



Problème de Cauchy pour l'approximation de Stokes–Leibenson d'une cellule de Hele–Shaw en coin



Cauchy problem for Stokes–Leibenson approximation in a Hele–Shaw corner cell

Alexandre Demidov^a, Jean-Pierre Lohéac^b, Vincent Runge^{a,b,*}

^a Moscow State University (Faculty of Mechanics and Mathematics), GSP-1, 1 Leninskiye Gory, Main Building, 119991, Moscow, Russie

^b École centrale de Lyon (institut Camille-Jordan), 36, avenue Guy-de-Collongue, 69130 Écully, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 11 juin 2013

Accepté après révision le 17 septembre 2013

Disponible sur Internet le 21 octobre 2013

Mots-clés :

Écoulements de Hele–Shaw
Méthode de Helmholtz–Kirchhoff
Modèle du quasi-contour
Problème de Stokes–Leibenson

Keywords:

Hele–Shaw flows
Helmholtz–Kirchhoff method
Quasi-contour model
Stokes–Leibenson problem

RÉSUMÉ

La transformation de Helmholtz–Kirchhoff offre une approche nouvelle pour la résolution du problème de Hele–Shaw. En particulier, le modèle du quasi-contour qui en découle permet une résolution numérique du problème. Faisant suite à un précédent article [1], nous proposons ici une amélioration significative du schéma numérique du modèle du quasi-contour, qui mène à la résolution d'un problème de Cauchy. Le calcul fastidieux d'une intégrale de surface (absente du modèle physique) a été remplacé par celui d'intégrales simples le long du contour du fluide. Nous testons ensuite le schéma obtenu sur le problème de Stokes–Leibenson dans une géométrie en coin, mettant en évidence le gain de précision des résultats. Par ailleurs, l'existence de la variété critique dans l'espace des quasi-contours est confirmée (voir [1]).

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

The Helmholtz–Kirchhoff transformation gives us a new approach to solve the Hele–Shaw problem. Particularly, we derived a so-called quasi-contour method from which we built a numerical scheme. Following a previous article [1], we propose a way to improve significantly the numerical scheme, which leads to the resolution of a Cauchy problem. The tedious calculation of a surface integral (absent in the physical problem) was replaced with simple integrals along the contour of the fluid. We have then tested the new numerical scheme on the Stokes–Leibenson problem in a corner geometry, highlighting the gain in accuracy of the results. Besides, the existence of a critical manifold in the space of contours is confirmed (see [1]).

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We first consider a generic Hele–Shaw problem in a corner of a plane with an angle α between both edges γ_0 and γ_1 . The fluid fills a simply connected domain Ω_0 including the origin in which lies a source/sink point of liquid (see Fig. 1).

* Auteur correspondant.

Adresses e-mail : demidov.alexandre@gmail.com (A. Demidov), jean-pierre.loheac@ec-lyon.fr (J.-P. Lohéac), vincent.runge@ec-lyon.fr (V. Runge).

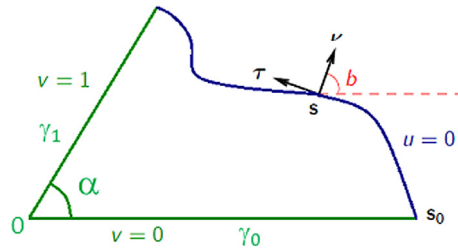


Fig. 1. Fluid domain in a corner. Colour online.

The domain Ω_0 corresponds to the liquid spot at some initial moment, it will be deformed according to the following law: at time $t \geq 0$, we obtain a domain Ω_t with a moving boundary Γ_t , which moves with velocity \dot{s} at point s , such that:

$$\text{kinetic condition: } \dot{s} \cdot \nu = \partial_\nu u, \quad \text{on } \Gamma_t$$

where ν is the outward-pointing unit normal vector, $\partial_\nu u$ is the normal outward derivative of the pressure $-u$ defined in Ω_t by:

$$\text{Stokes equation}^1: \quad \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega_t$$

$$\text{Leibenson dynamical condition}^2: \quad u = 0, \quad \text{on } \Gamma_t$$

$$\text{Boundary conditions: } \partial_\nu u = 0, \quad \text{on } \gamma_0 \cup \gamma_1$$

The fluid is injected or extracted uniformly at a rate q at point O , which corresponds to the following condition for points z in the corner:

$$u \sim \frac{q}{\alpha} \log(|z|), \quad \text{as } |z| \rightarrow 0$$

Notice that all the notations are taken from a previous paper [1].

We introduce the function v , harmonically conjugate to u and can define the Helmholtz–Kirchhoff transformation as follows:

$$A + iB = \ln \frac{\partial z}{\partial w}$$

where $z(w) = z(u + iv) = z(u, v) = x(u, v) + iy(u, v)$.

At each point $(x, y) \in \Omega_t$, the level curves of u and v are orthogonal and the function:

$$z = x + iy \mapsto w = u + iv$$

is analytic and univalent onto $\Pi = \{w = u + iv / (u, v) \in (-\infty, 0) \times (0, 1)\}$.

Real functions A and B are harmonically conjugate with respect to w , and we can write, for each time t ,

$$(A + iB)(t, u, v) = \alpha_0(t) + \alpha(u + iv) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(t) \exp(k\pi(u + iv))$$

On the free boundary, we use the notation $(A + iB)(t, 0, v) = a(t, v) + ib(t, v)$.

Polygonal approximation: quasi-contour model

A way to solve the problem is to discretise the contour into a polygon in order to obtain a finite set of unknown angles [2]. Polygonal domain can be characterised by two sequences: the unknown “quasi-contour” of order m depends on a finite number of parameters:

- (i) a sequence $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_m) \in (0, 1)^{m+1}$ such that $0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{m-1} < \sigma_m = 1$, which defines values of function v at the vertices (given at the beginning and constant during the evolution),
- (ii) a sequence $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_m)$, which gives the orientation of the outward-pointing unit normal vectors with respect to each edge.

It corresponds to the unknown piecewise constant function b .

¹ G.G. Stokes, Mathematical proof of the identity of the stream lines obtained by means of viscous film with those of a perfect fluid moving in two dimensions, in: Brit. Assoc. Rep. 143 (Papers, V, 278), 1898.
² L.S. Leibenzon, Mechanics of Oil Extraction, Part II, Neftteizdat, Moscow, 1934.

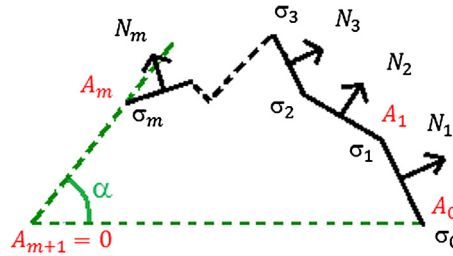


Fig. 2. Example of discretisation. Colour online.

We can express the function a only with the angles \mathbf{N} and the sequence σ has the following form:

$$a(\mathbf{N}, v) = \alpha_0(t) - \ln(g(\mathbf{N}, v)), \quad g(\mathbf{N}, v) = 2^{\alpha/\pi} \left(\prod_{k=1}^m f_k(v)^{N_k/\pi} \right) f_{m+1}(v)^{\alpha/\pi}$$

$$f_j(v) = \left| \frac{\sin \frac{\pi}{2}(v + \sigma_{j-1}) \sin \frac{\pi}{2}(v - \sigma_{j-1})}{\sin \frac{\pi}{2}(v + \sigma_j) \sin \frac{\pi}{2}(v - \sigma_j)} \right| \quad \text{for } 1 \leq j \leq m, \quad f_{m+1}(v) = 2 \left| \sin \frac{\pi}{2}(v + 1) \sin \frac{\pi}{2}(v - 1) \right|$$

Numerical scheme: $\tilde{Q}(\mathbf{N}) \dot{\mathbf{N}} = q \exp(-2\alpha_0)(P_0(\mathbf{N}) + \frac{1}{|2\omega|} P_1(\mathbf{N}))$, where:

(i) \mathbf{N} satisfies the following constraints, since the fluid domain is connected:

$$-\frac{\pi}{2} < N_1 < \frac{\pi}{2}; \quad -\pi < N_k - N_{k-1} < \pi, \quad \forall k \in \{2, \dots, m\}; \quad \alpha - \frac{\pi}{2} < N_m < \alpha + \frac{\pi}{2}$$

(ii) $\tilde{Q}(\mathbf{N}) = \bar{Q}(\mathbf{N}) + Q(\mathbf{N})$ is an $(m \times m)$ -matrix, $P_0(\mathbf{N})$ and $P_1(\mathbf{N})$ belong to \mathbb{R}^m ,

(iii) \bar{Q} can be expressed using the equality $\bar{Q}(\mathbf{N}) \dot{\mathbf{N}} = \frac{1}{2|\omega|} \frac{d|\omega|}{d\mathbf{r}} P^1$ and the relation $|\Omega| = e^{2\alpha_0} |\omega|$, with:

$$|\omega| = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k < i \leq m-1} \sin(N_{i+1} - N_{k+1}) \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{g(v)} dv \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(v)} dv, & \text{if } \alpha = \pi \\ \sum_{0 \leq k < i \leq m-1} C_{ik} \cos N_{k+1} (\sin N_{i+1} + \frac{\cos N_{i+1}}{\tan \alpha}) \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} \frac{1}{g(v)} dv \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(v)} dv, & \text{if } \alpha \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

where $C_{ik} = 1$ if $i \neq k$, $C_{ik} = 1/2$ if $i = k$.

Formulas for matrix Q and vectors P^0 and P^1 are exactly the same as in the article [1].

We now demonstrate this result and apply the previous scheme to the Stokes–Leibenson problem.

1. Démonstration

Démontrons la simplification du schéma numérique dans le cas $\alpha = \pi$.

L'aire d'un polygone de sommet A_i et de coordonnées (x_i, y_i) pour i de 0 à $m + 2$ (cf. Fig. 2) avec $A_0 = A_{m+2}$ est exprimée par la formule $|\Omega| = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{m-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$. Par ailleurs, pour i de 0 à m on a les relations :

$$x_i = \left(|\gamma_0| - \sum_{k=1}^i \sin N_k \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{1}{g(v)} dv \right) e^{\alpha_0}, \quad y_i = \left(\sum_{k=1}^i \cos N_k \int_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} \frac{1}{g(v)} dv \right) e^{\alpha_0}$$

En introduisant les notations $x_{i+1} = (\tilde{x}_i - s_i) e^{\alpha_0}$ et $y_{i+1} = (\tilde{y}_i + c_i) e^{\alpha_0}$, on obtient une expression allégée pour l'aire :

$$|\Omega| = \frac{1}{2} e^{2\alpha_0} \sum_{i=0}^{m-1} (\tilde{x}_i c_i + \tilde{y}_i s_i)$$

En remarquant que

$$\sum_{i=0}^{m-1} \cos N_{i+1} \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} \frac{1}{g(v)} dv = 0$$

– relation qui exprime l'appartenance du point A_m à l'axe des abscisses – le résultat découle d'un calcul direct de l'aire avec les formules données. La deuxième égalité dans le cas $\alpha \neq \pi$ s'obtient par le même type de raisonnement.

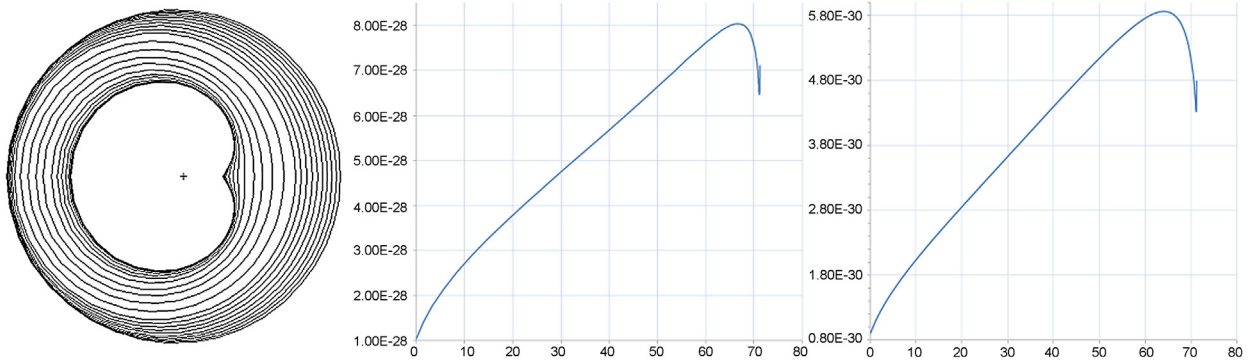


Fig. 3. Évolution du contour initial jusqu'à l'apparition du point de rebroussement (à gauche). Évolution de $\det(Q)$ en fonction du temps (au centre). Évolution de $\det(\tilde{Q})$ en fonction du temps (à droite).

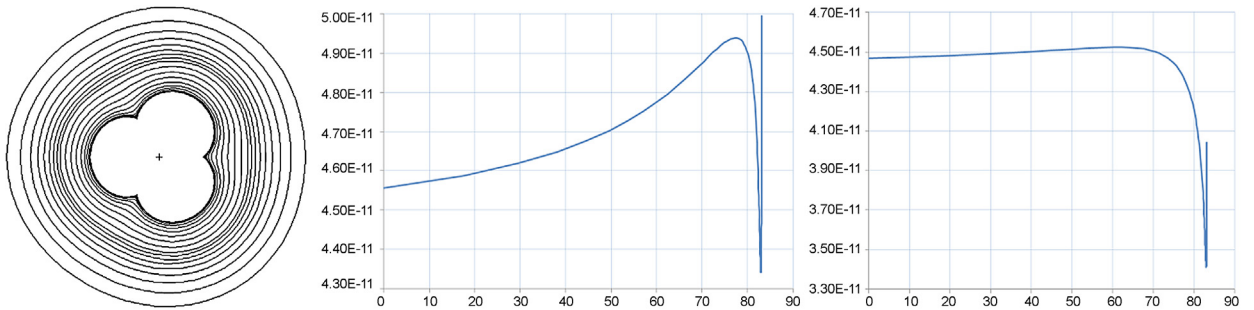


Fig. 4. Évolution du contour initial jusqu'à l'apparition du point de rebroussement ; 19 itérations représentées sur un total de 58 (à gauche). Évolution de $\det(Q)$ en fonction du temps (au centre). Évolution de $\det(\tilde{Q})$ en fonction du temps (à droite).

2. Étude numérique

Dans les exemples qui suivent, on s'intéresse seulement au cas source, en imposant $q = -1$. La résolution du système d'équations différentielles nous laisse libres dans le choix du pas de temps. Il est choisi de telle sorte que les variations d'angles maximales pour N ne dépassent pas une constante C donnée (ici 2 degrés). La variation d'aire à chaque itération est alors décrite par la formule suivante (les \dot{N}_i étant solutions du système d'équations du schéma numérique) :

$$\frac{d|\Omega|}{|\Omega|} = \frac{qC}{e^{2\alpha_0}|\omega| \max_{i=1 \dots m} \dot{N}_i}$$

2.1. Cas des symétries

Le problème générique considéré dans la première partie nous permet de reconstruire un écoulement de Hele-Shaw dans le plan tout entier par symétrie et rotation du problème lorsque $\alpha = \pi/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Une symétrie d'axe γ_1 est tout d'abord effectuée, suivie de $n - 1$ duplication(s) pour reconstituer l'écoulement dans le plan.

Pour ($n = 1$), on tente de reproduire l'évolution d'un contour initial vers une cardioïde [3]. Le contour initial possède 20 côtés dans sa partie supérieure et est la discrétisation de la représentation graphique de l'équation $z = \zeta - 0.05\zeta^2$, $|\zeta| = 1$ dans le demi-plan $\Im(z) > 0$. L'essai numérique comporte 65 itérations, 19 d'entre elles étant représentées sur la Fig. 3.

Le déterminant de Q et celui de \tilde{Q} ont le même comportement, ils présentent une brusque chute à l'approche de la singularité.

L'exemple suivant pour ($n = 3$) est construit en discrétisant en 10 côtés la figure obtenue par l'équation $z = \zeta - 0.02\zeta^4$, $|\zeta| = 1$ vue sous l'angle α (cf. Fig. 4). Les déterminants de Q et \tilde{Q} présentent de même un minimum local au moment de l'apparition du point de rebroussement.

2.2. Cas du coin

N'ayant pas à notre disposition de solutions exactes non homothétiques pour le cas du coin, nous choisissons un contour initial quasi régulier, volontairement légèrement déformé. L'angle au coin est imposé à 110 degrés. Nous représentons 15 des 53 itérations effectuées sur la Fig. 5 ainsi que l'évolution des déterminants.

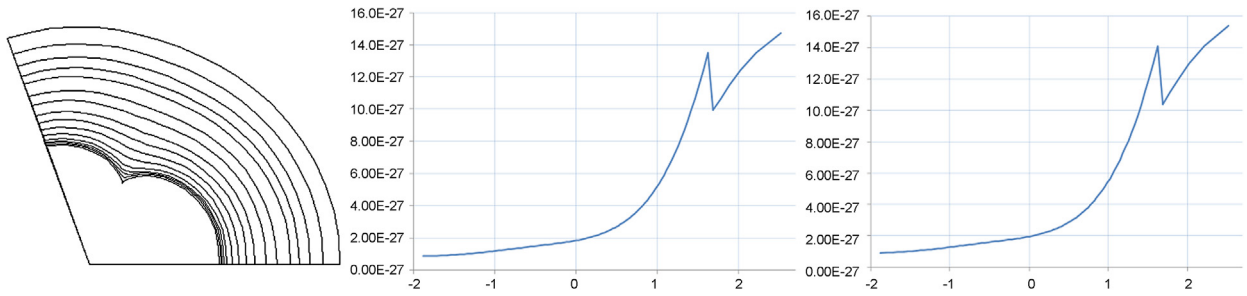


Fig. 5. Évolution du contour initial jusqu'à l'apparition du point de rebroussement (à gauche). Évolution de $\det(Q)$ (au centre), puis de $\det(\tilde{Q})$ (à droite) en fonction de $-\log(|\Omega(t)| - |\Omega|(i = 54))$.

Le passage en échelle logarithmique pour représenter les déterminants est nécessaire, étant donné que, dans cet exemple, les déterminants ne subissent qu'une très légère baisse au moment du rebroussement.

3. Conclusion

La transformation en un problème de Cauchy du schéma numérique de l'article [1] permet, non seulement la disparition du calcul d'une intégrale double (ce qui est important), mais aussi la suppression du terme $\hat{\alpha}$, source d'une très grande instabilité dans le schéma numérique. Les résultats présentés démontrent la grande efficacité de l'approche utilisant la transformation de Helmholtz–Kirchhoff.

La diminution du déterminant de Q est confirmée à l'approche des singularités. Le déterminant de la matrice \tilde{Q} a le même comportement. La remontée brusque du déterminant en fin de calcul signifie que le contour a « dépassé » la singularité, c'est-à-dire s'est éloigné du quasi-contour discrétisant le contour appartenant à la variété critique. En révélant la présence d'une variété dans le domaine discret en accord avec celle du modèle théorique, nous avons mis en évidence la pertinence du modèle numérique du quasi-contour.

Références

- [1] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac, V. Runge, Attractors–repellers in the space of contours in the Stokes–Leibenson problem for Hele–Shaw flows, *J. Math. Sci.* 189 (4) (2013) 568–581.
- [2] A.S. Demidov, J.-P. Lohéac, Numerical scheme for Laplacian growth models based on the Helmholtz–Kirchhoff method, in: B. Gustafsson, A. Vasil'ev (Eds.), *Analysis and Mathematical Physics*, in: *Trends in Mathematics*, Birkhäuser, Basel, 2009, pp. 107–114.
- [3] L.A. Galin, Unsteady filtration with a free surface, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 47 (1945) 250–253.