



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Mecanique

www.sciencedirect.com



Description multivoque d'une roue freinée et applications à la dynamique de véhicules à roues

*Multivalued description of a braked wheel and applications to dynamics of wheeled vehicles*

Jérôme Bastien

Centre de recherche et d'innovation sur le sport, UFRSTAPS, université Claude-Bernard-Lyon-1, 27-29, bd du 11-Novembre-1918, 69622 Villeurbanne cedex, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 19 juin 2013

Accepté après révision le 16 septembre 2013

Disponible sur Internet le 15 octobre 2013

Mots-clés :

Frottement

Frein

Moteur

Lois de frottement

Dynamique non linéaire

Keywords:

Friction

Brake

Motor

Friction law

Nonlinear dynamics

R É S U M É

On étudie une roue, soumise aux frottements exercés par le sol et par un système de freinage. Un formalisme utilisant des opérateurs multivoques permet d'écrire les lois de comportement de cette roue sous la forme d'une inclusion différentielle dont l'unique solution peut être approchée par un schéma d'Euler implicite. On peut associer un châssis à une, deux ou quatre de ces roues, en obtenant une inclusion différentielle de même type que la précédente. De façon plus générale, de nombreuses applications peuvent être proposées dans le domaine de la dynamique non linéaire des véhicules à roues.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We study a wheel submitted to friction forces exerted by the ground and by a brake system. A formalism using multivalued operators allows us to write the constitutive laws of the wheel as a differential inclusion, whose unique solution can be approximated by a numerical scheme. We can connect a chassis with one, two or four of these wheels, by obtaining a differential inclusion of the same kind as the previous one. More generally, many applications can be offered in the field of nonlinear dynamics of wheeled vehicles.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

This note is devoted to the study of a simple wheel, subjected to a motor torque and two friction forces: the first one is exerted by the ground and the second one by a brake system (see [1]). These two forces are governed by Coulomb's law. We assume that this wheel is associated with a chassis that remains horizontal. This model is not physically realistic! However, we can assume that we have two or four identical wheels, with the same forces, which maintain this chassis horizontal. We assume that the ground is plane and horizontal and that the wheel moves in a plane. We write m_w the wheel's mass, R its radius, and I its (plane) moment of inertia relative to its center. The wheel is defined by two parameters: x , the abscissa of its center of gravity, and θ , the angle of rotation of the wheel (relative to a fixed direction) (see Fig. 1(a)). Let $(0, \vec{i}, \vec{j})$ be a reference frame (which is a right-handed orthonormal basis). We assume that the wheel is in contact with the plane ground. The ground action on the wheel is denoted by $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N} = \mathcal{T}\vec{i} + \mathcal{N}\vec{j}$, where the number \mathcal{T} can be either positive

Adresse e-mail: jerome.bastien@univ-lyon1.fr.

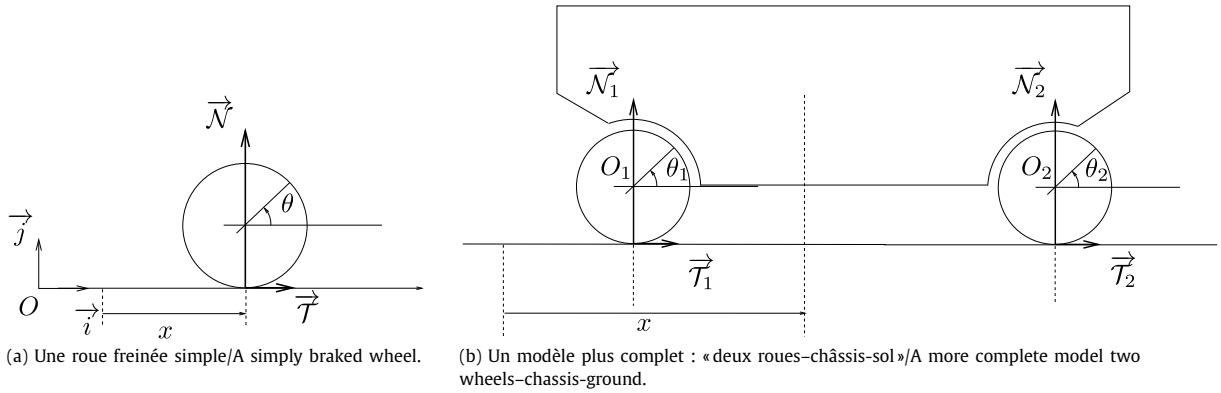


Fig. 1. Deux modèles avec roues freinée.
 Fig. 1. Two models with braked wheels.

or negative and the number \mathcal{N} is positive. If \mathcal{N} is a constant, then the Coulomb law for the force exerted by the ground can be written under the form:

$$\mathcal{T} \in -\alpha_G \sigma(\dot{x} + R\dot{\theta}) \tag{1}$$

where $\alpha_G > 0$ is a constant and the multivalued maximal monotone operator σ is defined by:

$$\sigma(x) = \begin{cases} -1 & \text{if } x < 0 \\ 1 & \text{if } x > 0 \\ [-1, 1] & \text{if } x = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Like in [2, pp. 146–150], the braking system is composed of two symmetrical sheets that exert a pressure denoted by $\alpha_B \geq 0$ (which depends on time) on a disk fixed on the wheel. If the braking system is fixed to the chassis, with a fixed direction according to the ground, then the angular relative velocity between the wheel and the brake is $\dot{\theta}$ and Coulomb's law for the braking torque \mathcal{M}_B exerted on the wheel is written under the form:

$$\mathcal{M}_B \in -\alpha_B \sigma(\dot{\theta}) \tag{3}$$

This wheel is also submitted to a motor torque \mathcal{M} . This description is not as complete as the one in [2–5]. We focus indeed on the following point: we show that the maximal monotone formalism used in [6–11] and applied to some elastoplastic models is well adapted to the description of the dynamical behavior of the wheel. That permits to write correctly the differential inclusions (see [12]) and to obtain results of existence, uniqueness, and convergence of the numerical scheme. Indeed, thanks to the notion of multivalued operator and of differential inclusion, we can write both kinds of behavior (static or dynamic) of the Coulomb friction laws. By considering the state variable $u(t) = (\dot{x}(t), R\dot{\theta}(t))$ in \mathbb{R}^2 , a smooth function \mathcal{G} from $[0, T]$ to \mathbb{R}^2 , a diagonal matrix with non-negative coefficients D and a multivalued operator A_t (which depends on time) from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^2 , we prove that the dynamics of the wheel with the Coulomb friction laws (1) and (3) is governed by the following differential inclusion:

$$\dot{u}(t) + DA_t(u(t)) \ni \mathcal{G}(t), \quad \text{a.e. on } (0, T) \tag{4a}$$

with initial conditions:

$$u(0) = u_0 \tag{4b}$$

For a fixed value of t , A_t is the subdifferential of the continuous convex function ϕ_t defined by:

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi_t(x_1, x_2) = \alpha_G |x_1 + x_2| + \alpha_B(t) |x_2| \tag{5}$$

If the function α_B is positive and belongs to $L^1(0, T)$ and if \mathcal{M} belongs to $L^1(0, T)$, then there exists a unique solution $u \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^2)$ of (4) [13, Theorem 10.5].

Moreover, we can adapt the results of [9–11] to build an *ad hoc* numerical scheme for the differential problem (4). The convergence error is of order 1. Some numerical simulations show different behaviors of the wheel.

Other more complete models can be built by associating one or more wheels with some mechanical components. For example, the association of two (or four) wheels from Fig. 1(b) with the chassis is still described by a differential inclusion of the form (4) (in \mathbb{R}^3). We obtain then a theoretical framework that provides the existence and the uniqueness of the solution and the convergence of the numerical scheme. Like in [10,11, chapter 7], we could also replace the simpler Coulomb friction laws by more realistic friction ones (see for example [2–4]).

1. Introduction

Reprenons l'étude faite dans [1].

Dans cette note, on présente l'étude simple d'une roue soumise à un couple moteur, ainsi qu'à une force de frottement exercée par le sol et à un couple de freinage, ces deux derniers étant gouvernés par la loi de frottement de Coulomb. Il ne s'agit pas de donner des modélisations aussi complètes que dans [2–5] mais de montrer, sur un cas simple, que le formalisme maximal monotone introduit pour différents modèles élastoplastiques dans [6–11] est ici pratique à utiliser et simple à discrétiser pour prendre en compte les deux non-linéarités essentielles de ce problème. Le formalisme adopté permettra d'obtenir des inclusions différentielles plus maniables que les équations différentielles obtenues dans [2,3]; en effet, grâce aux opérateurs maximaux monotones multivoques, les différents cas (phase de glissement ou non) sont traités par une seule et même équation. En outre, le modèle proposé sera plus complet que dans [2], où le cas de la roue bloquée par le système de freinage n'est pas pris en compte dans les équations différentielles obtenues.

Dans la section 2, les deux lois de frottement sont présentées, dans un cadre très simple, celui de la force de Coulomb. Dans la section 3, on étudie un modèle simplifié : roue–châssis–sol. Des résultats théoriques d'existence et d'unicité de l'inclusion différentielle gouvernant le mouvement sont donnés. Un schéma numérique est présenté, ainsi que les résultats de quelques simulations. Dans la section 4, diverses généralisations possibles sont évoquées.

2. Présentation de la roue étudiée et des deux lois de frottement

On utilise la loi de Coulomb usuelle pour deux solides en contact : on considère l'action $\vec{\mathcal{R}}$ d'un solide sur un autre. Cette action se décompose en une composante normale $\vec{\mathcal{N}}$, perpendiculaire à la surface de contact entre les deux solides, et une composante tangentielle $\vec{\mathcal{T}}$, tangente à la surface de contact. Tant que le rapport \mathcal{T}/\mathcal{N} ne dépasse par une certaine limite μ_f , il y a adhérence, et le solide reste immobile (phase statique). Dès que cette valeur est atteinte, il y a glissement ; on a $\mathcal{T}/\mathcal{N} = \mu_f$, et la force tangentielle est opposée à la vitesse relative entre les deux solides (phase dynamique). Plusieurs expressions de μ_f sont possibles, notamment en fonction de la vitesse relative (voir, par exemple, [2,4]). Ici, on étudiera le cas le plus simple et idéal dans lequel μ_f est identique en phase statique et en phase dynamique et constant et uniforme, comme par exemple dans [2, figure 2.3c], p. 85], [3, chapitre 5] ou [14].

Soit une roue (supposée avoir un mouvement plan), de masse m_w , de rayon R et de moment d'inertie (plan) par rapport à son centre I . Cette roue est définie par deux paramètres : x , l'abscisse de son centre de gravité, et θ , l'angle de rotation de la roue (par rapport à une direction fixe).

L'action du sol plan sur la roue est notée $\vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{T}} + \vec{\mathcal{N}} = \mathcal{T}\vec{i} + \mathcal{N}\vec{j}$, où le nombre \mathcal{T} est de signe quelconque et \mathcal{N} est positif (voir Fig. 1(a)). Si \mathcal{N} est constant, alors la loi de Coulomb peut être écrite sous la forme (1), où $\alpha_G > 0$ est constant et le graphe maximal monotone σ est donné par (2). Si la roue est en phase de glissement, la vitesse relative entre la roue et le sol $\dot{x} + R\dot{\theta}$ est non nulle et \mathcal{T} est de valeur absolue α_G et de sens opposé à cette vitesse relative. Sinon, il y a frottement sans glissement, $\dot{x} + R\dot{\theta}$ est nulle et \mathcal{T} appartient à $[-\alpha_G, \alpha_G]$.

L'action du disque de frein est modélisée comme dans [2, pp. 146–150]. Un ensemble de deux plaques symétriques, de direction fixe par rapport au sol, exerce une pression $\alpha_B \geq 0$, qui dépend du temps sur un disque solidaire de la roue, de sorte que le couple de frein \mathcal{M}_B exercé sur la roue obéit à la loi de Coulomb écrite sous la forme (3).

L'avantage de cette écriture sous la forme des inclusions différentielles (1) et (3) est que la dynamique des modèles étudiés sera gouvernée par une inclusion différentielle (voir [12]), qui sera résolue numériquement grâce à un schéma numérique *ad hoc*. L'énorme avantage de ce schéma numérique, même s'il n'est que d'ordre un, est le suivant : il n'est pas nécessaire de déterminer les changements de phase et le calcul se fait, à chaque pas de temps, par la simple utilisation de la résolvante de l'opérateur A et ce, quel que soit le nombre de degrés de liberté du modèle utilisé. On parle de schéma numérique du type *event-capturing method* : non piloté par les événements de changements de phase. Au contraire, dans [2,4], les équations différentielles écrites sont résolues phase par phase, en tenant compte des différents états possibles de la roue (glissement ou frottement).

3. Étude d'un modèle simplifié roue–châssis–sol

Ce modèle de roue motorisée, frottant sur le sol et freinée, peut être associé à d'autres solides, de façon complexe, comme dans [2–5]. Ici, on prendra un modèle délibérément très simple : seule une roue de ce type est fixée à un châssis, de masse m_c et supposé de direction fixe par rapport au sol. (Ce qui n'est pas très physiquement réaliste ! Mais on peut supposer que l'on ait deux ou quatre roues subissant les mêmes forces et maintenant ce châssis horizontal.) On suppose qu'il n'y a pas de charges verticales variables. Pour deux fonctions \mathcal{M} et α_B données et en notant $m = m_w + m_c$, $x_1 = \dot{x}$, $x_2 = R\dot{\theta}$, $f = -\mathcal{T}$, $g = -\mathcal{M}_B$, on montre que la dynamique de ce système (avec les deux lois de frottement (1) et (3)) est gouvernée par l'inclusion différentielle :

$$\begin{cases} m\dot{x}_1 + f = 0 \\ \frac{I}{R^2}\dot{x}_2 + f + g = \mathcal{M} \\ f \in \alpha_G \sigma(x_1 + x_2) \\ g \in \alpha_B \sigma(x_2) \end{cases} \quad (6a)$$

avec des conditions initiales :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{1,0} \\ x_2(0) = x_{2,0} \end{cases} \quad (6b)$$

Les inconnues sont x_1 , x_2 , f et g . Ce problème généralise [10,11, section 7.3.1]. Généralisons la définition de l'opérateur multivoque donnée par [10,11, Éq. (7.96)].

Définition 3.1. Soit $t \in [0, T]$. On définit l'opérateur multivoque A_t de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 qui, à $X = (x_1, x_2)$ associe $Y = (y_1, y_2)$ défini par : il existe f et g dans \mathbb{R} tels que

$$f \in \alpha_G \sigma(x_1 + x_2) \quad (7a)$$

$$g \in \alpha_B \sigma(x_2) \quad (7b)$$

$$y_1 = f \quad (7c)$$

$$y_2 = f + g \quad (7d)$$

Comme dans [10,11, section 7.3.1], pour $t \in [0, T]$ fixé, A_t est le sous-différentiel (voir [12]) de la fonction convexe continue définie par (5). Ainsi A_t est-il un opérateur maximal monotone. En posant $u = (x_1, x_2)$ et en considérant la matrice D et la fonction \mathcal{G} définies par :

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{I} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G}(t) = D \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{M}(t) \end{pmatrix}$$

on peut donc mettre l'inclusion (6) sous la forme (4). Si la fonction α_B est dans $L^1(0, T)$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+ et si \mathcal{M} est dans $L^1(0, T)$, alors il existe une unique solution $u \in W^{1,1}(0, T; \mathbb{R}^2)$ de (4) [13, théorème 10.5].

La nouveauté de ce modèle mécanique par rapport aux modèles présentés dans [6,7,9–11] est qu'ici un des coefficients de frottement (α_B) varie au cours du temps, ce qui se traduit par une dépendance en temps de la fonction ϕ_t définie par (5). Cette dépendance en temps pourrait aussi être prise en compte dans des applications où les effets de frottement varient avec le temps ou la température. Remarquons que, si α_B est constant, alors on est dans le cas déjà vu de [10,11, section 7.3.1].

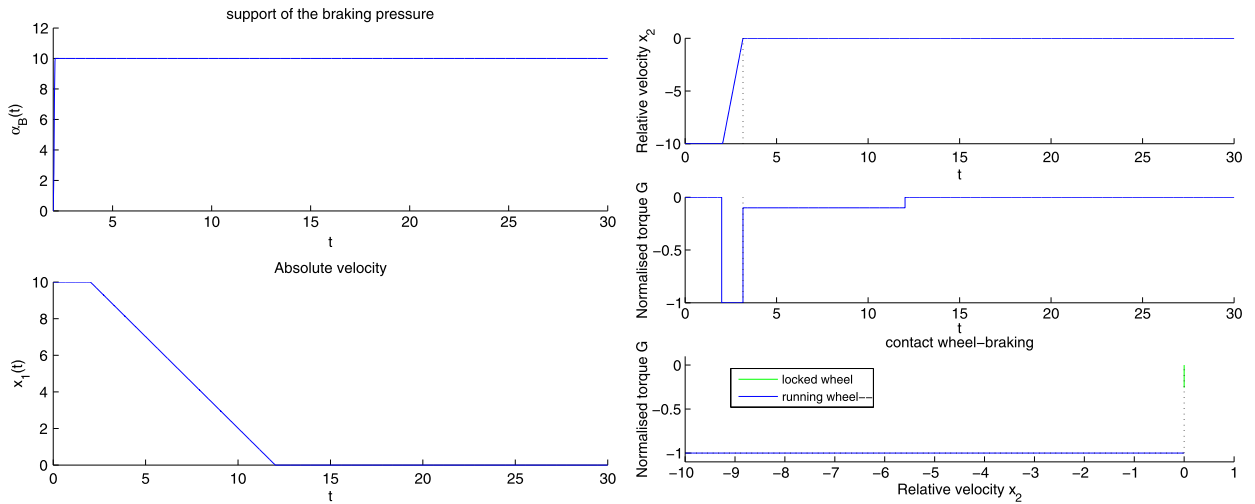
Comme dans [6,9–11,15] on utilise un schéma numérique d'Euler implicite *ad hoc* pour discrétiser (4) : on choisit $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $h = T/N$ et, pour $n \in \{0, \dots, N\}$, $t_n = hn$. On définit, pour $n \in \{0, \dots, N\}$, U^n , une approximation de $u(t_n)$ par le schéma suivant :

$$\forall n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad U^{n+1} = (I + hDA_{t_{n+1}})^{-1}(h\mathcal{G}(t_n) + U^n) \quad (8)$$

où $(I + hDA_{t_{n+1}})^{-1}$ est la résolvante de l'opérateur maximal monotone $DA_{t_{n+1}}$. Cette résolvante peut s'explicitier analytiquement. Contrairement au cas déjà vu dans [10,11], elle est totalement couplée par rapport à ses deux variables, et la détermination complète de celle-ci fait intervenir une partition de \mathbb{R}^2 en neuf régions, qui correspondent aux différents états de la roue (trois états possibles par rapport au sol et trois états possibles par rapport au frein).

Des résultats généraux, issus par exemple de [16–19], assurent la convergence du schéma numérique (8) vers la solution de (6). Par ailleurs, le théorème 3.1 de [9] peut s'étendre aisément dans le cas où ϕ dépend du temps et fournir un ordre de convergence égal à 1. Différentes simulations numériques ont été faites, montrant les différents comportements possibles de la roue : roue glissant avec frottement par rapport au sol ou au patin de frein ou roulant sans glissement sur le sol ou sur le patin de frein.

Par exemple, on considère un freinage sportif : la roue roule à vitesse constante et on applique une pression de freinage qui varie fortement de zéro à une valeur maximale, puis décroît de nouveau vers zéro. On a représenté sur la Fig. 2 le support de la pression de freinage et la vitesse absolue au cours du temps, ainsi que les courbes du couple normalisé $G \in [-1, 1]$ (défini par g/α_B , si α_B est non nul et égal à 0 sinon) et de la vitesse entre la roue et le châssis. On observe que la vitesse relative entre la roue et le frein est d'abord non nulle, avec un couple normalisé égal à -1 . Ensuite, cette vitesse relative devient nulle et, tant que la vitesse absolue de la roue est non nulle, le couple normalisé appartient à $]-1, 0]$. Physiquement, on observe donc une brève première phase (au début du freinage fort) où la roue n'est pas bloquée par rapport au frein et frotte donc sur le patin de frein, puis une seconde phase où la roue devient bloquée et frotte cette fois-ci, non sur le frein, mais sur le sol, ce qui physiquement est moins efficace. Sur la Fig. 2(b), on constate que l'on a bien $G \in \sigma(x_2)$ avec x_2 strictement négatif au début de la phase de freinage, puis x_2 nul ensuite.



(a) Support de la pression de freinage et vitesse absolue au cours du temps/Support of braking pressure and absolute velocity versus the time.

(b) Courbes du couple normalisé G et de la vitesse entre la roue et le châssis/Curves of the normalised torque G and of the relative velocity between the wheel and the chassis.

Fig. 2. Simulations numériques.
Fig. 2. Numerical simulations.

4. Différentes généralisations possibles

Plusieurs directions peuvent être prises pour utiliser le modèle de la section 3 : on peut, tout d'abord, considérer des associations plus complexes de différents modèles élémentaires, comme dans [2–5].

On peut associer deux (ou quatre, si elles mises deux par deux) des roues de la section 3, comme l'indique la Fig. 1(b). On peut montrer que l'on obtient une inclusion différentielle du type de (4), où l'on a cette fois-ci : $u(t) = (\dot{x}(t), R\dot{\theta}_1(t), R\dot{\theta}_2(t))$. La difficulté de ce modèle est que les charges verticales intervenant dans les lois de Coulomb entre les roues et le sol ne sont plus constantes et dépendent des couples de freinage exercés sur les deux roues, qui sont inconnus. Si on impose que les couples moteur et que les pressions de freinage ne sont pas trop importantes, alors le contact unilatéral entre les roues et le sol est assuré. Cependant, dans ce cas, l'opérateur multivoque A_t n'est pas nécessairement maximal monotone et la nouvelle inclusion analogue à (4) a une solution dont seule l'existence est assurée [13, théorème 9.2]. Le schéma numérique (8) ne peut plus être utilisé ici, car, en l'absence de monotonie de l'opérateur $DA_{t_{n+1}}$, le graphe $(I + hDA_{t_{n+1}})^{-1}$ n'est plus nécessairement univoque. De plus, la convergence n'est plus nécessairement assurée. Dans [20], l'existence et l'unicité de la solution, donnée dans le cas du frottement de Coulomb bilatéral, sont appliqués par exemple au problème de Klarbing [21]. Cependant, ces résultats ne sont pas utilisables ici, où la roue est en contact à la fois avec l'essieu et le sol, ce qui implique un couplage entre les différents degrés de liberté (comme le montre la présence du terme $|x_1 + x_2|$ dans (5)).

En revanche, si l'on fait l'hypothèse réaliste selon laquelle les couples de freinage sont négligeables par rapport au couple du poids du châssis, l'opérateur multivoque est alors égal au sous-différentiel d'une combinaison linéaire à coefficients positifs et dépendant du temps de $|\dot{x} + R\dot{\theta}_1|$, $|\dot{x} + R\dot{\theta}_2|$, $|\dot{\theta}_1|$ et $|\dot{\theta}_2|$, et est donc de nouveau maximal monotone. La nouvelle inclusion analogue à (4) possède, cette fois-ci, une unique solution [13, théorème 10.5]. Le calcul explicite de la résolvante est possible, mais plus difficile que dans la section 3, puisqu'au lieu d'avoir 3^2 cas possibles, on en a maintenant $3^4 = 81$. De façon plus générale, les différentes dynamiques (longitudinales, transversales, verticales) des constituants d'un véhicule peuvent être considérées en prenant en compte de façon plus systématique les différentes sources de non-linéarité (amortisseur, pneumatique) et en considérant aussi les différents organes de transmissions des couples de freinage ou moteur. Dans tous les cas, on mettra les équations gouvernant les mouvements sous la forme $u'(t) \in \mathcal{F}(t, u(t))$, où \mathcal{F} est une application multivoque, et on utilisera des résultats d'existence, éventuellement d'unicité et de convergence de schéma, comme ceux vus précédemment.

On peut aussi remplacer la loi de Coulomb idéale par des lois plus réalistes, par exemple des lois multivoques, comme dans [10,11, chapitre 7]. On peut aussi prendre en compte des lois univoques, comme dans [2,3,5,22–25], où la force de frottement devient alors fonction de la vitesse relative. Naturellement, en traitant éventuellement les parties non monotones de ces lois comme dans [10,11, chapitre 7], on aura encore affaire à des opérateurs (univoques) maximaux monotones, et les résultats présentés dans cette note demeurent valables.

La nouveauté de l'utilisation classique d'inclusions différentielles consiste en la richesse des modèles possibles de véhicules en régime dynamique habituellement traités avec des équations différentielles ordinaires.

Remerciements

Je remercie beaucoup les reviewers pour la qualité et le soin de leur rapport, qui m'ont aidé à enrichir cette note.

Références

- [1] J. Bastien, Study of a driven and braked wheel using maximal monotone differential inclusions, Applications to the nonlinear dynamics of wheeled vehicles, 2013, soumis.
- [2] J.-P. Brossard, Dynamique du freinage, Collection des sciences appliquées de l'INSA de Lyon, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2009.
- [3] J.-P. Brossard, Dynamique du véhicule, Collection des sciences appliquées de l'INSA de Lyon, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
- [4] R. Andrzejewski, J. Awrejcewicz, Nonlinear Dynamics of a Wheeled Vehicle, Advances in Mechanics and Mathematics, vol. 10, Springer, 2005.
- [5] H. Pacejka, Modelling complex vehicle systems using bond graphs, J. Franklin Inst. 319 (1–2) (1985) 67–81, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0016003285900651>.
- [6] J. Bastien, M. Schatzman, C.-H. Lamarque, Study of some rheological models with a finite number of degrees of freedom, Eur. J. Mech. A, Solids 19 (2) (2000) 277–307, [http://dx.doi.org/10.1016/S0997-7538\(00\)00163-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0997-7538(00)00163-7).
- [7] J. Bastien, M. Schatzman, Numerical precision for differential inclusions with uniqueness, Modél. Math. Anal. Numér. 36 (3) (2002) 427–460, <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2002020>.
- [8] J. Bastien, C.-H. Lamarque, Persoz's gephyroidal model described by a maximal monotone differential inclusion, Arch. Appl. Mech. 78 (5) (2008) 393–407, <http://dx.doi.org/10.1007/s00419-007-0171-8>.
- [9] J. Bastien, Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions, Z. Angew. Math. Phys. 64 (2013) 955–966, <http://dx.doi.org/10.1007/s00033-012-0276-y>.
- [10] J. Bastien, F. Bernardin, C.-H. Lamarque, Systèmes dynamiques discrets non réguliers déterministes ou stochastiques, Collection Mécanique des structures, Hermès Science Publications, 2012, Ouvrage traduit en anglais (voir [11]). Voir <http://www.lavoisier.fr/livre/h3908.html>.
- [11] J. Bastien, F. Bernardin, C.-H. Lamarque, Non Smooth Deterministic or Stochastic Discrete Dynamical Systems, Wiley–ISTE, 2013, Traduction en anglais de [10]. Voir <http://eu.wiley.com/WileyCDA/WileyTitle/productCd-1848215258.html>.
- [12] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, in: Notas de Matemática (50), North-Holland Mathematics Studies, vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.
- [13] K. Deimling, Multivalued Differential Equations, de Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 1, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992.
- [14] J.A.C. Martins, S. Barbarin, M. Raous, A. Pinto da Costa, Dynamic stability of finite-dimensional linearly elastic systems with unilateral contact and Coulomb friction, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 177 (3–4) (1999) 289–328, [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00386-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00386-7).
- [15] M. Jean, The non-smooth contact dynamics method, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 177 (3–4) (1999) 235–257, [http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00383-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00383-1).
- [16] A.L. Dontchev, E.M. Farkhi, Error estimates for discretized differential inclusion, Computing 41 (4) (1989) 349–358, <http://dx.doi.org/10.1007/BF02241223>.
- [17] A. Dontchev, F. Lempio, Difference methods for differential inclusions: a survey, SIAM Rev. 34 (2) (1992) 263–294, <http://dx.doi.org/10.1137/1034050>.
- [18] F. Lempio, V. Veliov, Discrete approximations of differential inclusions, Bayreuth. Math. Schr. 54 (1998) 149–232.
- [19] V. Veliov, Second-order discrete approximation to linear differential inclusions, SIAM J. Numer. Anal. 29 (2) (1992) 439–451, <http://dx.doi.org/10.1137/0729026>.
- [20] P. Ballard, S. Basseville, Existence and uniqueness for dynamical unilateral contact with Coulomb friction: a model problem, Modél. Math. Anal. Numér. 39 (1) (2005) 59–77, <http://dx.doi.org/10.1051/m2an:2005004>.
- [21] A. Klarbring, Example of non-uniqueness and non-existence of solutions to quasistatic contact problems, Ing.-Archiv (1990) 529–541.
- [22] E. Bakker, L. Nybord, H. Pacejka, Tyre modelling for use in vehicle dynamics studies, SAE 870421, 1987.
- [23] H. Pacejka, E. Bakker, L. Lidner, A new tyre model with an application in vehicle dynamics studies, SAE Technical Paper 890087, 1989.
- [24] H. Pacejka, The tyre as a vehicle component, in: XXVI FISITA Congress, Prague, République Tchèque, 1996.
- [25] H. Pacejka, Tyre and Vehicle Dynamics, SAE International, Butterworth-Heinemann, Oxford, 2006.