C. R. Mecanique 339 (2011) 573–590

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com

Conceptualisation et classification des problèmes de fatigue mécanique

Conceptualization and classification of fatigue problems

Alain Thionnet [a,b,*]

[a] *Centre des matériaux, Mines ParisTech, CNRS UMR 7633, BP 87, 91003 Evry cedex, France*
[b] *Université de Bourgogne, Mirande, Dpt. IEM, BP 47870, 21078 Dijon, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 13 janvier 2011
Accepté après révision le 11 mai 2011
Disponible sur Internet le 13 juillet 2011

Présenté par André Zaoui

Mots-clés :
Fatigue
Modélisation
Mécanique de l'endommagement

Keywords:
Fatigue
Modelling
Damage mechanics

RÉSUMÉ

On propose de conceptualiser et de classifier les problèmes de calcul de structures dits de fatigue (dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement). Parce que le concept de fatigue est avant tout un concept que l'on peut estimer structural plutôt que local, cette classification est faite d'abord sur des grandeurs structurales. Ensuite, on donne une classification faite sur des grandeurs locales. L'objectif de ces classifications est de favoriser la résolution locale des problèmes de fatigue d'une classe donnée en aidant à la justification du passage des lois d'évolution obtenues par la Thermodynamique à celles écrites dans le cadre de la fatigue.

ABSTRACT

In this article, conceptualization and classification of fatigue problems (in the framework of the Damage Mechanics) are made. Structural loadings induce a local temporal evolution of the "leading" state variable but not vice versa. This argument demonstrates why we should first classify fatigue problems by using structural quantities. The evolution laws, however, are written on the local level: therefore, we provide a classification of fatigue problems based on local quantities. Our ultimate aim is to help to justify a local form of a fatigue evolution law starting from its quasistatic form deduced from Thermodynamics.

Abridged English version

Consider a material behavior law written in the context of Damage Mechanics and of Thermodynamics of the Continuous Media. Assume that this law takes into account a set of physical phenomena described by a set of state variables: the internal variables are grouped together in the set V_{EI} and the external "leading" state variables denoted as Q is assumed to be a 2-tensorial variable (usually the strain tensor). For a given physical phenomenon, where a is one of the state variables included in its modeling, the local evolution law of this variable (at point M) can be written as Eq. (1) where Φ_a is a function relative to the variable a and to this phenomenon. In the existing studies on the framework of fatigue problems, we frequently encounter the local evolution law of this phenomenon, at the point M, in the form of Eq. (2) where $\bar{\Phi}_a$ is a function relative to the variable a and to the given phenomenon, N indicates the number of cycles and $\mathbb{P}$ is a set of parameters.

* Address for correspondence: Centre des matériaux, Mines ParisTech, CNRS UMR 7633, BP 87, 91003 Evry cedex, France.
Adresses e-mail : alain.thionnet@ensmp.fr, alain.thionnet@u-bourgogne.fr.

1631-0721/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crme.2011.05.010

If we assume that the evolution law given in Eq. (1) is accurate, then the evolution law (2) cannot be (a priori) accurate: except in unusual cases, the substitution of $\mathrm{d}Q$ for $\mathrm{d}N$, which is neither a 2-tensorial variable nor a state variable, can only lead to a loss of information. The existing literature studying fatigue in both composite and metallic materials and in structures shows that often there is little or no justification for the local evolution laws of fatigue nor for its structure calculations.

Also, we can observe that sometimes these laws are not valid because they use a set of parameters (mentioned here in $\mathbb{P}$) of a structural origin (for example, the loading ratio, usually written R) that does not get transmitted to the local level without distortion. These two flaws show that questions simple to answer in the quasi-static case can become insurmountable when the qualifying word "fatigue" is added to them. This observation emphasizes how the notion of fatigue is, generally, a complex concept. Our primary goal for the conceptualizing and classifying fatigue problems is to answer the question "what is a fatigue structure problem?". Our second goal is to ensure that this classification contributes to resolving the most general problems. Structural loadings induce a local temporal evolution of the "leading" state variable but not vice versa. This argument demonstrates why we should first classify fatigue problems based on structural quantities. The evolution laws, however, are written on the local level and structural quantities are not transmitted to the local level without distortion; therefore, we provide a classification of fatigue problems based on local quantities. Our ultimate aim is to help to justify a local form of a fatigue evolution law starting from its quasistatic form deduced from Thermodynamics.

1. Pourquoi conceptualiser et classifier les problèmes de fatigue ?

Afin d'être réalisés dans des délais de temps raisonnables, les calculs de structures (non linéaires) se limitent en général à ne résoudre qu'un petit nombre d'itérations temporelles. Si l'on prend l'exemple de l'industrie aéronautique, certaines pièces d'hélicoptère sont dimensionnées pour avoir une durée de vie comprise entre 10^6 et 10^9 cycles de charge/décharge. Dans ce cas, le schéma numérique de résolution en temps devrait résoudre au moins entre 10^7 et 10^{10} itérations. Si on imagine qu'une itération (un calcul sur la structure industrielle complète) est résolue en une seconde (ce qui peut être très loin de la vérité), alors le calcul durerait entre 100 jours et 300 ans : même la borne inférieure de cet exemple minimaliste n'est pas envisageable pour un calcul de structure industrielle. L'ajout du vocable fatigue à un problème de calcul de structures, tel que nous l'entendons ici, a pour but essentiel de modifier l'écriture des lois d'évolution des phénomènes de manière à rendre leur intégration accessible dans des délais de temps raisonnables pour un calcul industriel.

Considérons un modèle de comportement de matériau écrit dans le cadre de la Mécanique de l'Endommagement et de la Thermodynamique des Milieux Continus qui prend en compte un ensemble de phénomènes physiques décrits par un ensemble de variables d'état dont on distingue les variables internes regroupées symboliquement dans l'ensemble V_{EI} et la variable d'état externe « pilote » supposée 2-tensorielle notée Q (usuellement le 2-tenseur symétrique des déformations). Pour un phénomène physique donné, dont a désigne l'une des variables d'état internes qui rentre dans le cadre de sa modélisation, on peut montrer que la loi d'évolution (au point M) de cette variable peut s'écrire sous la forme (Éq. (1)) où Φ_a est une fonction relative à la variable a et au phénomène physique considéré. Cette forme n'est pas la plus générale que l'on peut rencontrer mais suffit pour l'heure à l'illustration de notre discours. On peut la justifier en disant qu'elle résulte en fait de la réécriture du système différentiel qui donne l'évolution de chaque variable d'état interne en fonction de la variable d'état « pilote » (éventuellement couplée avec celle des autres variables d'état internes) et si nécessaire du Théorème des Fonctions Implicites. Dans le cadre de la fatigue, on rencontre fréquemment dans la littérature la loi d'évolution locale, au point M, de ce même phénomène sous la forme (Éq. (2)) où $\bar{\Phi}_a$ est une fonction relative à la variable a et au phénomène physique considéré, N désigne le nombre de cycles et $\mathbb{P}$ est un ensemble de paramètres.

$$\mathrm{d}a(M,t)/\mathrm{d}t = \Phi_a\big(Q(M,t), V_{EI}(M,t)\big)\,\mathrm{d}Q(M,t)/\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\mathrm{d}a(M,N) = \bar{\Phi}_a\big(\mathbb{P}, Q(M,N), V_{EI}(M,N)\big)\,\mathrm{d}N \tag{2}$$

Si on admet que la forme de la loi d'évolution donnée par l'Éq. (1) est « exacte », la forme donnée par l'Éq. (2) ne peut en être a priori qu'une forme approchée : sauf cas particuliers, la substitution de $\mathrm{d}Q$ (Q variable d'état tensorielle) par $\mathrm{d}N$ (N qui n'est une variable ni tensorielle ni d'état), ne peut qu'induire une perte d'information. L'examen de la littérature [1–5] dans le domaine de la fatigue non seulement des matériaux (qu'ils soient composites ou métalliques) mais aussi des structures met en évidence qu'en général peu, voire aucune justification n'est donnée quant à l'obtention des lois locales de fatigue ni même quant à leur utilisation pour des calculs de structures dans le cadre de la fatigue. On constate également que ces mêmes lois ne sont parfois pas valides parce qu'elles utilisent un ensemble de paramètres (ici mentionné par $\mathbb{P}$) d'origine structurale (par exemple, celui que l'on qualifie de rapport de charge) qui n'a aucune raison de se transmettre au niveau local sans distorsion. Ces deux défauts sont révélateurs du fait que des questions qui peuvent avoir une réponse simple dans le cas de problèmes de calcul de structures quasi-statiques peuvent devenir insurmontables dès lors que le vocable de fatigue y est associé. Cela souligne combien la notion de fatigue est, dans toute sa généralité, un problème complexe. Répondre à la question « qu'est-ce qu'un problème de calcul de structures de fatigue ? » est la première motivation de la conceptualisation et des classifications que nous souhaitons proposer des problèmes de calcul de structures auxquels on associe le vocable de fatigue. La seconde est de faire en sorte que cette classification favorise la recherche de la résolution de ces problèmes les plus généraux.

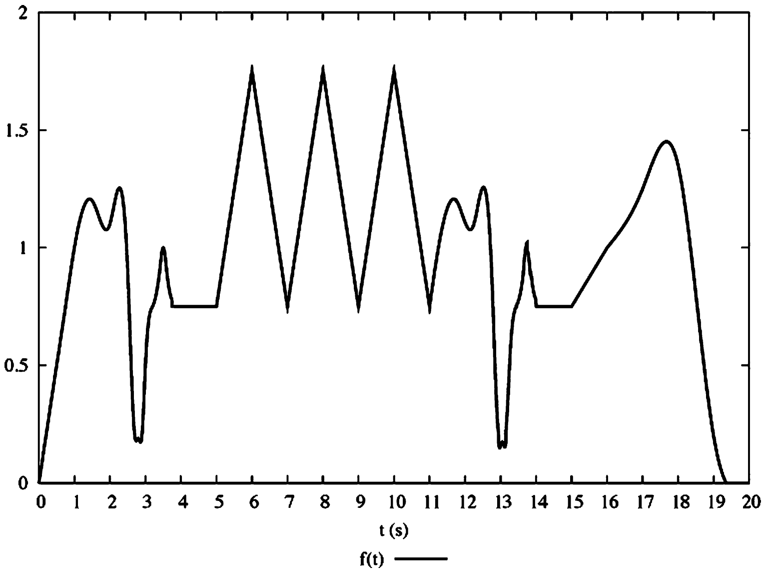


Fig. 1. La fonction $f(t)$ est : cyclique sur $[0, 20]$ (le cycle élémentaire défini sur $[0.75, 5]$ apparaît 2 fois sur $[0, 20]$), périodique sur $[5, 11]$ (le cycle élémentaire est défini sur $[5, 7]$), transitoire, par exemple sur $[15, 20]$.

Il convient cependant de préciser que notre propos n'est pas que ces classifications induisent ou donnent directement les clés de cette résolution générale quels que soient les matériaux et les phénomènes physiques (nous en serions d'ailleurs absolument incapable au regard de la complexité du problème). Néanmoins, ces classifications doivent aider à cerner ce qu'il est possible de faire ou non pour un problème de fatigue donné d'une classe donnée. Elles doivent également aider à la justification rarement faite du passage d'une loi d'évolution obtenue par la Thermodynamique dans un cadre quasi-statique à sa forme écrite dans le cadre de la fatigue. Il convient enfin de noter que nous ne souhaitons pas résoudre les problèmes de fatigue en modélisant un « microphénomène » dont la coalescence aboutirait au phénomène physique de fatigue initialement considéré et gouverné par une loi locale de la forme de l'Éq. (1). Ici, nous souhaitons résolument que les lois de fatigue soient écrites sous la forme de l'Éq. (2).

Les sollicitations structurales induisent l'évolution temporelle locale de la variable d'état « pilote » et non l'inverse. Cet argument justifie que l'on propose d'abord une classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs structurales. C'est l'objet de la première partie de cet article. Parce que les lois d'évolution sont écrites (et résolues) au niveau local et que ces grandeurs structurales ne sont pas a priori transmises sans distorsion au niveau local, la seconde partie de cet article donne une classification des problèmes de fatigue reposant sur des grandeurs locales. Enfin, on illustre nos propos dans le cas d'un modèle de fatigue d'un phénomène d'endommagement connu dans les composites à fibres longues, pour lequel on va donner les arguments permettant la justification du passage de l'Éq. (1) à l'Éq. (2) dans le cas d'une classe structurale donnée et d'une classe locale donnée.

2. Convention de langage et d'écriture et quelques définitions générales

L'objet de l'étude, du point de vue mathématique, va porter essentiellement sur l'examen de la dépendance temporelle (au travers de la variable indiquant le temps, notée t) de différentes fonctions définies et/ou construites dépendant aussi d'une variable d'espace (le point M de l'espace affine modélisant l'espace physique). Pour cette raison :

- la précision du point M comme argument des fonctions considérées est faite uniquement pour indiquer que l'on travaille avec des champs (que l'on suppose réguliers par rapport aux variables scalaires spatiales contenues dans l'indication du point M) car aucune propriété ou opération (différentiation, par exemple) n'est particulièrement requise par rapport aux variables d'espace dans cette étude ;
- toutes les indications et/ou définitions qui sont nécessaires relativement à la dépendance temporelle des fonctions considérées sont formulées comme si ces fonctions n'étaient dépendantes que du temps.

Ainsi, par exemple, la mention des bornes d'une fonction sera implicitement entendue comme étant relative aux bornes temporelles. Les notions de continuité et de dérivabilité seront elles aussi implicitement entendues comme étant relatives à la variable t. Enfin, on donne un vocabulaire général relatif à des fonctions dépendant du temps qui sera plus spécifiquement adapté dans la suite. Considérons une fonction $f(t)$ non constante dépendant du temps (régulière autant que nécessaire) définie sur l'intervalle I. On note $f_{\min}$ et $f_{\max}$ ses bornes. On dira (Fig. 1) :

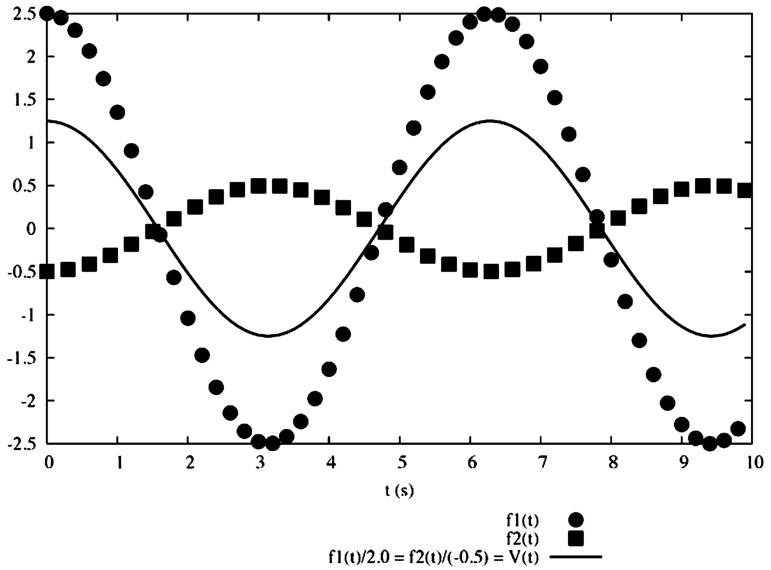


Fig. 2. Les fonctions $f_1(t)$ and $f_2(t)$ sont identiques.

– que $f(t)$ est cyclique si dans l'intervalle de temps où elle est définie, on trouve des sous-intervalles où elle se répète à l'identique, sinon, elle y est dite transitoire ;
– que $f(t)$ est périodique si les sous-intervalles précédents forment une partition de I.

On appelle $c[f](t)$ le cycle élémentaire de f que l'on définit comme la restriction de la fonction considérée sur le sous-intervalle qui définit sa période $T[f]$. On donne également la définition de deux fonctions que l'on qualifie d'identiques.

Définition *(D0 – Fonctions identiques).* On dira que deux fonctions dépendant du temps $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont identiques, si et seulement si, $\exists \overline{f}_1 \in \mathbb{R}^*$, $\exists \overline{f}_2 \in \mathbb{R}^* / f_1(t)/\overline{f}_1 = f_2(t)/\overline{f}_2 = V(t)$ (Fig. 2).

3. Classification des problèmes de fatigue selon des grandeurs structurales

3.1. Définitions et vocabulaire nécessaires à la classification des problèmes de fatigue à l'aide de grandeurs structurales

On considère un système matériel en mouvement dans l'espace physique ε^3 rapporté à un repère galiléen. Le système coïncide au cours du temps avec le domaine $D(t) = \Omega(t) \cup \partial\Omega(t)$. $D(t)$ est un ensemble connexe par arc fermé borné de l'espace affine qui modélise ε^3, $\Omega(t)$ désigne son intérieur et $\partial\Omega(t)$ sa frontière supposée régulière. L'évolution de $D(t)$ est étudiée entre les instants t_0 et t_{MAX}. Les sollicitations appliquées à $D(t)$ peuvent être une densité volumique d'effort agissant dans $\Omega(t)$ et des actions de contact (sous la forme d'une densité surfacique d'effort et/ou d'un champ de déplacement) agissant sur $\partial\Omega(t)$. Le problème de calcul de structures, noté (P), posé sur le système consiste à trouver les champs de déplacement et des variables d'état incluses dans la modélisation du milieu constitutif du domaine, vérifiant l'équation d'équilibre local usuelle au point M et la loi de comportement du milieu (l'ensemble des lois d'état et d'évolution), sous des conditions aux limites données. Ce problème est qualifié de problème standard. On considère deux instants t_a et t_b $(t_0 \leqslant t_a < t_b \leqslant t_{MAX})$ qui définissent l'intervalle de temps $I = [t_a, t_b]$. On note $S(I)$ (respectivement, $S_c(I)$ et $S_t(I)$) l'ensemble de toutes les composantes des champs de vecteurs qui définissent les sollicitations du problème (P) (respectivement, qui sont constantes et non constantes) au cours du temps, entre les instants t_a et t_b. On note respectivement n, n_c et n_t le cardinal de chacun de ces ensembles. On a : $S(I) = S_c(I) \cup S_t(I)$. On note $s_\alpha(M)$ un élément quelconque de $S_c(I)$ et $s_\alpha(M,t)$ un élément quelconque de $S_t(I)$. On a : $S_t(I) = \{s_\alpha(M,t)_{\alpha=1,\dots,n_t}\}$. On suppose que les fonctions $s_\alpha(M,t)$ sont des fonctions continues et dérivables sur leur domaine de définition. On note $\mathbb{S}_t(I)$ l'ensemble des grandeurs nécessaires à la connaissance de l'ensemble $S_t(I)$.

Hypothèse *(H0).* La fonction $s_\alpha(M,t)$ identifiant une sollicitation de manière unique, sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{S}_t(I)$ doit conserver cette unicité. Par conséquent, on impose que la relation entre $s_\alpha(M,t)$ et les éléments qui la décrivent dans $\mathbb{S}_t(I)$ soit bi-univoque.

Définition *(D1 – Sollicitation).* On appellera « sollicitation appliquée au système (dans l'intervalle I) » un élément quelconque de l'ensemble $S(I)$.

Définition *(D2 – Sollicitation cyclique et transitoire).* Considérons l'intervalle de temps I et un élément $s_\alpha(M,t)$ de $S_t(I)$. On dira que la fonction $c[s_\alpha(M,t)](M,t)$ définie par :

$$c\big[s_\alpha(M,t)\big](M,t) = \big\{s_\alpha(M,t),\ t \in I_0^c\big[s_\alpha(M,t)\big](M),\ I_0^c\big[s_\alpha(M,t)\big](M) \subset I\big\}$$

est un cycle élémentaire de $s_\alpha(M,t)$, s'il existe k ($k \in \mathbb{N}^*$) intervalles, notés $(I_i^c[s_\alpha(M,t)](M))_{i=1,\dots,k}$, tels que, pour tout i ($1 \leqslant i \leqslant k$) :

– $I_i^c[s_\alpha(M,t)](M) \neq I_0^c[s_\alpha(M,t)](M)$ (avec $I_i^c[s_\alpha(M,t)](M) \cap I_{i+1}^c[s_\alpha(M,t)](M) = \emptyset$) ;
– $\exists p_i \in \mathbb{R}_+, \exists t' \in I_0^c[s_\alpha(M,t)](M) / \forall t \in I_i^c[s_\alpha(M,t)](M), s_\alpha(M,t) = s_\alpha(M,t'+p_i)$.

En notant $p_0 = 0$, on appelle les k valeurs $c_i[s_\alpha(M,t)] = p_i - p_{i-1}$ ($1 \leqslant i \leqslant k$), les k périodes de la fonction $s_\alpha(M,t)$ associées au cycle élémentaire $c[s_\alpha(M,t)](M,t)$. On dira alors que la sollicitation $s_\alpha(M,t)$:

– est cyclique sur I (pour le cycle élémentaire $c[s_\alpha(M,t)](M,t)$) ;
– que le cycle élémentaire $c[s_\alpha(M,t)](M,t)$ est répété k fois (il apparaît donc $k+1$ fois dans l'intervalle I) ;
– que ses cycles (autres que celui élémentaire) sont ses restrictions sur les k intervalles $(I_i^c[s_\alpha(M,t)](M))_{i=1,\dots,k}$ pour les périodes respectives $c_1, \dots, c_k$.

Si la sollicitation $s_\alpha(M,t)$ n'est pas cyclique sur I, on dira qu'elle y est transitoire.

Définition *(D3 – Sollicitation périodique).* Si les $k+1$ intervalles $(I_i^c[s_\alpha(M,t)](M))_{i=0,\dots,k}$ sont tels que $I = \bigcup_{i=0}^{i=k} I_i^c[s_\alpha(M,t)](M)$ (avec $I_i^c[s_\alpha(M,t)](M) \cap I_{i+1}^c[s_\alpha(M,t)](M) = \emptyset$), alors on dira que $s_\alpha(M,t)$ est périodique sur l'intervalle I. On note : $T[s_\alpha(M,t)](M)$ sa période et $f[s_\alpha(M,t)](M) = 1/T[s_\alpha(M,t)](M)$ sa fréquence, $I^{cp}[s_\alpha(M,t)](M)$ ($= I_0^c[s_\alpha(M,t)](M)$) l'intervalle de temps qui définit le cycle élémentaire de $s_\alpha(M,t)$, $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ la restriction de $s_\alpha(M,t)$ sur l'intervalle $I^{cp}[s_\alpha(M,t)](M)$.

La fonction $s_\alpha(M,t)$ étant continue, la fonction $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ l'est aussi sur $I^{cp}[s_\alpha(M,t)](M)$. On rappelle que si une fonction continue est périodique, alors elle est bornée supérieurement et inférieurement et atteint ses bornes. Notons $s_{\alpha\,\min}(M)$ (respectivement, $s_{\alpha\,\max}(M)$) la borne inférieure (respectivement, supérieure) de $s_\alpha(M,t)$. En raison des hypothèses faites, on a : $s_{\alpha\,\min}(M) < s_{\alpha\,\max}(M)$. En raison de la périodicité supposée, $s_{\alpha\,\min}(M)$ et $s_{\alpha\,\max}(M)$ sont aussi les bornes de $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$. Enfin, on définit la valeur moyenne de $s_\alpha(M,t)$ par $s_{\alpha\,moy}(M) = \frac{1}{T[s_\alpha(M,t)](M)} \int_{I^{cp}[s_\alpha(M,t)](M)} s_\alpha(M,t)\,\mathrm{d}t$. Sans plus d'hypothèse, la fonction $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ peut posséder des minimums et maximums relatifs autres que ceux absolus définis par ses bornes. La classification des problèmes de fatigue que nous allons effectuer nécessite les deux hypothèses supplémentaires (H1) et (H2).

Hypothèse (*H1*). La fonction $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ ne possède aucun extrémum autres que $s_{\alpha\,\min}(M)$ et $s_{\alpha\,\max}(M)$. Le cycle élémentaire $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ évolue donc entre $s_{\alpha\,\min}(M)$ et $s_{\alpha\,\max}(M)$ de façon monotone.

La connaissance seule du triplet $(T[s_\alpha(M,t)](M),\ s_{\alpha\,\min}(M),\ s_{\alpha\,\max}(M))$ ne permet pas de connaître complètement $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$: elle ne donne pas l'évolution entre ses bornes. Pour y remédier, on pose l'hypothèse (H2).

Hypothèse (*H2*). Le cycle élémentaire $c^p[s_\alpha(M,t)](M,t)$ de la fonction $s_\alpha(M,t)$ vérifie l'hypothèse (H1), est symétrique par rapport à sa demi-période et évolue de façon linéaire entre les bornes $s_{\alpha\,\min}(M)$ et $s_{\alpha\,\max}(M)$.

Cette hypothèse fixe le profil de la loi horaire de $s_\alpha(M,t)$: il s'agit d'un profil en « dent-de-scie ». Une forme différente d'évolution aurait pu être choisie. Toutefois, c'est la plus usuelle rencontrée dans les problèmes de fatigue. Sous l'hypothèse (H2), $s_\alpha(M,t)$ est identifiée de manière unique par $(T[s_\alpha(M,t)](M),\ s_{\alpha\,\min}(M),\ s_{\alpha\,\max}(M))$ ou bien $(T[s_\alpha(M,t)](M),\ s_{\alpha\,\min}(M)$ ou $s_{\alpha\,\max}(M),\ R[s_\alpha(M,t)](M),\ I_c[s_\alpha(M,t)](M))$.

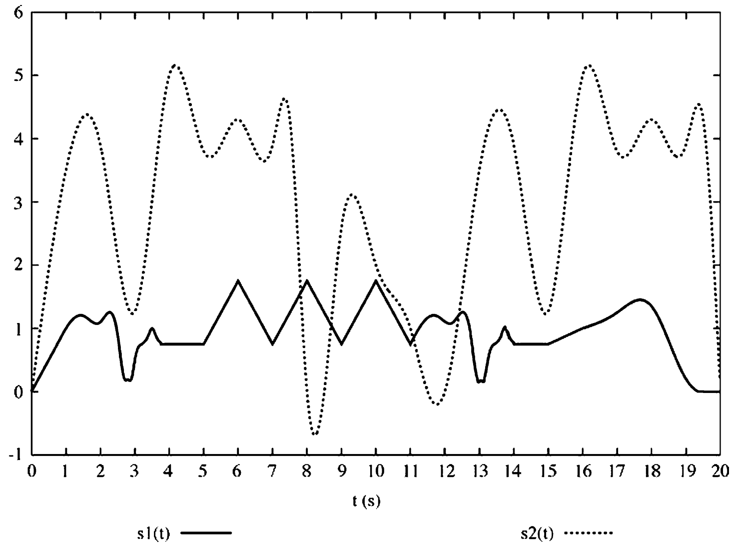
Définition *(D4 – Sollicitations identiques).* On dira que les sollicitations du problème (P) sont identiques, de loi horaire $V(t)$, sur un intervalle I, si et seulement si, $\forall s_\alpha(M,t) \in S_t(I), \exists \bar{s}_\alpha(M) \in \mathbb{R}^* / s_\alpha(M,t)/\bar{s}_\alpha(M) = V(t)$.

On dira alors que tous les éléments de $S_t(I)$ ont la même loi horaire $V(t)$.

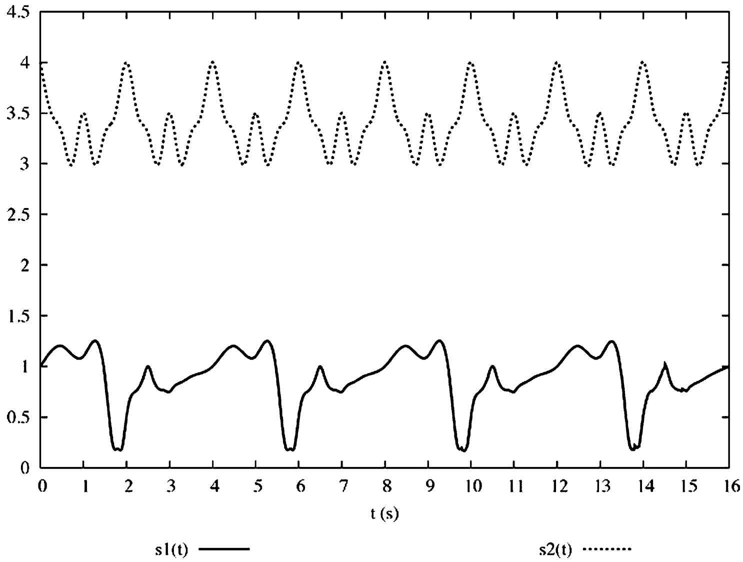
3.2. Illustrations

On illustre les différents concepts précédents avec deux sollicitations $s_1(t)$ et $s_2(t)$:

– Fig. 3(a) donne un exemple où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont cycliques sur l'intervalle $I = [0, 20]$ car elles se retrouvent à l'identique respectivement sur $[1, 5]$, $[11, 15]$ et $[0, 8]$, $[12, 20]$. Elles sont transitoires sur respectivement $[15, 20]$ et $[8, 12]$ et $s_1(t)$ est périodique sur $[5, 11]$ (donc, a fortiori cyclique) ;



(a)



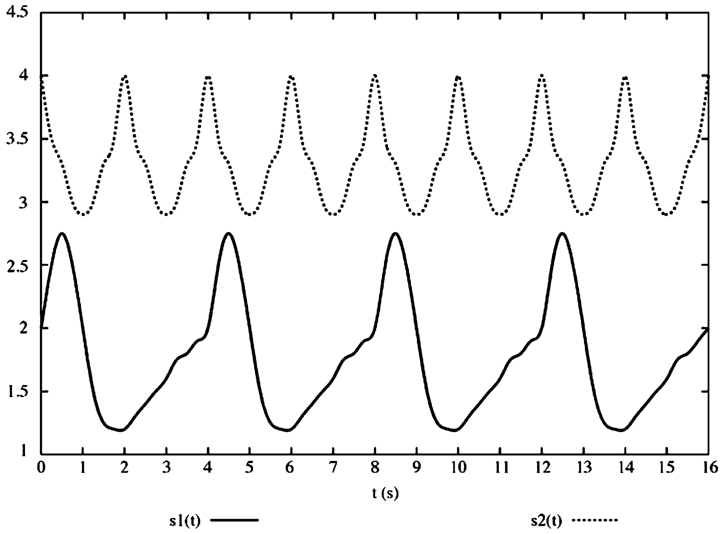
(b)

Fig. 3. Classification structurale, exemples de type de problèmes de fatigue (en supposant que les sollicitations sont uniformes) : $S_t(I) = \{s_1(M,t) = s_1(t), s_2(M,t) = s_2(t)\}$. (a) Problème de fatigue, $I = [0,20]$: $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont cycliques, $s_1(t)$ se retrouve à l'identique sur $[1,5]$ et $[11,15]$, $s_2(t)$ se retrouve à l'identique sur $[0,8]$ et $[12,20]$. (b) Problème de fatigue de type SP(I), $I = [0,20]$: $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont périodiques de cycle élémentaire respectif $[0,2]$ et $[0,4]$.

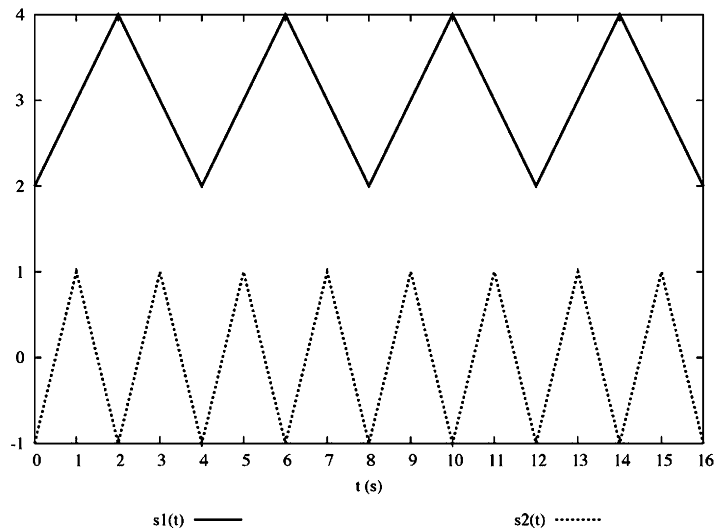
– Fig. 3(b) donne un exemple où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont périodiques sur $[0,20]$ (donc, a fortiori cycliques) car les intervalles de temps où elles se retrouvent à l'identique forment une partition de $[0,20]$. Le cycle élémentaire est respectivement pour l'une et l'autre défini sur $[0,4]$, $[0,2]$ et leur évolution dans cet intervalle ne vérifie aucune des hypothèses (H1) et (H2). En effet, $s_1(t)$ et $s_2(t)$ possèdent d'autres extrémums que ceux définis par leurs bornes ;
– Fig. 4 donne un exemple où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont périodiques sur $[0,16]$. Le cycle élémentaire est respectivement pour l'une et l'autre défini sur $[0,4]$, $[0,2]$. Contrairement au cas précédent, l'hypothèse (H1) est vérifiée sur Fig. 4(a) : $s_1(t)$ et $s_2(t)$ ne possèdent pas d'extrémum autres que ceux définis par leurs bornes. L'hypothèse (H2) est vérifiée sur Fig. 4(b) : $s_1(t)$ et $s_2(t)$ vérifient (H1) et le profil est en dent-de-scie ;
– Fig. 5 donne un exemple où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont périodiques sur $[0,16]$ et identiques. Sur Fig. 5(a), les hypothèses (H1) et (H2) ne sont pas vérifiées. Sur Fig. 5(b), les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées.

3.3. Nouvelles définitions : rapport de charge et indicateur de charge

On définit les grandeurs originales suivantes pour une sollicitation $s_\alpha(M,t)$ périodique :



(a)



(b)

Fig. 4. Classification structurale, exemples de type de problèmes de fatigue (en supposant que les sollicitations sont uniformes) : $S_t(I) = \{s_1(M,t) = s_1(t), s_2(M,t) = s_2(t)\}$. (a) Problème de fatigue de type SPM(I), $I = [0,20]$ («Type SPM(I) = Type SP(I) + Hypothèse (H1)») : $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont périodiques de cycle élémentaire respectif $[0,2]$ et $[0,4]$ et évoluent de manière monotone entre leurs bornes. (b) Problème de fatigue de type SPML(I), $I = [0,20]$ («Type SPML(I) = Type SPM(I) + Hypothèse (H2)») : $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sont périodiques de cycle élémentaire respectif $[0,2]$ et $[0,4]$ et évoluent de manière monotone linéaire entre leurs bornes.

– le rapport de charge $R[s_\alpha(M,t)](M) = \frac{\min(|s_{\alpha\,\min}(M)|,|s_{\alpha\,\max}(M)|)}{\max(|s_{\alpha\,\min}(M)|,|s_{\alpha\,\max}(M)|)}$;
– l'indicateur de charge $I_c[s_\alpha(M,t)](M)$ qui prend quatre valeurs distinctes relatives aux quatre possibilités suivantes : $s_\alpha(M,t)$ est une fonction positive ou nulle (donc $s_{\alpha\,\mathrm{moy}}(M) > 0$), négative ou nulle (donc $s_{\alpha\,\mathrm{moy}}(M) < 0$), positive/négative et admet une valeur moyenne positive ou nulle, positive/négative et admet une valeur moyenne négative. Pour les développements qui suivent, la forme explicite de ce paramètre n'est pas utile.

Le rapport de charge est habituellement défini par $R[s_\alpha(M,t)](M) = s_{\alpha\,\min}(M)/s_{\alpha\,\max}(M)$. On peut montrer aisément que cette définition pose des problèmes pour $s_{\alpha\,\max}(M) = 0$ et dans le cas où l'écriture d'une loi d'évolution de fatigue doit être insensible aux changements de signe de la sollicitation comme cela peut être le cas lors d'un cisaillement. On préfère donc la nouvelle définition complétée par la donnée d'une grandeur supplémentaire (l'indicateur de charge).

3.4. Classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs structurales

Définition *(Problème de fatigue).* On dira que le problème posé est un problème de fatigue sur l'intervalle I, si l'évolution temporelle de tous les éléments de $S_t(I)$ est cyclique sur l'intervalle I. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{S}_t(I) = S_t(I) = \{s_\alpha(M,t)_{\alpha=1,\dots,n_t}\}$.

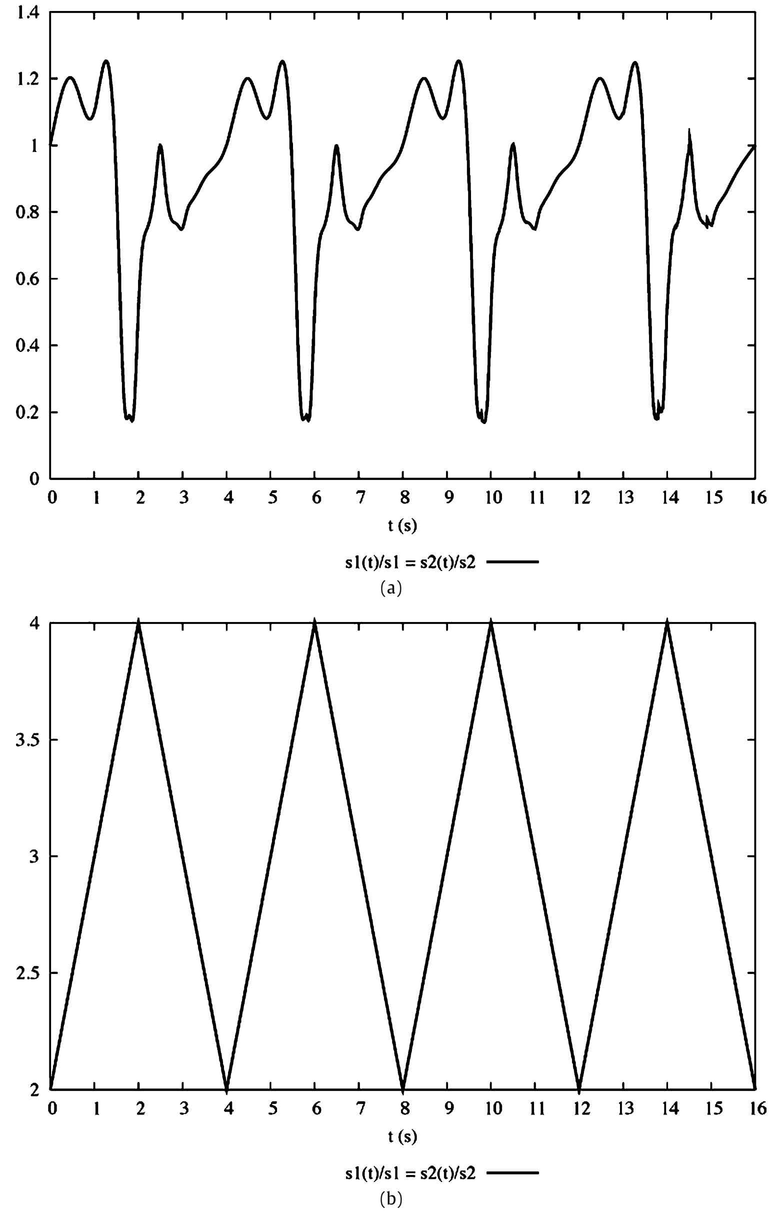


Fig. 5. Classification structurale, exemples de type de problèmes de fatigue (en supposant que les sollicitations sont uniformes) : $S_t(I) = \{s_1(M,t) = s_1(t), s_2(M,t) = s_2(t)\}$. (a) Problème de fatigue de type SPI(I), $I = [0, 16]$ (« Type SPI(I) = Type SP(I) + chargements identiques »). (b) Problème de fatigue de type SPMLI(I), $I = [0, 16]$ (« Type SPMLI(I) = Type SPML(I) + chargements identiques »). Dans les deux cas, il existe des nombres $\bar{s}_1$ et $\bar{s}_2$ tels que : $s_1(t)/\bar{s}_1 = s_2(t)/\bar{s}_2$.

La généralité des problèmes induits par cette définition est importante et il est difficile de la distinguer significativement de celle des problèmes standards et d'en extraire des caractéristiques relatives à la notion de fatigue. On donne donc une première classe de problèmes de fatigue simplifiés.

Définition *(Problème de fatigue de type* SP(I)*).* On dira que le problème posé est un problème de fatigue de type SP(I) (Sollicitations Périodiques sur l'intervalle I) si c'est un problème de fatigue sur l'intervalle I pour lequel l'évolution temporelle de tous les éléments de $S_t(I)$ est périodique. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{S}_t(I) = \{(c^p[s_\alpha(M,t)](M,t))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$.

La généralité des problèmes induits est encore très importante, voire dans certains cas, difficile à inscrire dans un problème dit de fatigue. Par exemple, si deux sollicitations sont périodiques avec des périodes dans un rapport non rationnel, définir la notion de cycle peut s'avérer difficile. Une simplification possible est de supposer que les sollicitations sont identiques.

Définition *(Problème de fatigue de type* SPI(I)*).* On dira que le problème posé est un problème de fatigue de type SPI(I) (Sollicitations Périodiques Identiques sur l'intervalle I) si c'est un problème de fatigue de type SP(I) pour lequel les sollicitations sont identiques. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{S}_t(I) = \{c^p[V(t)](t), (\bar{s}_\alpha(M))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$.

L'utilisation des hypothèses (H1) et (H2) permet de clore notre classification.

Définition *(Problème de fatigue de type* SPM(I) *et* SPMI(I)*).* On dira que le problème posé est un problème de fatigue de type SPM(I) (Sollicitations Périodiques Monotones sur l'intervalle I) si c'est un problème de fatigue de type SP(I) pour lequel chaque élément de $S_t(I)$ obéit à l'hypothèse (H1). On dira que le problème posé est un problème de fatigue de type SPMI(I) (Sollicitations Périodiques Monotones Identiques sur l'intervalle I), si c'est un problème de fatigue de type SPM(I) dont les sollicitations sont identiques. On a :

– $\mathbb{S}_t(I) = \{(c^p[s_\alpha(M,t)](M,t))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$ pour les problèmes SPM(I) ;
– $\mathbb{S}_t(I) = \{c^p[V(t)](t), (\bar{s}_\alpha(M))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$ pour les problèmes SPMI(I).

Définition *(Problème de fatigue de type* SPML(I) *et* SPMLI(I)*).* On dira que le problème posé est un problème de fatigue de type SPML(I) (Sollicitations Périodiques Monotones Linéaires sur l'intervalle I) si c'est un problème de fatigue de type SPM(I) pour lequel chaque élément de $S_t(I)$ obéit à l'hypothèse (H2). On dira que le problème posé est un problème de fatigue de type SPMLI(I) (Sollicitations Périodiques Monotones Linéaires Identiques sur l'intervalle I), si c'est un problème de fatigue type SPML(I) dont les sollicitations sont identiques. On a :

– $\mathbb{S}_t(I) = \{(T[s_\alpha(M,t)](M), s_{\alpha\,\min}(M), s_{\alpha\,\max}(M))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$ pour les problèmes SPML(I) ;
– $\mathbb{S}_t(I) = \{T[V(t)], V_{\min}, V_{\max}, (\bar{s}_\alpha(M))_{\alpha=1,\ldots,n_t}\}$ pour les problèmes SPMLI(I).

Finalement, les classes construites peuvent être hiérarchisées de la plus complexe à la plus simple par le nombre décroissant de renseignements nécessaires à la connaissance de l'ensemble $\mathbb{S}_t(I)$.

Remarque. Si les phénomènes physiques considérés ne sont pas sensibles aux effets de vitesse mais uniquement au caractère incrémental de la variable d'état « pilote », alors les problèmes de fatigue de type SPM(I) et SPML(I) sont équivalents au sens suivant : sous réserve de conserver les mêmes extrémums de sollicitations, l'intégration des lois d'évolution conduira au même résultat final, que les évolutions des sollicitations entre leurs extrémums soient linéaires ou non. A fortiori, pour ces mêmes types de phénomènes physiques, et dans des conditions identiques, des problèmes de fatigue de type SPMI(I) et SPMLI(I) sont équivalents.

On illustre les différents types de problèmes précédents :

– Fig. 3 donne des problèmes (généraux) de fatigue et de type SP(I) ;
– Fig. 4 donne des problèmes de type SPM(I) et SPML(I) ;
– Fig. 5 donne des problèmes de type SPI(I) et SPMLI(I).

4. Classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs locales

4.1. Justification d'une classification des problèmes de fatigue à partir de grandeurs locales

Le pouvoir particulier que nous souhaitons attribuer ici, au niveau local, au concept de fatigue, est d'imposer l'écriture des lois d'évolution des variables d'état internes d'un modèle de comportement sous une forme déduite de la Thermodynamique des Milieux Continus (qui peut être l'Éq. (1)) mais en s'affranchissant de la connaissance de la loi horaire complète de la variable « pilote », au profit d'une variable associée à la répétitivité de son application et d'éléments caractéristiques de cette loi horaire. Cette loi d'évolution dite de fatigue prendra alors au final la forme générale, l'Éq. (2).

L'intégration numérique de ces lois supprime les itérations temporelles inscrites au sein de la notion de cycle et les temps de calcul sont diminués. Il ne faut toutefois pas que l'abaissement du temps de calcul se fasse au détriment de la qualité de la prévision. C'est la raison pour laquelle les lois d'évolution (Éq. (2)) écrites en fatigue doivent être le plus proche possible des « vraies » lois. Pour cela, la prise en compte des éléments caractéristiques de la loi horaire de la variable « pilote » doit être faite de telle manière qu'elle permette d'identifier sans ambiguité la loi horaire complète de la variable « pilote » : on posera pour cela des hypothèses identiques à l'hypothèse (H0), mais au niveau local.

On peut alors faire la remarque suivante : ces éléments caractéristiques locaux reposent sur des éléments caractéristiques des sollicitations structurales imposées par le milieu extérieur. Identifier ces éléments caractéristiques des sollicitations structurales semble difficile voire impossible dans le cas de problèmes de fatigue les plus généraux que l'on puisse imaginer. Cela justifie ainsi le fait d'avoir d'abord construit une classification des problèmes de fatigue au niveau structural.

Parce qu'en toute fin, ce sont les lois locales d'évolution qui sont finalement résolues, on justifie ainsi que la suite de la classification que l'on propose soit réalisée à l'aide de grandeurs locales. Un autre argument plaide également en faveur de cette chronologie. En effet, s'il est aisé d'analyser des grandeurs structurales afin d'en identifier des éléments caractéristiques, en revanche, il est moins aisé de répondre à la question de savoir si toutes ou partie de ces éléments caractéristiques se transmettent sans distorsion au niveau local à la variable « pilote ». La classification faite au niveau local permet d'amener des réponses à cette question.

4.2. Définitions et vocabulaire nécessaires à la classification des problèmes de fatigue à l'aide de grandeurs locales

Définition *(d1 – Composantes actives de la variable « pilote »).* Soit $Q(M,t)$ la variable pilote supposée 2-tensorielle utilisée dans la modélisation d'un phénomène. Ses composantes sont notées $(Q_{ij}(M,t))_{i,j=1,2,3}$. On note $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$ les composantes de $Q(M,t)$ présentes dans la loi d'évolution du phénomène considéré. On appelle composantes actives de la variable « pilote », les composantes $(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}$.

L'intérêt de la définition de ces composantes particulières réside dans le fait que leur emploi peut induire une simplification dans la démarche évoquée et notamment concernant la justification du passage de l'Éq. (1) à l'Éq. (2). On peut par exemple citer le phénomène de rupture des fibres d'un composite qui n'est gouverné (au moins en première approximation) que par la déformation axiale au sein des fibres.

Les composantes actives jouent au niveau local le même rôle que jouent les grandeurs $s_\alpha(M,t)$ (Définition (D1)) au niveau structural. Aussi, comme cela a été fait avec $s_\alpha(M,t)$ (Définitions (D2) et (D3)), on définit pour chaque composante $Q^*_{ij}(M,t)$, si elle est périodique (Définition (D3)) :

- son cycle élémentaire $c[Q^*_{ij}(M,t)](M,t)$ noté $c^{*(ij)}(M,t)$ qui est la restriction de $Q^*_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle $I[Q^*_{ij}(M,t)](M)$ noté $I^{*(ij)}(M)$ qui définit sa période ;
- sa fréquence $f[Q^*_{ij}(M,t)](M)$ ou sa période $T[Q^*_{ij}(M,t)](M)$, notées $f^{*(ij)}(M)$ et $T^{*(ij)}(M)$;
- le rapport de charge : $R[Q^*_{ij}(M,t)](M) = \frac{\min(|\min(Q^*_{ij}(M,t))|,|\max(Q^*_{ij}(M,t))|)}{\max(|\min(Q^*_{ij}(M,t))|,|\max(Q^*_{ij}(M,t))|)}$, noté $R^{*(ij)}(M)$;
- l'indicateur de charge $I_c[Q^*_{ij}(M,t)](M)$, noté $I_c^{*(ij)}(M)$.

On note $Q^*_{ij\,\min}(M)$, $Q^*_{ij\,\max}(M)$ et $Q^*_{ij\,\mathrm{moy}}(M) = \frac{1}{T^{*(ij)}(M)}\int_{I^{*(ij)}(M)} Q^*_{ij}(M,t)\,\mathrm{d}t$ les valeurs respectivement minimale, maximale et moyenne de $Q^*_{ij}(M,t)$.

Définition *(d2* – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques d'une composante de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante $Q_{ij}(M,t)$ de la variable « pilote », sur l'intervalle I, au point M, l'ensemble $\mathbb{Q}^{(ij)}(I,M)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I.

Définition *(d3* – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la variable « pilote », sur l'intervalle I, au point M, l'ensemble $\mathbb{Q}(I,M) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{(ij)}(I,M)$.

Les deux définitions précédentes s'énoncent également pour les composantes actives de la variable pilote pour donner les ensembles $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,M)$ et $\mathbb{Q}^*(I,M)$.

Définition *(d2* – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques d'une composante active de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable « pilote », sur l'intervalle I, au point M, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,M)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^*_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I.

Définition *(d3* – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable « pilote », sur l'intervalle I, au point M, l'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,M) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,M)$.

De la même manière que cela a été supposé pour les classifications structurales (hypothèse (H0)), on pose l'hypothèse (h0*/M).

Hypothèse *(h0*/M).* La relation entre chaque composante $Q^*_{ij}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,M)$ est bi-univoque.

4.3. Concept de problème local de fatigue et début de la classification à partir de grandeurs locales

Afin de réaliser la classification au niveau local que nous souhaitons, le concept de problème local de fatigue doit être défini en préambule. Ensuite, suivant une terminologie similaire à celle utilisée pour la classification faite au niveau structural, différentes classes de problèmes locaux de fatigue pourront être construites.

Définition *(Problème local de fatigue).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, au point M, si l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable « pilote » est cyclique, sur l'intervalle I, au point M. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^*(I,M) = \{(Q^*_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue de type* $\mathrm{PP}(I,M)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PP}(I,M)$ (variable Pilote à composantes actives Périodiques sur l'intervalle I au point M) si c'est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, au point M, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable « pilote » est périodique. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^*(I,M) = \{(c^{*(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue de type* $\mathrm{PPI}(I,M)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PPI}(I,M)$ (variable Pilote à composantes actives Périodiques Identiques sur l'intervalle I au point M) si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PP}(I,M)$ pour lequel les composantes actives de la variable « pilote » sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q^*_{ij}(M,t), \exists \overline{Q^*_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^*/Q^*_{ij}(M,t)/\overline{Q^*_{ij}}(M) = V^*(M,t)$. On note $T^*(M)$ la période de la fonction $V^*(M,t)$ et $c^*(M,t)$ son cycle élémentaire. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^*(I,M) = \{c^*(M,t), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue de type* $\mathrm{PPM}(I,M)$ *et* $\mathrm{PPMI}(I,M)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PPM}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{PPMI}(I,M)$) (variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones, respectivement Monotones Identiques, sur l'intervalle I au point M) si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PP}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{PPI}(I,M)$) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable « pilote » obéit à l'hypothèse (H1). Pour ces deux classes de problèmes, l'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,M)$ est identique à ceux des classes $\mathrm{PP}(I,M)$ et $\mathrm{PPI}(I,M)$.

Définition *(Problème local de fatigue de type* $\mathrm{PPML}(I,M)$ *et* $\mathrm{PPMLI}(I,M)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PPML}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{PPMLI}(I,M)$) (variable Pilote à composantes actives Périodiques Monotones Linéaires, respectivement Monotones Linéaires Identiques, sur l'intervalle I au point M) si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PPM}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{PPMI}(I,M)$) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable « pilote » obéit à l'hypothèse (H2). On a :

- $\mathbb{Q}^*(I,M) = \{(T^{*(ij)}(M), Q^*_{ij\,\min}(M), Q^*_{ij\,\max}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{PPML}(I,M)$;
- $\mathbb{Q}^*(I,M) = \{T^*(M), V^*_{\min}(M), V^*_{\max}(M), (\overline{Q^*_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{PPMLI}(I,M)$, où $T^*(M)$, $V^*_{\min}(M)$ et $V^*_{\max}(M)$ sont respectivement la période et les bornes du cycle élémentaire commun des composantes $Q^*_{ij}(M,t)$.

Les différents concepts précédents peuvent s'illustrer avec les mêmes images que pour le cas de la classification faite sur des grandeurs structurales (Paragraphe 3.2) où $s_1(t)$ et $s_2(t)$ doivent être comprises comme étant deux composantes actives de la variable « pilote ». Les commentaires sont quasiment identiques. Ils sont donc significativement simplifiés. Ainsi : Fig. 3(a) donne un exemple où les deux composantes actives sont cycliques ; Fig. 3(b) donne un exemple où les deux composantes actives sont périodiques ; Fig. 4 donne un exemple où les deux composantes actives sont périodiques et pour lesquelles l'hypothèse (H1) est vérifiée sur Fig. 4(a), l'hypothèse (H2) est vérifiée sur Fig. 4(b) ; Fig. 5 donne un exemple où les deux composantes actives sont périodiques et identiques.

4.4. Concept de problème local de fatigue sur un domaine et suite de la classification basée sur des grandeurs locales

Les définitions qui viennent d'être données imposent l'examen de chaque point M du domaine Ω qui définit la géométrie de la structure étudiée et pour laquelle se pose le problème de la fatigue. Afin de pouvoir appliquer les définitions précédentes non plus à un point mais à un sous-ensemble de points ω (connexe par arc ou non) de l'ensemble Ω, on définit un nouveau concept de problème de fatigue : un problème local de fatigue sur un domaine. Pour cela, le concept de problème local de fatigue sur un domaine est guidé par l'idée que la loi horaire des composantes $Q^*_{ij}(M,t)$ peut être indépendante du point considéré (sur $\omega \subset \Omega$). Cela va induire une propriété mathématique intéressante sur les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$: elles doivent être à variables séparables (sur $\omega \subset \Omega$).

Définition *(Problème local de fatigue sur un domaine).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, si quel que soit le point M de ω, on est en présence d'un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, au point M, pour lequel pour toutes les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$, il existe un réel $q^*_{ij}(M)$ et une même fonction $V^{*(ij)}(\omega,t)$ tels que : $Q^*_{ij}(M,t) = V^{*(ij)}(\omega,t)q^*_{ij}(M)$.

On peut alors étendre sans difficulté les définitions des problèmes locaux de fatigue et dans un premier temps celles des ensembles des paramètres locaux caractéristiques.

Définition *(d4 – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine d'une composante de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active $Q_{ij}(M,t)$ de la variable « pilote », sur l'intervalle I, sur le domaine ω, l'ensemble $\mathbb{Q}^{(ij)}(I,\omega)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I, sur le domaine ω.

Définition *(d5 - Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la variable « pilote », sur l'intervalle I, sur le domaine ω, l'ensemble $\mathbb{Q}(I,\omega) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{(ij)}(I,\omega)$.

Les deux définitions précédentes s'énoncent également pour les composantes actives de la variable pilote pour donner les ensembles $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,\omega)$ et $\mathbb{Q}^{*}(I,\omega)$.

Définition *(d4* – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine d'une composante active de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable « pilote », sur l'intervalle I, sur le domaine ω, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,\omega)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^*_{ij}(M,t)$, sur l'intervalle I, sur le domaine ω.

Définition *(d5* – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine des composantes actives de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives de la variable « pilote », sur l'intervalle I, sur le domaine ω, l'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,\omega)$.

Ainsi, pour les problèmes locaux de fatigue sur le domaine ω, on a :

$$\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \left\{ \left(q^*_{ij}(M)\right)_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, \left(V^{*(ij)}(\omega,t)\right)_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2} \right\}$$

De la même manière que pour l'hypothèse (h0*/M), on pose l'hypothèse (h0*/ω).

Hypothèse (*h0*/ω*). La relation entre chaque composante $Q^*_{ij}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*(ij)}(I,\omega)$ est bi-univoque.

On étend ensuite les autres définitions.

Définition *(Problème local de fatigue sur un domaine de type* PP(I,ω)*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type PP(I,ω), sur l'intervalle I, sur le domaine ω, si c'est un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable « pilote » (i.e., la loi horaire $V^{*(ij)}(\omega,t)$) est périodique.

Relativement à la fonction $V^{*(ij)}(\omega,t)$, on définit :

- son cycle élémentaire $c[V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega,t)$, noté $c^{*(ij)}(\omega,t)$, qui est sa restriction sur l'intervalle $I[V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega)$ noté $I^{*(ij)}(\omega)$ qui définit sa période ;
- sa fréquence $f[V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega)$ ou sa période $T[V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega)$, notées également $f^{*(ij)}(\omega)$ et $T^{*(ij)}(\omega)$;
- $V^{*(ij)}_{\min}(\omega)$, $V^{*(ij)}_{\max}(\omega)$ et $V^{*(ij)}_{\text{moy}}(\omega) = \frac{1}{T^{*(ij)}(\omega)}\int_{I^{*(ij)}(\omega)} V^{*(ij)}(\omega,t)\,\mathrm{d}t$ les valeurs respectivement minimale, maximale et moyenne de $V^*_{ij}(\omega,t)$.

On étend également les définitions du rapport et de l'indicateur de charge, qui deviennent, compte tenu de la forme des composantes $Q^*_{ij}(M,t)$ pour les problèmes locaux de fatigue sur un domaine :

- le rapport de charge : $R[V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega) = \frac{\min(|\min(V^{*(ij)}(\omega,t))|,|\max(V^{*(ij)}(\omega,t))|)}{\max(|\min(V^{*(ij)}(\omega,t))|,|\max(V^{*(ij)}(\omega,t))|)}$, noté $R^{*(ij)}(\omega)$;
- l'indicateur de charge $I_c[V^{*(ij)}(\omega,t)](\omega)$, noté $I^{*(ij)}_c(\omega)$.

Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \{(q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (c^{*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue sur un domaine de type* PPI(I,ω)*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type PPI(I,ω) si c'est un problème local de fatigue de type PP(I,ω) pour lequel les composantes actives de la variable « pilote » (i.e., les lois horaires $V^{*(ij)}(\omega,t)$) sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q^*_{ij}(M,t)$, $\exists\overline{q^*_{ij}}(\omega)\in\mathbb{R}^*/Q^*_{ij}(M,t)/\overline{q^*_{ij}}(\omega) = V^*(\omega,t)q^*_{ij}(M)$. On note $T^*(\omega)$ la période de la fonction $V^*(\omega,t)$ et $c^*(\omega,t)$ son cycle élémentaire. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \{(q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^*(\omega,t), (\overline{q^*_{ij}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue sur un domaine de type* PPM(I,ω) *et* PPMI(I,ω)*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type PPM(I,ω) (respectivement, PPMI(I,ω)) si c'est un problème local de fatigue de type PP(I,ω) (respectivement, PPI(I,ω)) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable « pilote »

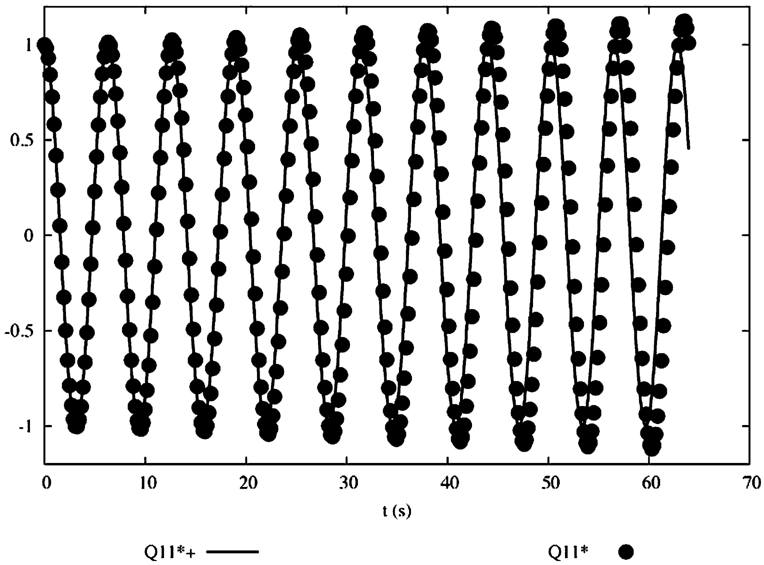


Fig. 6. Exemple d'une composante active (Q^*_{11}) et active approchée (Q^{*+}_{11}) : Q^*_{11} n'est pas rigoureusement périodique en raison, par exemple, des redistributions locales de contraintes ou de déformations induites par l'évolution des variables internes ; elle est alors remplacée par Q^{*+}_{11} qui est rigoureusement périodique.

obéit à l'hypothèse (H1). Pour ces deux classes de problèmes, l'ensemble $\mathbb{Q}^*(I,\omega)$ est identique à ceux des classes $\mathrm{PP}(I,\omega)$ et $\mathrm{PPI}(I,\omega)$.

Définition *(Problème local de fatigue sur un domaine de type* $\mathrm{PPML}(I,\omega)$ *et* $\mathrm{PPMLI}(I,\omega)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PPML}(I,\omega)$ (respectivement, $\mathrm{PPMLI}(I,\omega)$) si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{PPM}(I,\omega)$ (respectivement, $\mathrm{PPMI}(I,\omega)$) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active de la variable « pilote » obéit à l'hypothèse (H2). On a :

– $\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \{(q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (T^{*(ij)}(\omega), V^{*(ij)}_{\min}(\omega), V^{*(ij)}_{\max}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{PPML}(I,\omega)$;
– $\mathbb{Q}^*(I,\omega) = \{(q^*_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T^*(\omega), V^*_{\min}(\omega), V^*_{\max}(\omega), (\overline{q^*_{ij}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{PPMLI}(I,\omega)$, où $T^*(\omega)$, $V^*_{\min}(\omega)$ et $V^*_{\max}(\omega)$ sont respectivement la période et les bornes de $V^*(\omega,t)$.

4.5. Pertinence des classifications réalisées et suite de la classification des problèmes locaux de fatigue à partir de grandeurs locales. Concept de problème local de fatigue approché

La classification faite à partir des sollicitations structurales a défini des classes de problèmes susceptibles d'exister réellement puisque c'est l'Expérimentateur (l'Extérieur du système étudié) qui impose l'évolution temporelle des sollicitations. Concernant la classification faite à partir des sollicitations locales (la variable « pilote »), les choses sont bien moins simples. En effet, les redistributions du champ local de la variable « pilote » (contrainte, déformation, ...) induits par les évolutions locales des variables internes empêchent, sauf cas exceptionnels, que les composantes $Q^*_{ij}(M,t)$ soient réellement cycliques (a fortiori périodiques) sur un intervalle de temps donné. Cette remarque oblige donc à la création de classes de problèmes locaux de fatigue (ou locaux par domaine) plus réalistes qui nécessite au préalable de définir des fonctions susceptibles de remplacer les composantes actives « réelles » $Q^*_{ij}(M,t)$ de la variable « pilote ». Ces fonctions qui seront choisies « parfaitement cycliques » ou « parfaitement périodiques » seront appelées les composantes actives approchées de la variable « pilote ». Elles remplaceront les composantes actives « réelles » $Q^*_{ij}(M,t)$ au sein de la loi d'évolution de fatigue par exemple, justifiant et autorisant ainsi l'emploi de cette loi, et donneront naissance aux différentes classes de problèmes de fatigue dits approchés.

Définition *(Composantes actives approchées de la variable « pilote »).* La composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ est une composante active approchée de la composante $Q^*_{ij}(M,t)$, sur l'intervalle I, au sens du critère $c(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M)$, si et seulement si, $c(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M) \leqslant c_{MAX}$ (c_{MAX} étant un nombre réel positif donné) (Fig. 6).

Le critère $c(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M)$ peut prendre par exemple la forme suivante :

$$c\big(I, Q^*_{ij}, Q^{*+}_{ij}, M\big) = \frac{\int_{t_a}^{t_b} |Q^*_{ij}(M,t) - Q^{*+}_{ij}(M,t)|\,\mathrm{d}t}{\int_{t_a}^{t_b} |Q^*_{ij}(M,t)|\,\mathrm{d}t}$$

Comme cela a été fait avec $Q^*_{ij}(M,t)$, on définit pour chaque composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$, si elle est périodique :

– son cycle élémentaire $c[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M,t)$ noté $c^{*+(ij)}(M,t)$ qui est la restriction de $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle $I[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M)$ noté $I^{*+(ij)}(M)$ qui définit sa période ;
– sa fréquence $f[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M)$ ou sa période $T[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M)$, notées $f^{*+(ij)}(M)$ et $T^{*+(ij)}(M)$;
– le rapport de charge : $R[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M) = \frac{\min(|\min(Q^{*+}_{ij}(M,t))|,|\max(Q^{*+}_{ij}(M,t))|)}{\max(|\min(Q^{*+}_{ij}(M,t))|,|\max(Q^{*+}_{ij}(M,t))|)}$, noté $R^{*+(ij)}(M)$;
– l'indicateur de charge $I_c[Q^{*+}_{ij}(M,t)](M)$, noté $I_c^{*+(ij)}(M)$.

On note $Q^{*+}_{ij\min}(M)$, $Q^{*+}_{ij\max}(M)$ et $Q^{*+}_{ijmoy}(M) = \frac{1}{T^{*+(ij)}(M)} \int_{I^{*+(ij)}(M)} Q^{*+}_{ij}(M,t)\,\mathrm{d}t$ les valeurs respectivement minimale, maximale et moyenne de $Q^{*+}_{ij}(M,t)$.

Définition *(d2*+ – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques d'une composante active approchée de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active approchée $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ de la variable « pilote », sur l'intervalle I, au point M, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,M)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ sur l'intervalle I.

Définition *(d3*+ – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable « pilote », sur l'intervalle I, au point M, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \bigcup_{i,j} \mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,M)$.

Hypothèse (*h0*+/M*). La relation entre chaque composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,M)$ est bi-univoque.

Définition *(Problème local de fatigue approché).* On définit un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, au point M, d'un problème local de fatigue, sur l'intervalle I, au point M, si l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable « pilote » du problème local de fatigue considéré est cyclique, sur l'intervalle I, au point M. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \{(Q^{*+}_{ij}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue approché de type* $\mathrm{P^+P}(I,M)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+P}(I,M)$ (variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques sur l'intervalle I au point M) si c'est un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, au point M, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable « pilote » est périodique. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \{(c^{*+(ij)}(M,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue approché de type* $\mathrm{P^+PI}(I,M)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PI}(I,M)$ (variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Identiques sur l'intervalle I au point M) si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+P}(I,M)$ pour lequel les composantes actives approchées de la variable « pilote » sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q^{*+}_{ij}(M,t), \exists \overline{Q^{*+}_{ij}}(M) \in \mathbb{R}^* / Q^{*+}_{ij}(M,t)/\overline{Q^{*+}_{ij}}(M) = V^{*+}(M,t)$. On note $T^{*+}(M)$ la période de la fonction $V^{*+}(M,t)$ et $c^{*+}(M,t)$ son cycle élémentaire. Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \{c^{*+}(M,t), (\overline{Q^{*+}_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue approché de type* $\mathrm{P^+PM}(I,M)$ *et* $\mathrm{P^+PMI}(I,M)$*).* Le problème est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+PM}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{P^+PMI}(I,M)$) (variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones, respectivement Monotones Identiques, sur l'intervalle I au point M), si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P^+P}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{P^+PI}(I,M)$) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable « pilote » obéit à l'hypothèse (H1). Pour ces deux classes de problèmes, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,M)$ est identique à ceux des classes $\mathrm{P^+P}$ et $\mathrm{P^+PI}$.

Définition *(Problème local de fatigue approché de type* $\mathrm{P^+PML}(I,M)$ *et* $\mathrm{P^+PMLI}(I,M)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PML}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{P^+PMLI}(I,M)$) (variable Pilote à composantes actives approchées Périodiques Monotones Linéaires, respectivement Monotones Linéaires Identiques, sur l'intervalle I, au point M), si c'est un problème local de fatigue de type $\mathrm{P}^+\mathrm{PM}(I,M)$ (respectivement, $\mathrm{P}^+\mathrm{PMI}(I,M)$) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable « pilote » obéit à l'hypothèse (H2). On a :

- $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \{(T^{*+(ij)}(M), Q^{*+}_{ij\min}(M), Q^{*+}_{ij\max}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{P}^+\mathrm{PML}(I,M)$;
- $\mathbb{Q}^{*+}(I,M) = \{T^{*+}(M), V^{*+}_{\min}(M), V^{*+}_{\max}(M), (\overline{Q^{*+}_{ij}}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{P}^+\mathrm{PMLI}(I,M)$, où $T^{*+}(M)$, $V^{*+}_{\min}(M)$ et $V^{*+}_{\max}(M)$ sont respectivement la période et les bornes du cycle élémentaire commun des composantes $Q^{*+}_{ij}(M,t)$.

Il reste enfin à étendre au cas approché, les définitions données auparavant pour les problèmes de fatigue sur un domaine.

4.6. Concept de problème local de fatigue approché sur un domaine et fin de la classification basée sur des grandeurs locales

Définition *(Problème local de fatigue approché sur un domaine).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, sur le domaine ω, si quel que soit le point M de ω, on est en présence d'un problème local de fatigue approché, sur l'intervalle I, au point M, pour lequel pour toutes les composantes $Q^{*+}_{ij}(M,t)$, il existe un réel $q^{*+}_{ij}(M)$ et une même fonction $V^{*+(ij)}(\omega,t)$ tels que : $Q^{*+}_{ij}(M,t) = V^{*+(ij)}(\omega,t)q^{*+}_{ij}(M)$.

Définition *(d4*+ – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine d'une composante active approchée de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques de la composante active approchée $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ de la variable « pilote », sur l'intervalle I, sur le domaine ω, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,\omega)$ des grandeurs nécessaires à la connaissance de $Q^{*+}_{ij}(M,t)$, sur l'intervalle I, sur le domaine ω.

Définition *(d5*+ – Ensemble des paramètres locaux caractéristiques sur un domaine des composantes actives approchées de la variable « pilote »).* On appellera ensemble des paramètres locaux caractéristiques des composantes actives approchées de la variable « pilote », sur l'intervalle I, sur le domaine ω, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \bigcup_{i,j}\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,\omega)$.

Pour les problèmes locaux de fatigue (quelconques) approchés sur un domaine, on a : $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \{(q^{+*}_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (V^{+*(ij)}(\omega,t))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Hypothèse (*h0*+/ω*). La relation entre chaque composante $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ et sa description au travers de ses caractéristiques dans $\mathbb{Q}^{*+(ij)}(I,\omega)$ est bi-univoque.

Définition *(Problème local de fatigue approché sur un domaine de type* $\mathrm{P}^+\mathrm{P}(I,\omega)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P}^+\mathrm{P}(I,\omega)$ si c'est un problème local de fatigue approché, sur le domaine ω, sur l'intervalle I, pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable « pilote » (i.e., la loi horaire $V^{*+(ij)}(\omega,t)$) est périodique.

Relativement à la fonction $V^{*+(ij)}(\omega,t)$, on définit :

- son cycle élémentaire $c[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega,t)$, noté $c^{*+(ij)}(\omega,t)$, qui est sa restriction sur l'intervalle $I[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega)$ noté $I^{*+(ij)}(\omega)$ qui définit sa période ;
- sa fréquence $f[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega)$ ou sa période $T[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega)$, notées également $f^{*+(ij)}(\omega)$ et $T^{*+(ij)}(\omega)$;
- $V^{*+(ij)}_{\min}(\omega)$, $V^{*+(ij)}_{\max}(\omega)$ et $V^{*+(ij)}_{moy}(\omega) = \frac{1}{T^{*+(ij)}(\omega)}\int_{I^{*+(ij)}(\omega)} V^{*+(ij)}(\omega,t)\,\mathrm{d}t$ les valeurs respectivement minimale, maximale et moyenne de $V^{*+}_{ij}(\omega,t)$.

On étend également les définitions du rapport et de l'indicateur de charge, qui deviennent, compte tenu de la forme des composantes $Q^{*+}_{ij}(M,t)$ pour les problèmes locaux de fatigue sur un domaine :

- le rapport de charge : $R[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega) = \frac{\min(|\min(V^{*+(ij)}(\omega,t))|,|\max(V^{*+(ij)}(\omega,t))|)}{\max(|\min(V^{*+(ij)}(\omega,t))|,|\max(V^{*+(ij)}(\omega,t))|)}$, noté $R^{*+(ij)}(\omega)$;
- l'indicateur de charge $I_c[V^{*+(ij)}(\omega,t)](\omega)$, noté $I^{*+(ij)}_c(\omega)$.

Définition *(Problème local de fatigue approché sur un domaine de type* $\mathrm{P}^+\mathrm{PI}(I,\omega)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P}^+\mathrm{PI}(I,\omega)$ si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P}^+\mathrm{P}(I,\omega)$ pour lequel les composantes actives approchées de la variable « pilote » (i.e., les lois horaires $V^{*+(ij)}(\omega,t)$) sont identiques, c'est-à-dire, $\forall Q^{*+}_{ij}(M,t), \exists\overline{q^{*+}_{ij}}(\omega)\in\mathbb{R}^*/Q^{*+}_{ij}(M,t)/\overline{q^{*+}_{ij}}(\omega) = V^{*+}(\omega,t)q^{*+}_{ij}(M)$. On note $T^{*+}(\omega)$ la période de la fonction $V^{*+}(\omega,t)$ et $c^{*+}(\omega,t)$ son cycle élémentaire.

Pour ces problèmes, on a : $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega) = \{(q^{*+}_{ij}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, c^{*+}(\omega,t), (\overline{q^{*+}_{ij}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$.

Définition *(Problème local de fatigue approché sur un domaine de type* $\mathrm{P^+PM}(I,\omega)$ *et* $\mathrm{P^+PMI}(I,\omega)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PM}(I,\omega)$ (respectivement, $\mathrm{P^+PMI}(I,\omega)$) si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+P}(I,\omega)$ (respectivement, $\mathrm{P^+PI}(I,\omega)$) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable « pilote » obéit à l'hypothèse (H1). Pour ces deux classes de problèmes, l'ensemble $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)$ est identique à ceux des classes $\mathrm{P^+P}(\omega)$ et $\mathrm{P^+PI}(\omega)$.

Définition *(Problème local de fatigue approché sur un domaine de type* $\mathrm{P^+PML}(I,\omega)$ *et* $\mathrm{P^+PMLI}(I,\omega)$*).* On dira que le problème posé est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PML}(I,\omega)$ (respectivement, $\mathrm{P^+PMLI}(I,\omega)$) si c'est un problème local de fatigue approché de type $\mathrm{P^+PM}(I,\omega)$ (respectivement, $\mathrm{P^+PMI}(I,\omega)$) pour lequel l'évolution temporelle de chaque composante active approchée de la variable « pilote » obéit à l'hypothèse (H2). On a :

– $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)=\{(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, (T^{*+(ij)}(\omega), V_{\min}^{*+(ij)}(\omega), V_{\max}^{*+(ij)}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{P^+PML}(I,\omega)$;
– $\mathbb{Q}^{*+}(I,\omega)=\{(q_{ij}^{*+}(M))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}, T^{*+}(\omega), V_{\min}^{*+}(\omega), V_{\max}^{*+}(\omega), (\overline{q_{ij}^{*+}}(\omega))_{(i,j)\in\{1,2,3\}^2}\}$ pour les problèmes $\mathrm{P^+PMLI}(I,\omega)$, où $T^{*+}(\omega)$, $V_{\min}^{*+}(\omega)$ et $V_{\max}^{*+}(\omega)$ sont respectivement la période et les bornes de $V^{*+}(\omega,t)$.

5. Application et perspectives

On propose d'appliquer les concepts précédents et plus précisément d'illustrer sur un exemple une démarche possible au préalable de la réalisation effective d'un calcul de structure en fatigue :

- **Etape 1** – Décrire les sollicitations du problème et identifier la classe des problèmes de fatigue au niveau structural à laquelle il appartient ;
- **Etape 2** – Décrire les phénomènes considérés et les caractéristiques du (modèle de) comportement du matériau constitutif du domaine étudié et voir s'il est possible de déduire à quelle classe des problèmes locaux de fatigue, le problème à résoudre appartient ;
- **Etape 3** – La classe locale étant identifiée, donner des justifications pour le passage de l'écriture des lois d'évolution du modèle de leur forme quasi-statique issue de la Thermodynamique à leur forme dans un cadre de fatigue. Ces justifications sont a priori, entre autres, propres aux phénomènes considérés ;
- **Etape 4** – Ecrire la loi d'évolution dans le cadre de la fatigue ;
- **Etape 5** – Voir si le cadre d'application de la loi écrite peut être étendu, compte tenu des phénomènes considérés.

Parce que le but essentiel de cet article est de construire des classifications des problèmes de fatigue et de voir ce qu'elles peuvent induire et apporter, pour l'exemple donné ici, l'étape 4 ne sera pas traitée complètement. En outre, cette étape devrait solutionnée un processus d'identification directement dépendant du phénomène considéré, comme il en existe pour toute loi d'évolution, dont la discussion n'est pas, là encore, l'objet de cet article.

Les différentes étapes mises en évidence sont décrites à la suite dans un cas particulier.

Etape 1 – Le problème à résoudre est posé sur le domaine $D(t)=\Omega(t)\cup\partial\Omega(t)$ où $D(t)$ est un ensemble connexe par arc fermé borné de l'espace affine rapporté au repère supposé galiléen $R=(O,\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3})$. $\Omega(t)$ désigne son intérieur. $\partial\Omega(t)$ désigne sa frontière supposée régulière partitionnée en 3 morceaux $\partial\Omega_1(t)$, $\partial\Omega_2(t)$ et $\partial\Omega_3(t)$. Le domaine est supposé n'être le siège d'aucune action volumique et être à chaque instant en équilibre global. La portion $\partial\Omega_3(t)$ est libre d'effort. Sur $\partial\Omega_1(t)$ on impose une densité surfacique d'effort $\vec{F_1}(M,t)=V(t)\vec{x_1}$, sur $\partial\Omega_2(t)$ on impose une densité surfacique d'effort $\vec{F_2}(M,t)=-V(t)\vec{x_1}$. On suppose que la fonction $V(t)$ est périodique dans l'intervalle $I=[t_0,t_{\mathrm{MAX}}]$ et que les sollicitations appliquées obéissent à l'hypothèse (H2). Compte tenu de la définition de ses sollicitations, le problème posé est un problème de fatigue de type $\mathrm{SPMLI}(I)$.

Etape 2 – Le matériau constitutif du domaine étudié est un matériau composite à fibres longues et son comportement est de type élastique endommageable. Le phénomène d'endommagement modélisé est celui qui est couramment qualifié de fissuration intralaminaire. Il ne s'agit pas ici de discuter de la qualité du modèle d'endommagement, mais d'exposer une application des concepts qui ont été développés ici. Aussi, on utilise sa version la plus simple [6] d'une version plus complexe [7,8]. Ce modèle, écrit dans le cadre de la Thermodynamique des Milieux Continus, possède 2 variables d'état : la variable « pilote » ε (le 2-tenseur symétrique des déformations) et une variable d'état interne scalaire α caractéristique de la densité d'endommagement. Les variables associées sont respectivement σ et A. On donne à la suite, le potentiel d'état $\varphi(\varepsilon,\alpha)$, les lois d'état et la loi d'évolution de la variable α déduite d'un critère $c(\varepsilon,\alpha)$ (dont $A_c(\alpha)$ défini le seuil) et de la condition classique de cohérence. Cette loi d'évolution est applicable dans un cadre quasi-statique.

$$\varphi(\varepsilon,\alpha)=\frac{1}{2}C_{ijkh}(\alpha)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}\sigma_{ij}=C_{ijkh}(\alpha)\varepsilon_{kh}\\ A=\frac{1}{2}C_{ijkh}(\alpha)'\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kh}\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}c(\varepsilon,\alpha)=A_c(\alpha)-A=0\\ \mathrm{d}c(\varepsilon,\alpha)=0\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}\alpha=\frac{\frac{\partial^2\varphi(\varepsilon,\alpha)}{\partial\alpha\partial\varepsilon}\,\mathrm{d}\varepsilon}{\frac{\partial A_c(\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{\partial^2\varphi(\varepsilon,\alpha)}{\partial\alpha^2}}=\frac{C_{ijkh}(\alpha)'\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{kh}}{\frac{\partial A_c(\alpha)}{\partial\alpha}-\frac{1}{2}C_{ijkh}(\alpha)''\varepsilon_{ij}(M,t)\varepsilon_{kh}}\tag{4}$$

Le comportement du matériau étant élastique endommageable, si le problème structural est de type SPMLI(I), en raison de la linéarité des opérateurs présents dans sa formulation (pour un endommagement donné), le problème local de fatigue induit est un problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I, Ω). On peut signaler également que toutes les composantes du 2-tenseur ε sont présentes dans la loi d'évolution : il n'est donc pas nécessaire de distinguer les composantes actives de la variable « pilote » de celles de la variable « pilote ».

Etape 3 – Dans le cadre de la fatigue, on fait l'hypothèse que la variable d'endommagement est strictement croissante avec le nombre de cycles et ceci quelle que soit la valeur du champ de déformation locale (si l'on veut faire un parallèle avec les matériaux métalliques, on pourrait dire que la limite d'endurance est supposée nulle). Ainsi, dans ce cadre, on suppose que le seuil $A_c(\alpha)$ est nul. Egalement, puisque l'on est en présence d'un problème local de fatigue sur un domaine de type PPMLI(I, Ω), alors $\forall \varepsilon_{ij}(M,t)$, $\exists \overline{e_{ij}}(\Omega) \in \mathbb{R}^*/\varepsilon_{ij}(M,t)/\overline{e_{ij}}(\Omega) = V(\Omega,t)e_{ij}(M)$ (sans sommation sur les indices muets). En posant $\tilde{e_{ij}}(M) = \overline{e_{ij}}(\Omega)e_{ij}(M)$, la loi d'évolution (Éq. (4)) devient :

$$\mathrm{d}\alpha(M,t) = \frac{C_{ijkh}(\alpha)'\tilde{e_{ij}}(M)\tilde{e_{kh}}(M)\,\mathrm{d}V(\Omega,t)}{-\frac{1}{2}C_{ijkh}(\alpha)''\tilde{e_{ij}}(M)\tilde{e_{kh}}(M)V(\Omega,t)} \tag{5}$$

Egalement, on a :

$$\mathbb{Q}(I,\Omega) = \left\{\left(\tilde{e_{ij}}(M)\right)_{i,j=1,2,3}, T(\Omega), V_{\min}(\Omega), V_{\max}(\Omega)\right\}$$

ou de manière équivalente :

$$\mathbb{Q}(I,\Omega) = \left\{\left(\tilde{e_{ij}}(M)\right)_{i,j=1,2,3}, T(\Omega), V_{\min}(\Omega) \text{ ou } V_{\max}(\Omega), R\big[V(\Omega,t)\big](\Omega), I_c\big[V(\Omega,t)\big](\Omega)\right\}$$

Etape 4 – Afin d'établir la forme finale de la loi d'évolution de la variable α dans le cadre de la fatigue, il faudra :

- faire le changement de variables : $t = N \times T(\Omega) + t'$ où N désigne le nombre de cycles et t' la variable temporelle dans l'intervalle de temps qui définit le cycle élémentaire de $V(\Omega,t)$;
- faire apparaître le terme dN à partir du terme d$V(\Omega,t)$;
- réaliser l'identification de la loi en incluant les éléments de $\mathbb{Q}(I,\Omega)$ qui ne sont pas encore explicitement présents dans la loi donnée par l'Éq. (5), c'est-à-dire ici soit ($V_{\min}(\Omega)$, $V_{\max}(\Omega)$) soit ($V_{\min}(\Omega)$ ou $V_{\max}(\Omega)$, $R[V(\Omega,t)]$, $I_c[V(\Omega,t)]$) (en omettant $T(\Omega)$ si l'on estime que le phénomène d'endommagement est insensible aux effets de vitesses).

La forme finale de la loi de fatigue pourra alors être :

$$\mathrm{d}\alpha(M,t) = \frac{C_{ijkh}(\alpha)'\tilde{e_{ij}}(M)\tilde{e_{kh}}(M)}{-\frac{1}{2}C_{ijkh}(\alpha)''\tilde{e_{ij}}(M)\tilde{e_{kh}}(M)} f\left(V_{\min}(\Omega), V_{\max}(\Omega)\right)\mathrm{d}N \tag{6}$$

Cette loi de fatigue est locale et justifiée à partir de sa forme locale quasi-statique issue de la Thermodynamique. Elle prend en compte les états locaux multiaxiaux de déformations sans hypothèse particulière. Elle pourra donc être utilisée dans un calcul de structures en fatigue de manière aussi générale que son homologue quasi-statique l'est dans un calcul de structures quasi-statique.

Etape 5 – Si l'on se souvient que le phénomène considéré est un endommagement supposé insensible aux effets de vitesse, il est aisé de conclure que finalement, la loi écrite est applicable non seulement à tous les problèmes de type SPMLI(I) mais également à tous les problèmes de type SPMI(I) et ceci sans même être forcé de conserver une fréquence d'apparition identique des extrémums afin de ne pas modifier le compteur de cycles N (puisque le phénomène est insensible aux effets de vitesse donc de fréquence). Les problèmes locaux de fatigue qui peuvent être traités sont alors non seulement les problèmes PPMLI(I, Ω) mais également ceux plus généraux PPMI(I, Ω).

6. Conclusion

Le simple vocable de fatigue associé à un problème de calcul de structures peut être évocateur d'une multitude de choses. C'est dans le souci de clarifier ce concept et les problèmes qui y sont associés que nous en avons construit une classification d'abord à l'échelle structurale et ensuite à l'échelle locale. A chacune de ces échelles, les classes vont de la plus complexe à la plus simple. Un indicateur de cette simplicité peut être le nombre d'éléments contenus dans les ensembles caractéristiques des sollicitations. Mais l'objectif de ces classifications est aussi de définir un cadre susceptible d'aider à la justification d'une loi locale de fatigue à partir de son homologue quasi-statique issue de la Thermodynamique, et finalement de construire une approche locale de la fatigue pour la Mécanique de l'Endommagement.

Pourtant, il est important d'insister sur le fait que nous ne nous posons pas ici la question de savoir si, pour un phénomène identifié, sa loi de fatigue doit être écrite dans le cadre de la Mécanique de la Rupture (ou de son approche locale) ou bien dans le cadre de la Mécanique des Milieux Continus (ou de ses dérivés, comme la Mécanique de l'Endommagement). Il est admis, que pour les matériaux métalliques, en général, le phénomène de fatigue est essentiellement un phénomène de surface. L'utilisation d'une approche locale de la Mécanique de la Rupture est donc une bonne voie de modélisation. Pour les matériaux composites, en revanche, les défauts apparaissant sous des sollicitations de fatigue sont plus généralement volumiques (ruptures de fibre, microfissuration). L'emploi de la Mécanique de l'Endommagement est donc dans ce cas une bonne voie de modélisation car il n'est en effet pas envisageable de modéliser la propagation cyclique de chaque microfissure au sein du composite. Bien que cette question soit importante, elle doit être solutionnée au préalable d'utiliser les classifications que nous avons faites. Si nous devions conclure sur cette question « matériaux », au regard des remarques précédentes, on pourrait alors avancer (mais de manière néanmoins non exhaustive) que les concepts développés ici sont destinés préférentiellement aux matériaux composites plutôt qu'aux matériaux métalliques.

Pour notre part, nous avons souhaité étudier et justifier la structure des équations locales de la forme (Éq. (2)) de la manière la plus indépendante possible du phénomène considéré : construire ces classifications nous a semblé une solution envisageable pour cela. Une application a permis de voir la pertinence de ce choix dans un cas de problème simple et pour un phénomène donné.

Références

[1] C. Bathias, An engineering point of view about fatigue of polymer matrix composite materials, International Journal of Fatigue 28 (2006) 1064–1099.
[2] G. Feng, M.D. Gilchrist, J. Kinloch, F.L. Matthews, Development of a method for predicting the fatigue life of CFRP components, in : S. Degallaix, C. Bathias, R. Fougères (Eds.), International Conference on Fatigue of Composites, 1997, pp. 407–414.
[3] J. Li, Z.P. Zhang, Q. Sun, C. W Li, Y.J. Qiao, A new multiaxial fatigue damage model for various metallic materials under the combination of tension and torsion loadings, International Journal of Fatigue 31 (2009) 776–781.
[4] K.A. Miner, Cumulative damage in fatigue, Journal of Applied Mechanics 67 (1945) A159–A164.
[5] A. Thionnet, J. Renard, Laminated composites under fatigue loading. A damage development law for transverse cracking, Composites Science and Technology 52 (1994) 173–181.
[6] A. Thionnet, J. Renard, Meso-macro approach to transverse cracking in laminated composites using Talreja's model, Composites Engineering 3 (1993) 851–871.
[7] A. Thionnet, J. Renard, Modeling unilateral damage effect in strongly anisotropic materials by the introduction of the loading mode in damage mechanics, International Journal of Solids and Structures 36 (1999) 4269–4287.
[8] A. Thionnet, J. Renard, Compression behaviour for composites by a definition of the loading mode in damage mechanics, Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série IIb 321 (1995) 533–540.