



Étude numérique de la diffusion turbulente d'une turbulence homogène stablement stratifiée à l'aide d'une analyse linéaire

Numerical study of turbulent diffusion in homogeneous stably stratified turbulence using linear analysis

Abdallah Jaouabi*, Taieb Lili

Laboratoire de mécanique des fluides, Faculté des Sciences de Tunis, 26, rue Tabari Ezzahra, Tunis 2034, Tunisie

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 1^{er} novembre 2010

Accepté après révision le 18 mai 2011

Disponible sur Internet le 16 juillet 2011

Mots-clés :

Turbulence

Turbulence homogène

Diffusion turbulente

Stratification stable

Hypothèse de Corrsin

Keywords:

Turbulence

Homogeneous turbulence

Turbulent diffusion

Stable stratification

Corrsin hypothesis

R É S U M É

Dans cet article, nous étudions numériquement la diffusion turbulente dans le cas d'une turbulence homogène stablement stratifiée. Cette étude est basée sur une analyse linéaire dans l'espace spectral. Pour exprimer les corrélations doubles de vitesses lagrangiennes à l'aide des corrélations doubles eulériennes, nous utilisons l'hypothèse de Corrsin et nous calculons alors les composantes du tenseur des déplacements quadratiques moyens. Nous commençons par écrire les équations linéaires de base gouvernant l'évolution des spectres de corrélations doubles puis nous présentons l'hypothèse de Corrsin comme modèle de diffusion turbulente. Par la suite, nous décrivons la méthode numérique utilisée et analysons les résultats numériques obtenus. Manifestement, l'hypothèse de Corrsin permet de retrouver le bon comportement, à des temps grands, de la diffusion horizontale et améliore la prédiction de la diffusion verticale. A titre d'application du code numérique mis au point, nous étudions l'influence du nombre de Prandtl sur la diffusion verticale qui se traduit par une accentuation de la suppression de la diffusion verticale lorsque le nombre de Prandtl (inférieur à 1) diminue.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

In this Note, we study numerically turbulent diffusion in the case of homogeneous stably stratified turbulence. This study is based on a linear analysis in spectral space. To express the Lagrangian velocity correlations using Eulerian correlations, we adapt the Corrsin assumption and then we calculate the tensor components of the mean square displacement. We begin by writing the basic linear equations governing the evolution of the spectra of double correlations then we present the Corrsin hypothesis as a model of turbulent diffusion. Subsequently, we describe the numerical method used and analyze the numerical results. Clearly, the Corrsin assumption can give the proper behavior, at large times, of the horizontal diffusion and improves the prediction of vertical diffusion. As an application of the numerical code elaborated, we study the influence of Prandtl number on the vertical diffusion which results in an accentuation of the suppression of vertical diffusion when the Prandtl number (less than 1) diminishes.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : jaouabia@yahoo.fr (A. Jaouabi).

1. Introduction

Différentes études ont été consacrées dans la littérature à la diffusion turbulente et plus précisément à la suppression de la dispersion dans la direction verticale en présence d'une turbulence homogène sous l'action d'une forte stratification stable. Parmi ces études, nous retenons essentiellement celles de Kaneda et Ishida (2000) [1], Nicolleau et Vassilicos (2000) [2], Cambon, Godeferd, Nicolleau et Vassilicos (2004) [3], Liechtenstein, Godeferd et Cambon (2006) [4], Iida, Tsujimura et Nagano (2005) [5] et Nicolleau et Vassilicos (2006) [6]. Comme l'indiquent Kaneda et Ishida [1], une forte stratification stable affecte considérablement les processus de transfert dans différents écoulements géophysiques et industriels et c'est un fait bien établi que le processus de diffusion subit une suppression notable dans la direction verticale.

Dans le cadre d'une turbulence homogène stablement stratifiée, Kaneda et Ishida ont présenté les solutions explicites des équations linéarisées gouvernant l'évolution d'une telle turbulence dans l'espace spectral. Dans le cas d'une stratification stable et d'un nombre de Prandtl Pr égal à 1, ces solutions se présentent sous une forme notablement plus simple. De telles solutions permettent d'exprimer notamment les corrélations doubles de vitesses et de température en deux points. Il importe de préciser que l'approximation linéaire est justifiée lorsque le nombre de Froude est suffisamment petit (ou lorsque la fréquence N de Brunt-Väisälä est suffisamment grande); dans ces conditions, les effets non linéaires sont petits pour des temps t petits. La validité de ces solutions linéaires a été examinée par Kaneda et Ishida par des comparaisons à des résultats de DNS. Il est important de rappeler que les covariances des déplacements d'une particule s'expriment à l'aide de corrélations de vitesses lagrangiennes. Des études intensives aussi bien théoriques qu'expérimentales ont été consacrées à de telles corrélations. Kaneda et Ishida [1] présentent alors un modèle d'approximation des corrélations de vitesses lagrangiennes se basant sur l'approximation de Corrsin. En fait, dans leur étude numérique sur la suppression de la diffusion verticale, ces auteurs admettent, pour simplifier, l'équivalence entre les corrélations des vitesses (à deux instants) lagrangiennes et eulériennes; ceci correspondant à une hypothèse classique appelée hypothèse simplifiée de Corrsin. Ils expriment alors la composante Δ_{33} du tenseur de déplacement, composante caractéristique de la diffusion verticale, et montrent qu'elle comporte un terme constant (indépendant du temps) et un terme représentant une somme d'oscillations amorties distinctes qui décroissent dans le temps à cause du mélange de phases. Le terme constant, dans le cas d'une turbulence homogène initiale isotrope d'énergie potentielle nulle, vaut $\frac{E_0}{2N^2}$ où E_0 est l'énergie cinétique initiale. Toutefois, la mise en œuvre de telles solutions dans le cas général où le nombre de Prandtl est différent de 1, en vue du calcul des corrélations des vitesses par intégration sur l'espace spectral, peut présenter des difficultés numériques dues au fait qu'un coefficient α (Kaneda et Ishida [1, p. 318]) puisse devenir complexe au cours du calcul. Nicolleau et Vassilicos [2] ont étudié la diffusion turbulente à une et deux particules en écoulement homogène stablement stratifié correspondant à des grands nombres de Reynolds et à de faibles valeurs du nombre de Froude. Un modèle lagrangien de diffusion a été développé à l'aide d'une simulation cinématique lagrangienne (Kinematic Simulation, KS) s'appuyant sur les solutions linéaires des équations eulériennes (sous l'hypothèse de Boussinesq), valables pour des faibles valeurs du nombre de Froude. Cette étude effectuée sur la diffusion turbulente par Nicolleau et Vassilicos a été reprise par Nicolleau, Yu et Vassilicos [6] pour une turbulence stablement stratifiée et pour une turbulence en rotation pure. Dans cette publication, les auteurs font une synthèse des principaux résultats considérés comme acquis dans la littérature et qui se présentent comme suit :

- La diffusion (à une particule) dans le plan horizontal, représentée par les composantes Δ_{11} et Δ_{22} du tenseur de déplacement, n'est pas altérée la stratification. Ces composantes suivent d'abord un régime balistique caractérisé par une loi en t^2 suivi par une diffusion de type brownien se traduisant par une loi en t pour les grandes valeurs de t ,
- la diffusion verticale représentée par la composante Δ_{33} du tenseur de déplacement, pour des valeurs moyennes et grandes de t , présente un caractère oscillant, autour d'un plateau à valeur constante; ceci rejoint le résultat obtenu par Kaneda et Ishida [1].

Cambon, Godeferd, Nicolleau et Vassilicos [3] ont entrepris l'étude de la diffusion turbulente pour des écoulements en rotation rapide avec ou sans stratification stable. Les auteurs ont notamment examiné la validité de l'hypothèse simplifiée de Corrsin qui se traduit par l'équivalence entre corrélations eulériennes et lagrangiennes. D'après leur analyse, les corrélations « verticales » sont conformes à cette hypothèse; mais ceci n'est pas le cas des corrélations « horizontales ».

L'objectif de cette étude est de calculer, dans le cadre d'une analyse linéaire, les composantes Δ_{ij} du tenseur des déplacements quadratiques moyens d'une turbulence homogène stablement stratifiée en utilisant l'hypothèse de Corrsin permettant d'exprimer les corrélations doubles de vitesses lagrangiennes à l'aide des corrélations doubles des vitesses eulériennes. Après avoir rappelé les équations linéaires de base gouvernant l'évolution des fluctuations de vitesses et de température dans l'espace spectral, nous écrivons les équations d'évolution des spectres de corrélations doubles en deux points. La résolution numérique du système différentiel ainsi obtenu permet de déterminer, selon l'hypothèse de Corrsin et par un processus itératif, les composantes du tenseur des déplacements moyens; nous analysons par la suite les améliorations apportées par l'hypothèse de Corrsin sur la diffusion horizontale et verticale. Enfin, et à titre d'application, nous analysons l'effet du nombre de Prandtl sur la diffusion verticale.

2. Équations linéaires de base

On considère un écoulement turbulent homogène, présentant une stratification stable selon la direction vertical (axe x_3). Les équations d'évolution des fluctuations de vitesses $u_i(\vec{k}, t)$ et de température $\theta(\vec{k}, t)$ se présentent dans l'espace spectral comme suit [7] :

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i(\vec{k}, t) = -\nu k^2 u_i(\vec{k}, t) - \left[\delta_{i3} - \frac{k_i k_3}{k^2} \right] \alpha g \theta(\vec{k}, t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta(\vec{k}, t) = -\chi k^2 \theta(\vec{k}, t) - \frac{N^2}{\alpha g} u_3(\vec{k}, t) \quad (2)$$

ν et χ sont respectivement la viscosité cinématique et la diffusivité thermique. g est l'accélération de pesanteur, α est le taux d'expansion volumique et N est la fréquence de Brunt-Väisälä : $N^2 = \alpha g \frac{\partial T}{\partial z}$ où T est la température de référence. Pour atteindre notre objectif, nous avons pris le choix de résoudre numériquement les équations linearisées des corrélations à deux instants t et t' . En effet, nous nous proposons d'étendre cette étude à des situations où des solutions linéaires explicites ne sont pas disponibles. Pour décrire complètement ce type de turbulence, il importe de définir les spectres de corrélations suivants :

$$e_{ij}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} [(u_i(\vec{k}, t) u_j^*(\vec{k}, t')) + (u_i^*(\vec{k}, t) u_j(\vec{k}, t'))] \quad (3)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} [(u_i(\vec{k}, t) \theta^*(\vec{k}, t')) + (u_i^*(\vec{k}, t) \theta(\vec{k}, t'))] \quad (4)$$

$$e_{\theta i}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} [(\theta(\vec{k}, t) u_i^*(\vec{k}, t')) + (\theta^*(\vec{k}, t) u_i(\vec{k}, t'))] \quad (5)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, t, t') = \frac{1}{2} [(\theta(\vec{k}, t) \theta^*(\vec{k}, t')) + (\theta^*(\vec{k}, t) \theta(\vec{k}, t'))] \quad (6)$$

Ces définitions conduisent aux propriétés de symétrie évidentes :

$$e_{ij}(\vec{k}, t', t) = e_{ji}(\vec{k}, t, t') \quad (7)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, t', t) = e_{\theta i}(\vec{k}, t, t') \quad (8)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, t', t) = e_{\theta\theta}(\vec{k}, t, t') \quad (9)$$

Ces propriétés permettent justement de préciser les conditions initiales à $t = 0$ pour t' fixé :

$$e_{ij}(\vec{k}, t', 0) = e_{ji}(\vec{k}, 0, t') \quad (10)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, t', 0) = e_{\theta i}(\vec{k}, 0, t') \quad (11)$$

$$e_{\theta i}(\vec{k}, t', 0) = e_{i\theta}(\vec{k}, 0, t') \quad (12)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, t', 0) = e_{\theta\theta}(\vec{k}, 0, t') \quad (13)$$

Il est important à ce stade de déterminer le nombre de spectres indépendants compte tenu des équations de contrainte imposées par l'équation de continuité $k_i u_i = 0$ qui se traduisent par $k_i e_{ij} = 0$ et $k_j e_{ij} = 0$. Il est facile de montrer, qu'en définitive, l'équation de continuité impose 5 conditions indépendantes aux spectres e_{ij} . Il ya donc 4 spectres indépendants e_{ij} : on choisit à priori comme spectres indépendants $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}$. Les autres composantes du tenseur e_{ij} peuvent être déduites des conditions imposées par l'équation de continuité. De même, l'équation de continuité impose aux spectres de flux $e_{i\theta}$ et $e_{\theta i}$ les deux conditions $k_i e_{i\theta} = 0$ et $k_i e_{\theta i} = 0$. On peut alors faire le choix des spectres $e_{1\theta}, e_{2\theta}, e_{\theta 1}, e_{\theta 2}$ comme spectres indépendants parmi les spectres $e_{i\theta}$ et $e_{\theta i}$.

En conclusion, nous avons écrit le système différentiel des équations d'évolution des neuf spectres $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, e_{1\theta}, e_{2\theta}, e_{\theta 1}, e_{\theta 2}$ et $e_{\theta\theta}$.

Nous prenons aussi l'option d'écrire ces équations d'évolution sous la forme d'équations sans dimension qui se présentent comme suit (pour simplifier, nous gardons les mêmes notations après le passage aux grandeurs sans dimensions) :

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{11} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{11} - \frac{k_1 k_3}{k^2} e_{\theta 1} \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{22} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{22} - \frac{k_2 k_3}{k^2} e_{\theta 2} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{12} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{12} - \frac{k_1 k_3}{k^2} e_{\theta 2} \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{21} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{21} - \frac{k_2 k_3}{k^2} e_{\theta 1} \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{\theta 1} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}} k^2 e_{\theta 1} - \frac{1}{\text{Fr}^2} e_{31} \tag{18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{\theta 2} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}} k^2 e_{\theta 2} - \frac{1}{\text{Fr}^2} e_{32} \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{1\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{1\theta} - \frac{k_1 k_3}{k^2} e_{\theta\theta} \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{2\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} k^2 e_{2\theta} - \frac{k_2 k_3}{k^2} e_{\theta\theta} \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{\theta\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\text{Pr}} k^2 e_{\theta\theta} - \frac{1}{\text{Fr}^2} e_{3\theta} \tag{22}$$

Ces équations font intervenir le nombre de Prandtl $\text{Pr} = \frac{\nu}{\chi}$, le nombre de Froude $\text{Fr} = \frac{u_0 k_p}{N}$ et le nombre de Reynolds $\text{Re} = \frac{u_0}{\nu k_p}$. u_0 est une échelle de vitesse de référence $u_0 = \sqrt{2 \int_0^\infty E(k) dk}$. $E(k)$ est le spectre tridimensionnel initial d'énergie cinétique. k_p est le nombre d'onde correspondant au maximum de $E_0(k)$.

3. Approximation pour la diffusion turbulente – hypothèse de Corrsin

Notons $\vec{x}(s)$ et $\vec{v}(s)$ les vecteurs positions et les vitesses lagrangiennes d'une particule fluide à l'instant s . Durant l'intervalle de temps de t' à t , on définit le déplacement de la particule :

$$\Delta \vec{x}(t', t) \equiv \vec{x}(t) - \vec{x}(t') = \int_{t'}^t \vec{v}(s) ds \tag{23}$$

et les covariances du déplacement :

$$\Delta_{ij}(t', t) \equiv \langle \Delta x_i(t', t) \Delta x_j(t', t) \rangle \tag{24}$$

La relation bien connue de Taylor [3] permet d'exprimer $\Delta_{ij}(t', t)$ en fonction des corrélations de vitesses lagrangiennes $\langle v_i(s) v_j(s') \rangle$:

$$\Delta_{ij}(t', t) = \int_{t'}^t ds \int_{t'}^t ds' \langle v_i(s) v_j(s') \rangle \tag{25}$$

$\langle v_i(s) v_j(s') \rangle$ sont a priori distinctes des corrélations de vitesses eulériennes plus facilement accessibles à travers l'expérience ou la simulation numérique. Dans la littérature, un grand nombre d'études analysent la possibilité de déduire les corrélations de vitesses lagrangiennes à partir de celles des vitesses eulériennes (il s'agit là du problème central de la diffusion turbulente). Une conjecture bien connue dans la littérature est celle introduite par Corrsin [1] qui se traduit dans le cas d'une turbulence homogène par :

$$\langle v_i(s) v_j(s') \rangle = \int d\vec{k} e_{ij}(\vec{k}, s', s) \langle \exp(-i\vec{k} \cdot (\vec{x}(s') - \vec{x}(s))) \rangle \tag{26}$$

Dans cette relation, le terme en exponentielle peut être explicité en admettant que $\vec{v}(t)$ suit statistiquement une loi normale (Saffman [8], Taylor et McNamara [9], Lundgren et Pointin [10], Kaneda et Ishida [1]). Ceci conduit finalement à l'expression

$$\langle v_i(s) v_j(s') \rangle = \int d\vec{k} e_{ij}(\vec{k}, s', s) \exp\left(-\frac{1}{2} k_m \Delta_{mn}(s', s) k_n\right) \tag{27}$$

qui représentera, dans cet article, « l'hypothèse de Corrsin » et qui permet le calcul des corrélations de vitesses lagrangiennes et par la suite des covariances du déplacement $\Delta_{ij}(t', t)$. Si dans l'expression précédente, le terme en exponentielle est remplacé par l'unité, on obtient :

$$\langle v_i(s) v_j(s') \rangle = \int d\vec{k} e_{ij}(k, s', s) = \langle u_i(\vec{x}, s) u_j(\vec{x}, s') \rangle \tag{28}$$

Ceci correspond à « l'hypothèse simplifiée de Corrsin » qui se traduit par l'équivalence entre les corrélations des vitesses lagrangiennes et celles des vitesses eulériennes.

4. Méthode de résolution numérique

La méthode générale de résolution des 9 équations différentielles (14)–(22) consiste à utiliser l'approximation :

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} f''(t) \quad (29)$$

précise en second ordre en Δt , les dérivées secondes $f''(t)$ ayant été auparavant calculées directement en prenant la dérivées par rapport au temps des différents termes des équations (14)–(22). Pour les spectres de corrélations doubles, les conditions initiales à $t' = 0$ et $t = 0$ correspondent à une turbulence isotrope sans énergie potentielle :

$$e_{ij}(\vec{k}, 0, 0) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] \quad (30)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, 0, 0) = 0 \quad (31)$$

$$e_{\theta i}(\vec{k}, 0, 0) = 0 \quad (32)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, 0, 0) = 0 \quad (33)$$

On a de plus à $t = 0$:

$$e_{ij}(\vec{k}, t', 0) = e_{ji}(\vec{k}, 0, t') \quad (34)$$

$$e_{i\theta}(\vec{k}, t', 0) = e_{\theta i}(\vec{k}, 0, t') \quad (35)$$

$$e_{\theta i}(\vec{k}, t', 0) = e_{i\theta}(\vec{k}, 0, t') \quad (36)$$

$$e_{\theta\theta}(\vec{k}, t', 0) = e_{\theta\theta}(\vec{k}, 0, t') \quad (37)$$

En fait, la méthode numérique comporte deux étapes. Durant la première étape, pour toute valeur de t' appartenant à un intervalle $[0, T]$, on intègre, par rapport à t , le système des équations différentielles (14)–(22) pour t appartenant à l'intervalle $[0, T]$. Les spectres ainsi obtenus sont stockés en mémoire. Dans une deuxième étape, un processus itératif permet le calcul de $\Delta_{ij}(t', t)$ (quelques itérations suffisent pour en assurer la convergence). A l'issue de ce processus, on détermine $\Delta_{ij}(0, t)$.

5. Présentation et analyse des résultats sur la diffusion turbulente

5.1. Comparaison aux résultats de Kaneda et Ishida concernant la diffusion « verticale » (évolution de $\Delta_{33}(0, t)$)

Kaneda et Ishida [1] ont présenté des résultats de simulation numérique directe (DNS) et de RDT (avec l'hypothèse simplifiée de Corrsin) pour un nombre de Reynolds $Re = 52$ et pour trois nombres de Froude, $Fr = 1,85; 0,59; 0,19$ correspondant respectivement à $N^2 = 10; 100; 1000$ et à $Pr = 1$ ($\nu = 0,005$).

La Fig. 1 permet de comparer nos résultats à ceux de Kaneda et Ishida. Précisons d'abord que pour t petit, nos résultats de simulation numérique indiquent que $\Delta_{33}(0, t)$ a un comportement classique en t^2 que l'on retienne l'hypothèse de Corrsin ou l'hypothèse de Corrsin simplifiée (Fig. 1a).

Pour des valeurs de t plus grandes ($u_0 k_p t > 0,2$), nos résultats confirment l'existence d'un plateau exprimant la suppression bien connue de la diffusion « verticale ». Nous présentons sur la Fig. 1a nos résultats prenant au compte l'hypothèse de Corrsin et l'hypothèse simplifiée de Corrsin. Les résultats obtenus avec l'hypothèse simplifiée de Corrsin sont en accord avec les résultats de RDT de Kaneda et Ishida pour les 3 valeurs du nombre de Froude $Fr = 1,85; 0,59; 0,19$; ceci constitue une validation de notre code de calcul résolvant le système différentiel des équations linéaires d'évolution des spectres de corrélations doubles en deux points. Si on considère maintenant les résultats obtenus avec l'hypothèse de Corrsin (27), ces résultats montrent que :

- pour $Fr = 0,19$ ($N^2 = 1000$), les valeurs de $\Delta_{33}(0, t)$ obtenus avec l'hypothèse de Corrsin et l'hypothèse de Corrsin simplifiée sont proches et en accord avec les résultats de RDT et de DNS de Kaneda et Ishida, eux même très proches ;
- pour $Fr = 0,59$ ($N^2 = 100$) les résultats obtenus avec l'hypothèse de Corrsin sont en bon accord avec les résultats de DNS de Kaneda et Ishida ; les résultats obtenus à l'aide de l'hypothèse de Corrsin simplifiée, distincts de ceux issus de l'hypothèse de Corrsin, sont en accord avec les résultats de RDT de Kaneda et Ishida. Ce résultat important tend à suggérer que l'écart observé entre les valeurs de $\Delta_{33}(0, t)$ issues de résultats de DNS et de RDT de Kaneda et Ishida [1] est dû non pas aux effets non linéaires mais au fait que les corrélations doubles de vitesses lagrangiennes sont assimilées à celles correspondant aux vitesses eulériennes dans le calcul du tenseur Δ_{ij} ;
- pour $Fr = 1,85$ ($N^2 = 10$), on ne peut tirer d'information des résultats obtenus par Kaneda et Ishida ; en effet, ces résultats ne sont pas poussés à des temps suffisamment grands.

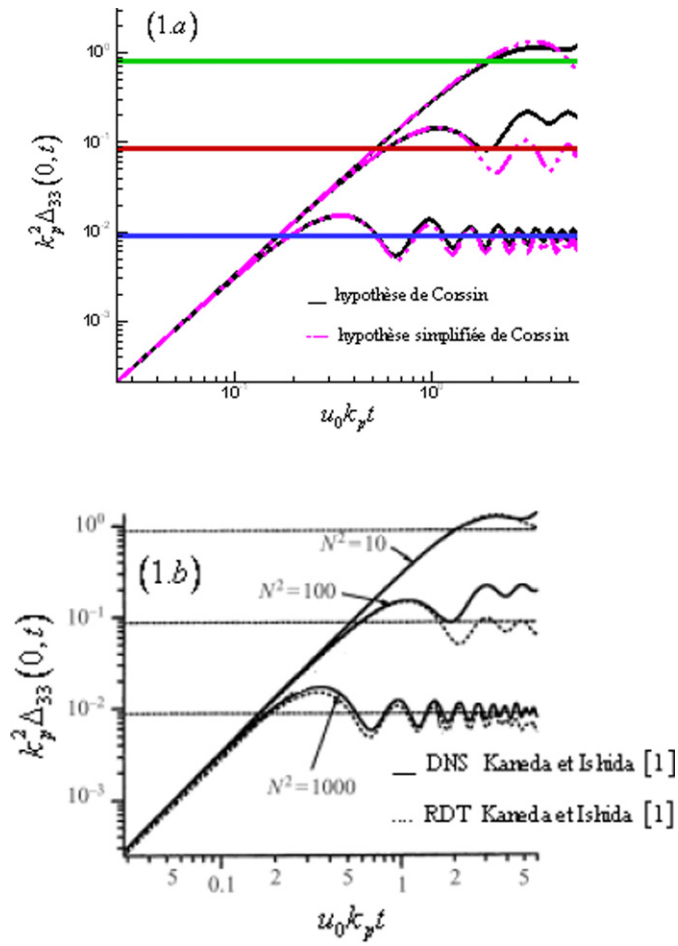


Fig. 1. Evolution de $\Delta_{33}(0, t)$.

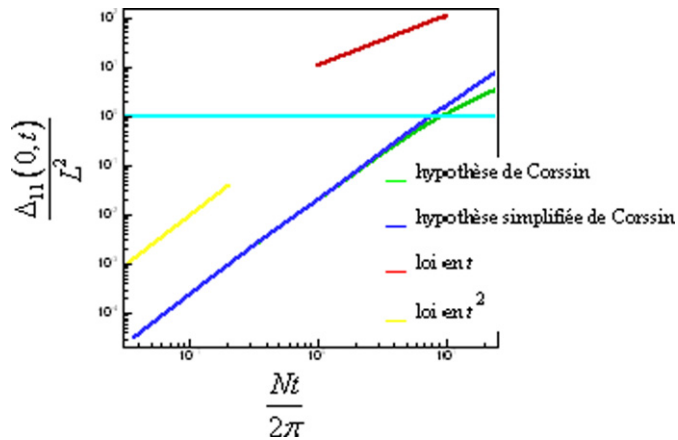


Fig. 2. Evolution de $\Delta_{11}(0, t)/L^2$.

5.2. Résultat relatifs à la diffusion horizontale concernant l'évolution de $\Delta_{11}(0, t)$

Avec les données de Kaneda ($Re = 52$; $Pr = 1$; $Fr = 1,85$; $0,59$; $0,19$), nous avons tracé l'évolution de $\frac{\Delta_{11}(0, t)}{L^2}$ ($\Delta_{22}(0, t) = \Delta_{11}(0, t)$) en fonction de $\frac{Nt}{2\pi}$ (Fig. 2). L est ici l'échelle intégrale [2]

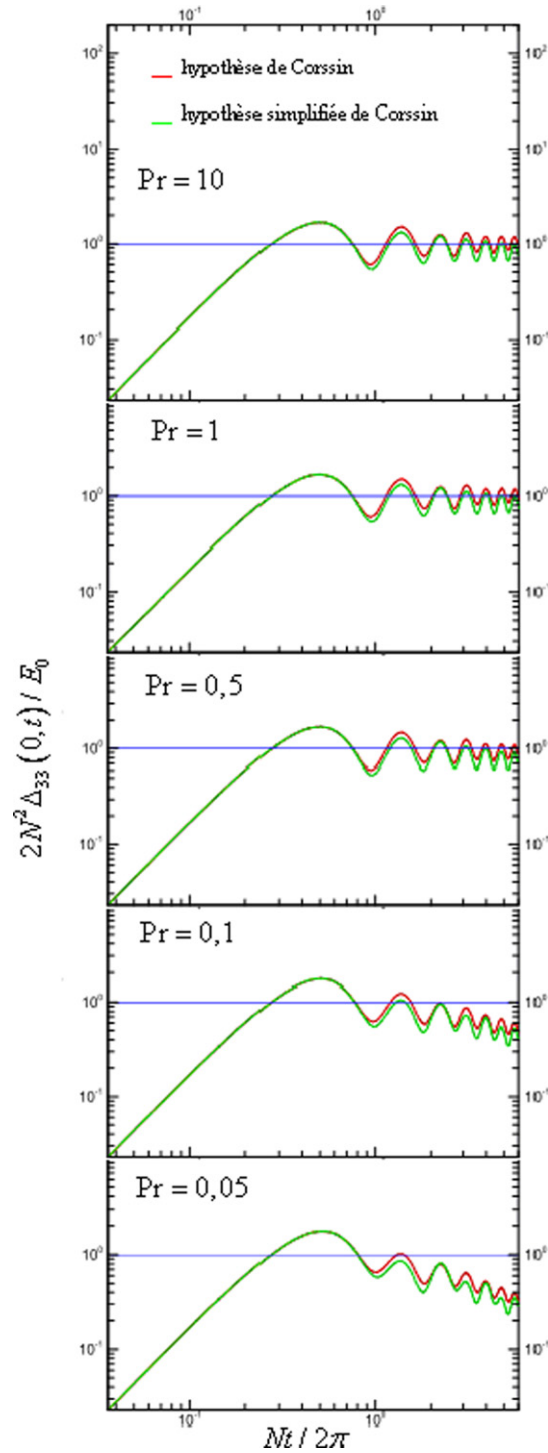


Fig. 3. Effet du nombre de Prandtl sur la diffusion verticale.

$$L = \frac{3\pi}{4} \frac{\int k^{-1} E(k) dk}{\int E(k) dk}$$

Les courbes d'évolution de $\frac{\Delta_{11}(0,t)}{L^2}$ déduits de l'hypothèse de Corrsin et de l'hypothèse simplifiée de Corrsin suivent bien la loi balistique en t^2 pour t petit. Pour t grand, seule l'hypothèse de Corrsin donne lieu à une loi en t bien admise dans

la littérature. Ainsi, l'hypothèse de Corrsin permet de retrouver, pour les grandes valeurs de t , le bon comportement de $\Delta_{11}(0, t)$.

6. Effet du nombre de Prandtl sur la diffusion verticale

Précisons d'abord que le nombre de Prandtl n'a pas d'effet sur la diffusion horizontale.

Pour apprécier l'effet du nombre de Prandtl sur la diffusion verticale, nous considérons l'application de Kaneda et Ishida correspondant à la valeur la plus petite de Fr , soit $Fr = 0,19$ ($N^2 = 1000$). Nous avons déjà indiqué que pour $Pr = 1$, on trouve, dans le cas où $Fr = 0,19$, peu d'écart entre RDT et DNS de Kaneda et Ishida et peu d'écart entre nos résultats de RDT correspondant à l'hypothèse de Corrsin et l'hypothèse simplifiée de Corrsin. Pour une analyse claire de l'effet du nombre de Prandtl, nous retenons cet exemple d'application : $Re = 52$; $Fr = 0,19$ ($N^2 = 1000$) en prenant différents valeurs du nombre de Prandtl $Pr = 10$; 1 ; $0,5$; $0,1$; $0,05$, en présentant les résultats relatifs à l'hypothèse de Corrsin et en considérant l'évolution de $2N^2\Delta_{33}(0, t)/E_0$ en fonction de $\frac{Nt}{2\pi}$ (Fig. 3). D'abord, toutes ces courbes ont un comportement classique en t^2 pour t petit. De plus, pratiquement les mêmes résultats sont observés pour $Pr = 10$ et $Pr = 1$, le plateau correspondant correspond à la valeur 1 pour $2N^2\Delta_{33}(0, t)/E_0$. Pour $Pr = 0,5$ le plateau se stabilise à une valeur plus petite que la valeur de référence [1]. Pour $Pr = 0,1$ et $Pr = 0,05$, il n'existe pratiquement plus de plateau, $\Delta_{33}(0, t)$ garde un comportement oscillatoire mais diminue en moyenne, avec une diminution plus prononcée pour $Pr = 0,05$.

En conclusion, pour $Pr < 1$, l'effet de nombre de Prandtl sur la diffusion turbulente verticale est appréciable et la diminution du nombre de Prandtl accentue la suppression de la diffusion verticale.

7. Conclusion

Dans cet article, nous étudions numériquement la diffusion turbulente dans le cas d'une turbulence homogène stablement stratifiée. Cette étude est basée sur une analyse linéaire dans l'espace spectral. L'option essentielle de cette étude est l'utilisation de l'hypothèse de Corrsin (associée à une loi normale de distribution des vitesses lagrangiennes) qui permet de calculer les corrélations doubles de vitesses lagrangiennes à partir des corrélations doubles de vitesses eulériennes. Les résultats numériques obtenus à l'aide de l'hypothèse de Corrsin permettent, par comparaison aux résultats de DNS de Kaneda et Ishida, de retrouver le bon comportement (loi en t) à t grand, des composantes « horizontales » du tenseur de déplacement. De plus, il semble bien aussi que l'hypothèse de Corrsin donne lieu à des résultats en meilleur accord avec les résultats de DNS concernant la diffusion verticale. Enfin, à titre d'application, le code numérique mis au point a permis d'étudier l'influence du nombre de Prandtl Pr sur la diffusion verticale. L'influence d'un nombre de Prandtl inférieur à 1 est appréciable et la diminution du nombre de Prandtl accentue la suppression de la diffusion turbulente.

Références

- [1] Y. Kaneda, T. Ishida, Suppression of vertical diffusion in strongly stratified turbulence, *J. Fluid Mech.* 402 (2000) 311–327.
- [2] F. Nicolleau, J.C. Vassilicos, Turbulent diffusion in stably stratified non-decaying turbulence, *J. Fluid Mech.* 410 (2000) 123–146.
- [3] C. Cambon, F.S. Godeferd, F. Nicolleau, J.C. Vassilicos, Turbulent diffusion in rapidly rotating flows with and without stable stratification, *J. Fluid Mech.* 499 (2004) 231–255.
- [4] L. Liechtenstein, F.S. Godeferd, C. Cambon, The role of nonlinearity in turbulent diffusion models for stably stratified and rotating turbulence, *Internat. J. Heat Fluid Flow* 27 (2006) 644–652.
- [5] O. Iida, S. Tsujimura, Y. Nagano, Direct numerical simulation of homogeneous stratified rotating turbulence, *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 19 (6) (2005) 441–460.
- [6] F. Nicolleau, G. Yu, J.C. Vassilicos, Kinematic simulation for stably stratified and rotating turbulence, *Fluid Dyn. Res.* 40 (1) (2008) 68–93.
- [7] H. Hanazaki, J.C.R. Hunt, Linear processes in unsteady stably stratified turbulence, *J. Fluid Mech.* 318 (1996) 303–337.
- [8] P.G. Saffman, An approximate calculation of the Lagrangian auto-correlation coefficient for stationary homogeneous turbulence, *Appl. Sci. Res. A* 11 (1962) 245–255.
- [9] J.B. Taylor, B. McNamara, Plasma diffusion in two dimensions, *Phys. Fluids* 14 (1971) 1492–1499.
- [10] T.S. Lundgren, Y.B. Pointin, Turbulent self-diffusion, *Phys. Fluids* 19 (1976) 355–358.