (8) becomes independent of the Péclet number. This means that the conditions for the appearance of R.L. are identical to those found previously for  $Pe = 0$ . Secondly, we present the results for pure transverse rolls (T.R.) and the connection with the oblique rolls is discussed at the end of the paper. Fig. 3 presents the critical Rayleigh number and the corresponding frequency as functions of the Péclet number, for fixed values of  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ . The curve identified by squares shows that the instability which, in the absence of the main flow, was stationary (i.e.  $\omega = 0$  for  $Pe = 0$ ) becomes oscillatory. The curves represented by circles and triangles describe the influence of the main flow on the appearance of T.R. travelling in the flow direction (the  $\omega^+$  mode) and in its opposite direction (the  $\omega^-$  mode) respectively. As the critical Rayleigh number of the  $\omega^+$  mode is always the smallest one, we conclude that the main flow favors the appearance of mobile T.R. which propagate in the direction of the flow. The stabilizing role of the retardation time  $\lambda_2$  is illustrated in Fig. 4. Finally, by performing a Squire transformation (10), we can deduce the linear properties for the three-dimensional problem from the above results of the equivalent two-dimensional problem. We find that the threshold  $Ra_c^{3D}$  for the appearance of oblique rolls is always higher than  $Ra_c^{2D}$  associated to the onset of T.R. Therefore, we can conclude that among an infinity of unstable modes, the moving T.R. are selected by the horizontal throughflow at the onset of convection. This behavior is illustrated in Fig. 5 where the thresholds of the emergence of different kinds of convective structures are presented.

## 1. Introduction

La convection mixte d'un fluide Newtonien dans un canal non poreux, connue sous le nom de problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard a fait l'objet de très nombreuses investigations, tant théoriques ou numériques qu'expérimentales. A ce sujet, X. Nicolas [1] présente, dans une excellente revue bibliographique, 154 références qui couvrent la période 1920–2001. L'intérêt porté à la convection mixte en milieu poreux a été moins important [2–8].

L'écoulement thermoconvectif de fluides viscoélastiques en milieux poreux présente des applications dans plusieurs domaines de l'ingénierie, comme la fabrication du papier et des matériaux textiles, les processus de fabrication de composites, la bio-ingénierie, ainsi que l'extraction du pétrole. L'efficacité de cette dernière dépend largement de la nature physique du pétrole brut présent dans le réservoir. Le pétrole brut léger (*light crude*) est essentiellement Newtonien et est normalement étudié en utilisant la loi de Darcy. Par contre, le pétrole brut lourd (*heavy crude*) est non-Newtonien et son étude doit tenir compte des effets non-Newtoniens. En outre, dans des réservoirs peu profonds, le sable contient du pétrole brut cireux (*waxy crude*) qui présente le comportement d'un fluide viscoélastique. La convection thermique dans un réservoir poreux en présence du gradient géothermique joue un rôle important dans l'ingénierie du réservoir. Le modèle d'Oldroyd-B est un des modèles constitutifs les plus simples capable de décrire le comportement de fluides viscoélastiques :

$$\tau + \lambda_1^* \frac{D\tau}{Dt} = \mu \left( \dot{\gamma} + \lambda_2^* \frac{D\dot{\gamma}}{Dt} \right) \quad (1)$$

où  $\tau$  est le tenseur des contraintes,  $\dot{\gamma}$  est le tenseur taux de déformation,  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide,  $\lambda_1^*$  est le temps de relaxation de la contrainte et  $\lambda_2^*$  est le temps de retardation de la déformation. Ce modèle se réduit à l'équation constitutive d'un fluide Newtonien si  $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0$ .

Pour un fluide viscoélastique en convection naturelle dans un milieu poreux, le travail mené par [9] a mis en évidence l'effet des propriétés viscoélastiques sur le déclenchement des instabilités thermoconvectives et leurs propriétés linéaires. Ces

auteurs ont montré que l'interaction entre les processus de relaxation et de retardation visqueuse et de la diffusion thermique, pourrait induire soit une bifurcation de Hopf, donnant naissance à des structures convectives oscillatoires, soit une bifurcation stationnaire. L'objectif de ce travail est d'examiner, pour la première fois à notre connaissance, l'influence combinée de la présence d'un écoulement horizontal de débit non nul et des propriétés rhéologiques des fluides viscoélastiques sur les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilités.

## 2. Formulation mathématique et équation de dispersion

Soit une couche poreuse horizontale d'extension infinie dans le plan horizontal, de hauteur  $H$ , isotrope et homogène, saturée par un fluide viscoélastique de type Oldroyd-B. La paroi inférieure est chauffée à la température  $T_0^*$  alors que la paroi supérieure est maintenue à la température  $T_1^* < T_0^*$ . Le milieu poreux est soumis à un écoulement horizontal de vitesse de filtration  $V^*$ . Les équations mathématiques régissant le problème sont adimensionnées avec les grandeurs de références suivantes :  $H$  pour la longueur,  $H^2(\rho c)_{sf}/\lambda_{sf}$  pour le temps,  $T_0^* - T_1^*$  pour la température,  $\lambda_{sf}/(H(\rho c)_f)$  pour la vitesse et  $\lambda_{sf}\mu_f/(K(\rho c)_f)$  pour la pression. Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy étendue au fluide viscoélastique [10], le système physique est gouverné par les équations adimensionnées :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2)$$

$$(1 + \lambda_2 \partial_t)V + (1 + \lambda_1 \partial_t)(\nabla P - Ra T \mathbf{e}_z) = 0 \quad (3)$$

$$\partial_t T + V \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0 \quad (4)$$

Les parois horizontales sont considérées isothermes et imperméables

$$T(x, y, z = 0) = 1, \quad T(x, y, z = 1) = 0 \quad \text{et} \quad V \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1 \quad (5)$$

et un écoulement uniforme est imposé à l'entrée

$$V \cdot \mathbf{e}_x = Pe \quad (6)$$

Les quatre nombres sans dimension qui gouvernent ce problème sont le nombre de Rayleigh de filtration  $Ra = K\alpha_f g H(T_0^* - T_1^*)(\rho c)_f / (\lambda_{sf} \nu)$ , le nombre de Péclet  $Pe = V^*(\rho c)_f / \lambda_{sf}$ , le temps de relaxation  $\lambda_1 = \lambda_1^* \lambda_{sf} / H^2(\rho c)_{sf}$  et le temps de retardation  $\lambda_2 = \lambda_2^* \lambda_{sf} / H^2(\rho c)_{sf}$ .

Les grandeurs  $\lambda_{sf}$ ,  $(\rho c)_{sf}$ ,  $(\rho c)_f$ ,  $K$  et  $\alpha_f$  représentent respectivement, la conductivité thermique équivalente de l'ensemble fluide et matrice solide, la capacité calorifique de cet ensemble par unité de volume, la capacité calorifique par unité de volume du fluide seul, la perméabilité du milieu poreux, et le coefficient d'expansion thermique du fluide.

Le système (2)–(6) admet une solution de conduction stationnaire, que nous appelons état de base :

$$V = Pe \cdot \mathbf{e}_x, \quad T = 1 - z \quad \text{et} \quad P = Ra(z - z^2/2) - Pe x + cste \quad (7)$$

La suite est consacrée à l'étude de stabilité linéaire de la solution (7) en fonction des paramètres adimensionnés du problème.

Le système (2)–(6) linéarisé autour de la solution de conduction (7) conduit à un système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fluctuations de température, de pression et du champ de vitesse. Une analyse en modes normaux (i.e. en  $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ ) vérifiant les conditions aux limites du problème conduit à l'équation de dispersion :

$$D(\omega, k, \lambda_1, \lambda_2, Ra, Pe) = \omega^2 \lambda_2 (k^2 + \pi^2) + (k^2 + \pi^2)(-ik_x Pe - k^2 - \pi^2) + k^2 Ra + i\omega(k^2 + \pi^2 + \lambda_2(k^2 + \pi^2))(ik_x Pe) + \lambda_2(k^2 + \pi^2)^2 - Ra k^2 \lambda_1 \quad (8)$$

où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  ( $k_x$  est le nombre d'onde dans la direction de l'écoulement moyen et  $k_y$  est le nombre d'onde dans la direction transverse). L'approche temporelle de stabilité suppose  $k \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{C}$ , où la partie réelle  $\omega_r$  représente la fréquence de l'onde et la partie imaginaire  $\omega_i$  désigne le taux de croissance temporelle.

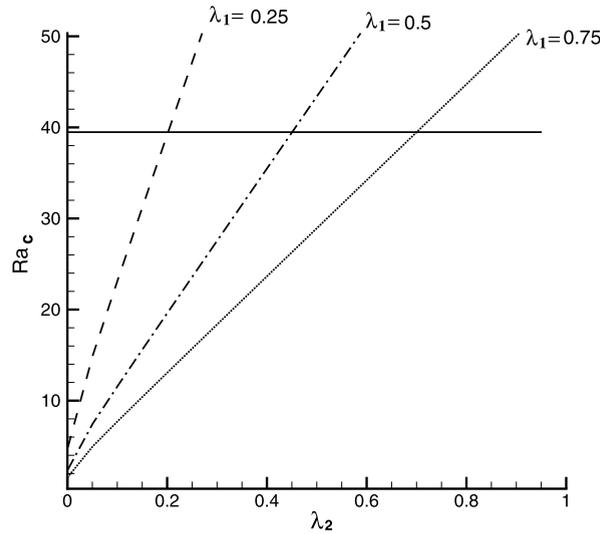
## 3. Résultats de stabilité en l'absence de l'écoulement ( $Pe = 0$ )

En posant  $Pe = 0$ , la séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'équation (8), conduit à deux types d'instabilités :

(i) Instabilité stationnaire :

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad Ra^{(s)} = \frac{(k^2 + \pi^2)^2}{k^2}$$

En minimisant  $Ra^{(s)}$  par rapport à  $k$ , on retrouve le résultat bien connu pour la convection naturelle d'un fluide Newtonien en milieu poreux :  $Ra_c^{(s)} = 4\pi^2$  et  $k_c^{(s)} = \pi$ . Il est naturel que ces valeurs soient indépendantes de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  pour une instabilité stationnaire du fait que ces coefficients n'apparaissent dans l'Eq. (3) que devant les termes instationnaires.



**Fig. 1.** Nombre de Rayleigh critique en fonction du temps de retardation, pour  $Pe = 0$ . La courbe solide représente le seuil  $Ra_c^{(s)} = 4\pi^2$ , tandis que les courbes pointillées représentent  $Ra_c^{(osc)}$  obtenus pour différentes valeurs du temps de relaxation  $\lambda_1$ .

**Fig. 1.** Critical Rayleigh number as a function of the retardation time, for  $Pe = 0$ . The solid line represents the threshold for stationary convection  $Ra_c^{(s)} = 4\pi^2$ , and the dotted lines represent thresholds for oscillatory convection  $Ra_c^{(osc)}$  obtained for different values of the relaxation time  $\lambda_1$ .

(ii) Instabilité oscillatoire :

$$\omega^\pm = \pm \sqrt{\frac{(k^2 + \pi^2)^2 - k^2 Ra}{\lambda_2(k^2 + \pi^2)}} \quad \text{et} \quad Ra^{(osc)} = \frac{(k^2 + \pi^2)(1 + \lambda_2(k^2 + \pi^2))}{k^2 \lambda_1}$$

avec les valeurs critiques :

$$Ra_c^{(osc)} = (1/\lambda_1)(1 + 2\lambda_2\pi(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1/\lambda_2})) \quad \text{et} \quad k_c^{(osc)} = \pi^{1/2}(\pi^2 + 1/\lambda_2)^{1/4}$$

Le mode avec une fréquence  $\omega^+$  ( $\omega^-$ ) correspond à une onde progressive descendante (montante). Remarquons que tous les modes dont le vecteur d'onde décrit un cercle de rayon  $k_c^{(s)}$  pour l'instabilité stationnaire ou  $k_c^{(osc)}$  pour l'instabilité oscillatoire peuvent émerger simultanément indiquant qu'il y'a absence d'une direction privilégiée du vecteur d'onde.

Nous avons représenté sur la Fig. 1, les deux seuils  $Ra_c^{(s)}$  et  $Ra_c^{(osc)}$ , en fonction de  $\lambda_2$ , pour différentes valeurs de  $\lambda_1$ . Cette figure met en évidence l'effet déstabilisant du temps de relaxation  $\lambda_1$  et l'effet stabilisant du temps de retardation  $\lambda_2$ . La condition nécessaire pour qu'une bifurcation de Hopf se produit dans le milieu, donnant naissance à des structures oscillatoires, est  $Ra_c^{(osc)} < Ra_c^{(s)}$ . Au regard des expressions de  $Ra_c^{(s)}$  et  $Ra_c^{(osc)}$ , cette condition s'écrit :

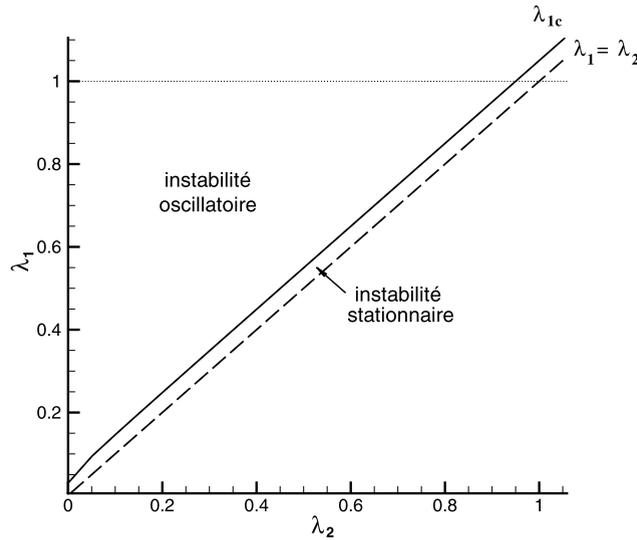
$$\lambda_1 > \lambda_{1c} = \frac{1}{4\pi^2} \left( 1 + 2\lambda_2\pi \left( \pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{\lambda_2}} \right) \right) \tag{9}$$

La courbe  $\lambda_{1c}$  de la Fig. 2 représente, dans le plan  $(\lambda_2, \lambda_1)$ , la frontière qui sépare la zone des paramètres où l'instabilité est stationnaire ( $\lambda_2 < \lambda_{1c}$ ) de celle où l'instabilité est oscillatoire ( $\lambda_1 > \lambda_{1c}$ ). La région des paramètres où  $\lambda_1 < \lambda_2$  n'as pas de signification physique puisque pour les solutions de polymères diluées le temps de retardation est toujours inférieur au temps de relaxation. Cette figure montre que l'étendue de la région où se produit une bifurcation de Hopf est plus large que celle où le système observe une transition vers une instabilité stationnaire.

Dans la suite, nous allons analyser les effets de la présence de l'écoulement horizontal sur les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilités.

#### 4. Influence de l'écoulement horizontal sur les propriétés linéaires des instabilités

Notons d'abord que si on s'intéresse aux rouleaux longitudinaux (R.L.) caractérisés par  $k_x = 0$  et  $k_y \neq 0$ , on remarque que l'équation de dispersion (8) devient indépendante du nombre de Péclet. Cela signifie que les conditions d'émergence des R.L. et leurs propriétés sont identiques à celles trouvées au paragraphe précédent avec un débit nul ( $Pe = 0$ ). Dans ce que suit, nous nous intéressons à des rouleaux partiellement ou complètement transversaux.



**Fig. 2.** Régions dans le plan  $(\lambda_2, \lambda_1)$  où le déclenchement de l’instabilité se produit en mode stationnaire ou oscillatoire. La région définie par  $\lambda_1 < \lambda_2$  n’a pas de sens physique.

**Fig. 2.** Regions in the  $(\lambda_2, \lambda_1)$  plane where the onset of the instability is stationary (below the solid line) or oscillatory (above the solid line). The region where  $\lambda_1 < \lambda_2$  has no physical meaning.

4.1. Transformation de Squire

Puisque le nombre d’onde  $k$  et le nombre de Péclet  $Pe$  apparaissent dans l’équation de dispersion (8) seulement comme  $k^2$  et  $k_x Pe$ , la dépendance de  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  vis-à-vis de  $k$  et  $Pe$  peut s’écrire :  $\omega = f(k^2, k_x Pe)$ . Cette propriété suggère d’opérer la transformation de Squire :

$$\omega(k_x^2 + k_y^2, k_x Pe) = \omega(k^2, k Pe^*), \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2 \text{ et } Pe^* = (k_x/k)Pe \tag{10}$$

Cette transformation permet de déduire la fréquence complexe  $\omega_{3D}$  pour un vecteur d’onde avec une orientation arbitraire de composantes  $k_x, k_y$  de  $\omega_{2D}$  déterminée pour un vecteur d’onde orienté dans la direction de l’écoulement  $\vec{k} = k \mathbf{e}_x$  et un nombre de Péclet modifié  $Pe^*$ . Autrement dit, cette transformation permet de déduire les fréquences complexes associées au problème tridimensionnel de celles obtenues en résolvant le problème bidimensionnel. L’application concrète de cette transformation sera discutée au paragraphe suivant.

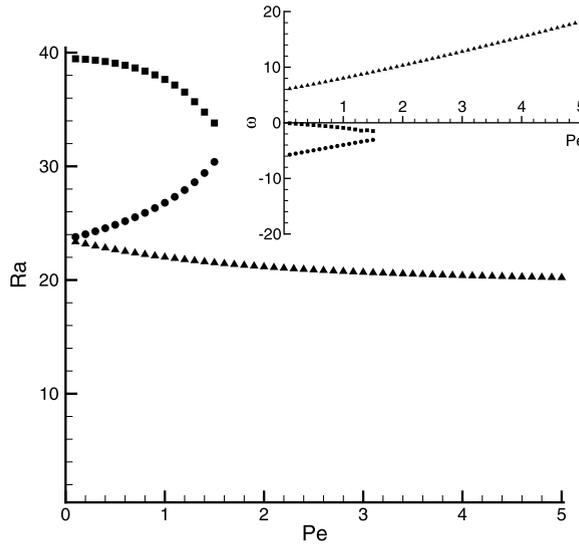
4.2. Discussions des résultats et conclusion

Dans un premier temps, nous allons présenter des résultats relatifs au problème bidimensionnel associé aux rouleaux purement transversaux. La Fig. 3 illustre la dépendance du nombre de Rayleigh critique et de la fréquence au seuil vis-à-vis du nombre de Péclet pour des valeurs fixées de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Cette figure montre qu’il existe trois solutions pour  $Pe < 1.5$ , alors qu’il y’en a qu’une seule pour des valeurs supérieures de  $Pe$ . La courbe en carrés pleins montre que l’instabilité qui, en l’absence de l’écoulement principal était stationnaire (i.e  $\omega = 0$  pour  $Pe = 0$ ) se transforme en une instabilité oscillatoire avec une fréquence négative dont la valeur absolue croit avec  $Pe$ . Les deux courbes représentées par des points et des triangles pleins décrivent l’influence de l’écoulement principal sur le seuil d’apparition et sur la fréquence respectifs des rouleaux transversaux mobiles dans le sens contraire de l’écoulement (le mode  $\omega^-$ ) et dans le même sens que celui-ci (le mode  $\omega^+$ ). Comme le seuil critique du mode  $\omega^+$  est le plus petit indépendamment de  $Pe$ , cela signifie que le débit imposé à l’entrée du massif poreux favorise l’apparition et le développement de rouleaux mobiles qui se propagent dans le sens de l’écoulement. Leurs fréquences d’oscillations varient en fonction de  $Pe$  presque linéairement comme cela est illustré par la Fig. 3 (insert). Le rôle stabilisant du temps de retardation  $\lambda_2$  est illustré sur la Fig. 4 qui montre que le seuil d’apparition des structures convectives sélectionnées par un débit non nul augmente lorsque  $\lambda_2$  augmente.

A partir des résultats établis pour une instabilité structurée en rouleaux transversaux, nous allons déterminer, dans un second temps, les seuils  $Ra_c^{3D}$  d’apparition de structures convectives organisées en rouleaux obliques. En annulant le taux de croissance temporelle  $\omega_i$ , la transformation de Squire (10) indique que la valeur critique  $Ra_c$  vérifie la propriété :

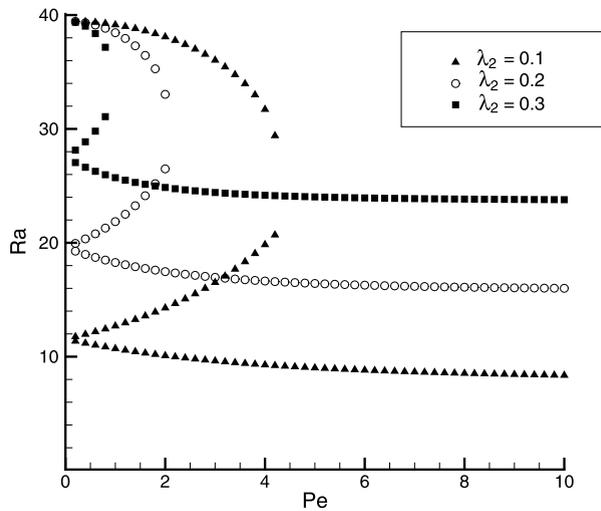
$$Ra_c^{3D}(k_x^2 + k_y^2, k_x Pe) = Ra_c^{2D}(k^2, k Pe^*) \quad \text{avec } Pe = (k/k_x)Pe^* > Pe^* \tag{11}$$

Pour que le seuil d’apparition des structures tridimensionnelles soit identique à celui des structures bidimensionnelles, ces propriétés exigent une valeur de  $Pe$  plus élevée que celle trouvée dans le cas bidimensionnel. Or comme le montre la Fig. 3



**Fig. 3.** Influence de l'écoulement principal sur le seuil et la fréquence des trois types d'instabilités : (■) mode stationnaire, (●) mode  $\omega^-$ , et (▲) mode  $\omega^+$ . Résultats obtenus pour  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\lambda_2 = 0.25$ .

**Fig. 3.** Influence of the main flow on the threshold and the frequency of the three types of instability: (■) stationary mode, (●)  $\omega^-$  mode, and (▲)  $\omega^+$  mode. Results obtained for  $\lambda_1 = 0.5$  and  $\lambda_2 = 0.25$ .



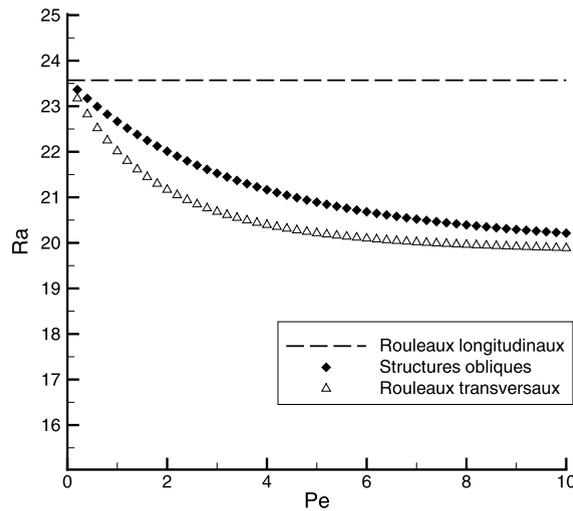
**Fig. 4.** Nombre de Rayleigh en fonction du nombre de Péclet, obtenus pour  $\lambda_1 = 0.5$  et différentes valeurs de  $\lambda_2$ .

**Fig. 4.** Rayleigh number as a function of the Péclet number, for fixed  $\lambda_1 = 0.5$  and different values of  $\lambda_2$ .

pertinente pour le cas bidimensionnel, la valeur  $Ra_c^{2D}$  est une fonction décroissante vis-à-vis de  $Pe$ . Par conséquent pour la même valeur de  $Pe$ , les seuils  $Ra_c^{3D}$  s'avèrent supérieurs aux seuils  $Ra_c^{2D}$ . Ce comportement est illustré sur la Fig. 5, où nous avons représenté en fonction de  $Pe$ , les seuils d'apparition de rouleaux longitudinaux, de rouleaux purement transversaux et de rouleaux obliques inclinés d'un angle  $\theta = \pi/3$  (i.e.  $k_x/k = \cos \theta$ ) par rapport à la direction de l'écoulement principal.

Nous pouvons conclure qu'en absence de l'écoulement horizontal, les instabilités thermoconvectives de fluides visco-élastiques confinés en milieu poreux peuvent être stationnaires ou oscillatoires. Dans les deux cas, le vecteur d'onde de ces structures est orienté arbitrairement dans le plan horizontal. La présence de l'écoulement horizontal a pour principal effet la sélection d'une configuration convective organisée en rouleaux purement transversaux. Ces rouleaux oscillent dans le temps tout en se propageant dans le sens de l'écoulement. Les fréquences d'oscillation de ces rouleaux croient presque linéairement avec le nombre de Péclet. On trouve également que l'augmentation du débit imposé diminue les seuils de déclenchement de la convection thermoconvective et joue par conséquent un rôle déstabilisant.

L'étude de la croissance spatiale et temporelle de ces rouleaux transversaux permettrait la distinction entre la nature convective ou absolue de cette instabilité et constitue une des perspectives de ce travail.



**Fig. 5.** Seuils d'apparition de rouleaux longitudinaux, transversaux et obliques (inclinés d'un angle  $\theta = \pi/3$  par rapport à la direction de l'écoulement principal), obtenus pour  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\lambda_2 = 0.25$ .

**Fig. 5.** Thresholds for the appearance of longitudinal rolls, purely transverse rolls, and oblique structures (with an inclination  $\theta = \pi/3$  of the wave vector with respect to the direction of the main flow), obtained for  $\lambda_1 = 0.5$  and  $\lambda_2 = 0.25$ .

## Références

- [1] X. Nicolas, Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille–Rayleigh–Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas, *Int. J. Therm. Sci.* 41 (2002) 961–1016.
- [2] M. Prats, The effect of horizontal fluid motion on thermally induced convection currents in porous media, *J. Geophys. Res.* 71 (1967) 4835–4838.
- [3] D.A.S. Rees, The effect of inertia on the onset of mixed convection in a porous layer heated from below, *Int. Comm. Heat Mass Transfer* 24 (2) (1997) 277–283.
- [4] A. Delache, M.N. Ouarzazi, M.C. Néel, Structuration de la convection mixte en milieu poreux confiné latéralement et chauffé par le bas : effets d'inertie, *C. R. Mécanique* 330 (2002) 885–891.
- [5] A. Delache, M.N. Ouarzazi, M. Combarous, Spatio-temporal stability analysis of mixed convection flows in porous media heated from below: Comparison with experiments, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 50 (2007) 1485–1499.
- [6] F. Dufour, M.C. Néel, Numerical study of instability in a horizontal porous channel with bottom heating and forced horizontal flow, *Phys. Fluids* 10 (9) (1998) 2198–2207.
- [7] M.N. Ouarzazi, F. Mejni, A. Delache, G. Labrosse, Nonlinear global modes in inhomogeneous mixed convection flows in porous media, *J. Fluid Mech.* 595 (2008) 367–377.
- [8] A. Delache, M.N. Ouarzazi, Weakly nonlinear interaction of mixed convection patterns in porous media heated from below, *Int. J. Therm. Sci.* 47 (2008) 709–722.
- [9] M.C. Kim, S.B. Lee, S. Kim, Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media, *Int. J. Heat and Mass Transfer* 46 (2003) 5065–5072.
- [10] B. Khuzhayorov, J.L. Aurialt, P. Royer, Derivation of macroscopic filtration law for transient linear viscoelastic fluid flow in porous media, *Int. J. Eng. Sci.* 38 (2000) 487–504.